KEKONVERGENAN MODEL BINOMIAL DALAM PENENTUAN HARGA OPSI EROPA

Fitriani Agustina

Opsi Eropa adalah suatu kontrak keuangan yang memberikan hak, bukan kewajiban, kepada *holder*, untuk membeli atau menjual aset pokok dari *writer* pada saat jatuh tempo dengan harga yang sudah ditentukan. Harga opsi Eropa model kontinu ditentukan dengan menggunakan rumus *Black-Scholes* sedangkan harga opsi Eropa model diskrit ditentukan dengan menggunakan metode binomial. Berdasarkan kedua proses penentuan harga opsi tersebut di atas, maka maka dapat ditentukan galat yang merupakan selisih antara harga opsi *Black-Scholes* dengan harga opsi metode binomial. Sifat yang menarik mengenai galat ini adalah bagaimana memahami kekonvergenan harga opsi metode binomial terhadap harga opsi *Black-Scholes*. Implementasi dilakukan dalam MatLab 7.1 untuk mengetahui kekonvergenan model binomial opsi Eropa.

Kata kunci : model binomial, penentuan harga opsi, kekonvergenan

A. Pendahuluan

Opsi (*option*) adalah suatu kontrak antara *writer* dan *holder* yang memberikan hak, bukan kewajiban, kepada *holder* untuk membeli atau menjual suatu aset pokok (*underlying asset*) pada atau sebelum suatu tanggal tertentu untuk suatu harga tertentu. Tanggal tertentu tersebut dikenal sebagai waktu jatuh tempo (*expiration date*) dan harga tertentu dinamakan *exercise price* atau *strike price*. Suatu opsi *call* (*put*) membolehkan *holder* untuk membeli (*menjual*) aset pokok dengan *strike price K*. *Holder* dapat meng-*exercise* (merealisasi hak) opsi tipe Eropa (*European-style option*) hanya pada saat jatuh tempo *T*, sedangkan opsi-opsi tipe Amerika (*American-style option*) dapat di-*exercise* pada sembarang waktu sebelum jatuh tempo.

Model untuk penghitungan harga opsi diperkenalkan pertama kali oleh *Black and Scholes* (1973) dan *Merton* (1973). Mereka mengamati tingkah laku lognormal dari harga aset dan menurunkan suatu persamaan diferensial parsial (disingkat PDP) yang menggambarkan harga opsi. Untuk opsi Eropa, mereka telah menurunkan suatu penyelesaian bentuk tertutup dari PDP yang dikenal dengan rumus *Black-Scholes*.

Pada tahun 1979 *Cox, Ross and Rubinstein* (*Cox, J. C., Ross S. and Rubinstein M., "Option Pricing: A simplified Approach", The Journal of Financial Economics*, 7, 229-263, 1979.) menyajikan suatu pendekatan sederhana untuk penghitungan harga opsi, yaitu suatu rumus harga opsi waktu diskrit. Dijelaskan tentang kenyataan bahwa rumus *Black-Scholes* merupakan suatu kasus limit khusus dari model *Cox-Ross-Rubinstein* (CRR) binomial diskrit. Dengan kata lain, model binomial menyediakan hampiran diskrit untuk proses harga kontinu di bawah model *Black-Scholes*. Hasil-hasil mereka hanya diturunkan untuk kasus khusus dimana faktor kenaikan dan penurunan diberikan oleh rumus tertentu dan membolehkan distribusi dari *return* saham mempunyai parameter-parameter yang sama seperti distribusi log normal dalam limit.

Terdapat beberapa perluasan dari model *Cox, Ross and Rubinstein* (1979), yaitu model dari *Jarrow-Rudd* (1983) dan model dari *Tian* (1993). Mereka membuat beberapa modifikasi untuk model binomial yang dihasilkan oleh CRR dengan menambahkan beberapa parameter seperti suku *drift* lokal (*local drift term*).

B. PDP Black-Scholes

Misalkan *V* menyatakan harga opsi *put* atau harga opsi *call* pada saat *t* apabila harga sahamnya adalah S_t. Diasumsikan bahwa *V* tergantung secara diferensial pada dua variabel bebas *S* dan *t*, dimana *S* bergerak secara acak sesuai dengan persamaan:

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)}$$

Berdasarkan Lemma *Ito*, *V* berubah atas interval waktu *dt* yang sangat kecil, akan diperoleh

$$dV = \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right]dt + \sigma S\frac{\partial V}{\partial S}\partial W(t) \qquad (1)$$

Selanjutnya dibentuk portfolio yang mereplikasi opsi dengan pengertian bahwa portfolio tersebut memiliki resiko sama besar dengan resiko pada opsinya. Nilai dari Portfolio suatu opsi seharga *V(S,t)* dan *A* saham adalah sebagai berikut:

$$\pi = V(S,t) + AS \qquad (2)$$

Dalam interval waktu *dt*, keuntungan (*gain*, dalam harga) dari portfolio:

$$d\pi = dV(S,t) + AdS \qquad (3)$$

yaitu

$$d\pi = \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right]dt + \sigma S\frac{\partial V}{\partial S}\partial W(t) + A[\mu S\,dt + \sigma S\,dW(t)]$$

Agar portfolio tidak beresiko maka haruslah

$$d\pi = r\,\pi\,dt = r\left(V - \frac{\partial V}{\partial S}S\right)dt$$

sehingga diperoleh

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt + r\,S\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \qquad (4)$$

Persamaan (4) ini dikenal sebagai persamaan diferensial parsial *Black-Scholes* untuk harga suatu opsi Eropa.

