Distribusi Pendekatan (Limiting Distributions)

Ada 3 teknik untuk menentukan distribusi pendekatan:

1. Teknik Fungsi Distribusi
   Contoh
2. Teknik Fungsi Pembangkit Momen
   Contoh
3. Teknik Teorema Limit Pusat
   Contoh

Teknik Fungsi Distribusi

Definisi:

Misalkan $F_n(x)$ fungsi distribusi dari peubah acak X_n yang bergantung pada bilangan bulat positif *n.* Apabila $F(x)$ merupakan fungsi distribusi dari X sedemikian sehingga $\lim_{n \to \infty} F_n(x) = F(x)$ untuk setiap X dimana $F(x)$ kontinu, maka dikatakan peubah acak X_n memiliki distribusi pendekatan (*limiting distribution*) dengan fungsi distribusi pendekatannya adalah $F(x)$.

Teknik Fungsi Pembangkit Momen

Teorema

Misalkan peubah acak X_n mempunyai fungsi distribusi $F_n(x)$ dan fungsi pembangkit momennya $M_n(t) = M(t;n)$ ada, untuk setiap n dan $|h| < t, h > 0$. Jika ada fungsi distribusi $F(x)$ dan fungsi pembangkit momennya $M(t)$, sedemikian sehingga

$$\lim_{n \to \infty} M(t;n) = M(t)$$

maka X_n dikatakan mempunyai distribusi pendekatan dengan fungsi distribusi $F(x)$

Dalam hal ini variabel acak X_n tersebut hanya dikatakan mempunyai distribusi pendekatan atau tidak mempunyai distribusi pendekatan. Apabila X_n mempunyai distribusi pendekatan maka bentuk distribusi pendekatan tersebut tidak diketahui.

End

Contoh 3

Misalkan X_n adalah peubah acak berdistribusi chi-kuadrat dengan derajat kebebasan = n. Jika peubah acak $Y_n = \frac{(X_n - n)}{\sqrt{2n}}$, maka tentukan distribusi pendekatan dari Y_n dengan menggunakan FPM.

Untuk menyelesaikan contoh soal di atas pertama-tama terlebih dahulu menentukan fkp dari X_n, dan menentukan FPM dari X_n.

Selanjutnya menentukan FPM dari Y_n dan apakah nilai $\lim_{n \to \infty} M(t;n) = M(t)$

,

Apabila ternyata $\lim_{n \to \infty} M(t;n) = M(t)$ maka Yn mempunyai distribusi pendekatan .

Apabila sebuah peubah acak mempunyai distribusi pendekatan maka kita dapat menggunakan distribusi pendekatan itu sebagai distribusi yang sebenarnya.

Teknik Dalil Limit Pusat

Pada teknik ini, peubah acak yang merupakan jumlah dan rata-rata tersebut dengan menggunakan transformasi tertentu (angka baku) akan berdistribusi normal baku.

Pada perkuliahan sebelumnya telah membahas bahwa, jika $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ menunjukkan sampel acak dari distribusi normal yang mempunyai rerata μ dan varians σ^2, maka peubah acak

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \qquad Z_n = \frac{\sqrt{n}\,(\overline{X} - \mu)}{\sigma}$$

berdistribusi N(0, 1) untuk setiap n anggota bilangan asli. Sekarang akan membahas suatu teorema yang sangat penting, yang salah satu hasilnya mengatakan bahwa, jika $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ adalah suatu sampel acak berukuran n dari sebarang distribusi yang mempunyai mean μ dan varians $0 < \sigma^2 < \infty$, maka

$$Z_n = \frac{\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \mu\right)}{\sigma} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

Teorema Limit Pusat

Misalkan $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ adalah suatu sampel acak berukuran n dari suatu distribusi yang mempunyai mean μ dan varians $0 < \sigma^2 < \infty$, maka

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \mu\right)}{\sigma} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

Contoh 4

Diketahui peubah acak X berdistribusi b(1, p). Jika $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ merupakan sampel acak dan

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

1. Tunjukkan bahwa Y_n berdistribusi B(n, p)
2. Jika n = 100 dan p = 0,5. Hitung $P(47{,}5 \leq Y_n \leq 52{,}5)$ secara pendekatan

Kekonvergenan Stokastik

Misalkan $F_n(x)$ merupakan fungsi distribusi dari peubah acak X_n yang distribusinya bergantung pada bilangan bulat positif n.

Apabila c menunjukkan sebuah konstanta yang tidak bergantung pada n, maka peubah acak X_n dikatakan konvergen stokastik ke-c jika dan hanya jika untuk setiap ε > 0 berlaku:

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|X_n - c\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Penentuan konvergen stokastik sebuah statistik terhadap parameternya atau konstanta dapat dinyatakan sebagai konvergen dalam peluang.

Misalkan $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ adalah barisan dari peubah acak yang didefinisikan atas ruang sampel yang sama S. Misalkan pula X adalah peubah acak lain yang didefinisikan atas ruang sampel S.

Definisi

X_n dikatakan konvergen dalam peluang ke-X dinotasikan dengan $X_n \xrightarrow{P} X$ jika untuk setiap ε > 0 berlaku

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{ |X_n - X| > \varepsilon \right\} = 0$$

Penyelesaian masalah konvergen dalam peluang dapat dilakukan dengan menggunakan ketidaksamaan Chebysev's, yaitu

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{ |X - \mu_x| > k\sigma_x \right\} \le \frac{1}{k^2}$$

Langkah-langkah untuk penentuan konvergen stokastik:

1. Gunakan ketidaksamaan Chebyshev’s
2. Tentukan rerata dan variansi dari statistiknya
3. Substitusi nilai rerata dan variansi tersebut ke dalam ketidaksamaan Chebyshev’s
4. Lakukan modifikasi terhadap nilai di dalam harga mutlaknya, sedemikian hingga nilai tersebut sesuai dengan yang diharapkan
5. Misalkan $k\sigma_x = \varepsilon$ dengan σ_x sudah disubstitusikan dan diperoleh nilai k.

6. Kemudian tentukan nilai k^2

7. Beri limit untuk $n \to \infty$ pada kedua ruasnya.

Contoh

Misalkan $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ merupakan sampel acak dari distribusi eksponensial dengan fkp:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}\exp\left(-\dfrac{x}{\lambda}\right), & x > 0 \\ 0, & x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Perlihatkan bahwa $\overline{X}$ konvergen stokastik ke-λ

Teorema-teorema dalam distribusi pendekatan

Misalkan $F_n(u)$ dan $F_n(v)$ merupakan fungsi distribusi dari peubah acak U_n dan V_n yang distribusinya bergantung pada bilangan bulat positif n. Jika $U_n \xrightarrow{P} c$ dan $V_n \xrightarrow{P} d$ ($c \neq 0$, $c > 0$, $d \neq 0$) dan $P(U_n < 0) = 0$, maka:

1. $\frac{U_n}{c} \xrightarrow{P} 1$ dan $\frac{V_n}{d} \xrightarrow{P} 1$
2. $\sqrt{U_n} \xrightarrow{P} \sqrt{c}$
3. $(U_n + V_n) \xrightarrow{P} (c + d)$ dan $(U_n V_n) \xrightarrow{P} (cd)$
4. $\frac{U_n}{V_n} \xrightarrow{P} \frac{c}{d}$