Persamaan diferensial parsial *Black-Scholes* dapat diselesaikan secara analitik untuk opsi standar Eropa seperti opsi *call* Eropa dan opsi *put* Eropa. Rumus *Black-Scholes* untuk harga opsi *call* Eropa pada saat *t* dengan *strike price K* dan *exercise date T* serta tanpa *dividend*, yaitu:

$$C_E(t,S_t)=S_t\,N(d_1)-K\exp\left(-\int_t^T r(s)\,ds\right)N(d_2)$$

$$C_E(t,S_t)=S_t\,N(d_1)-K\exp[-r(T-t)]N(d_2) \quad (5)$$

Rumus *Black-Scholes* untuk harga opsi *put* Eropa pada saat *t* dengan *strike price K* dan *exercise date T* serta *tanpa dividend*, yaitu:

$$P_E(t,S_t)=K\exp\left(-\int_t^T r(s)\,ds\right)N(-d_2)-S_t\,N(-d_1)$$

$$P_E(t,S_t)=K\exp[-r(T-t)]N(-d_2)-S_t\,N(-d_1) \quad (6)$$

untuk $S(t)>0,\quad T>0$, dengan

$$d_1=\frac{[\ln(S_t)-\ln(K)]+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (7)$$

$$d_2=\frac{[\ln(S_t)-\ln(K)]+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (8)$$

$$d_2=d_1-\sigma\sqrt{T-t} \quad (9)$$

dan

$$N(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (10)$$

yang menyatakan fungsi distribusi normal kumulatif dengan *mean* 0 dan *variansi* 1.

C. Metode Binomial

C.1. Model Binomial satu Periode

Model ini merupakan model pasar saham (*trading*) dengan satu periode (*one time step*) dengan kata lain pada model ini hanya terdapat dua waktu *trading* yaitu pada saat $t=0$ dan $t=1$. Seperti telah dibahas sebelumnya, maka pada akhir periode yaitu pada saat $t=1$ pergerakan harga saham hanya ada dua kemungkinan yaitu harga saham naik sebesar *u* dengan peluang sebesar *p* atau harga saham turun sebesar *d* dengan peluang sebesar (1 – *p*). Misalkan S_0 menyatakan harga saham pada saat $t=0$, maka pada akhir periode S_0 dapat berubah menjadi $S_1(\omega_1)$ atau $S_2(\omega_2)$. Selanjutnya pada pasar dengan model binomial satu periode ini tersusun dari dua asset yaitu aset beresiko yaitu saham dan aset bebas resiko yaitu tabungan dalam bentuk deposito di bank. B_t menyatakan jumlah tabungan dalam bentuk deposito di bank pada saat t dan S_t menyatakan harga saham pada saat t.

Pada model ini proses pergerakan tabungan berlangsung secara deterministik, dan dapat dinyatakan sebagai berikut

$$B_t = (1+r)^t \tag{11}$$

sedemikian hingga

$$B_0 = 1$$
$$B_1 = 1 + r$$

dimana r adalah *risk-less (risk-free) interest rate*. Selain itu perlu diketahui bahwa pada pasar uang berlaku suku bunga deposito bank per periode sebesar r dan diasumsikan akan berlaku hubungan berikut:

$$d < 1 + r < u \tag{12}$$

persamaan (12) dapat dinyatakan pula dengan:

$$d < e^r < u \tag{13}$$

Sedangkan proses pergerakan harga saham merupakan proses stokastik, dan dapat dinyatakan sebagai berikut

$$S_1(\omega) = \begin{cases} S_1(\omega_1) = S_0\, u & \textit{peluang} \;\; p \\ S_1(\omega_2) = S_0\, d & \textit{peluang} \;\; q = (1-p) \end{cases} \tag{14}$$

Replikasi Portfolio

Misalkan $\Theta = (\theta_0, B_0)$ adalah *self-financing portfolio, r* adalah *risk less interest rate*, C menyatakan harga opsi dari opsi *call* Eropa, C_u menyatakan *payoff* apabila harga saham naik, dan C_d menyatakan *payoff* apabila harga saham turun. Apabila $S_u = S_0 u$ dan $S_d = S_0 d$ maka *payoff* dari opsi *call* Eropa pada saat $t = 1$ sebagai berikut

$$C_u = \max\{S_u - K, 0\} \tag{15}$$

$$C_d = \max\{S_d - K, 0\} \tag{16}$$

Replikasi portfolio tersebut akan dibentuk dengan cara sebagai berikut. Misalkan *writer* menjual opsi *call* di awal periode 1 seharga V_0. Agar *writer* mempunyai dana yang cukup untuk menutup kewajiban membayar dana sebesar C_u dan C_d maka sejak awal periode 1 *writer* akan membuat suatu portfolio keuangan yang terdiri dari saham sebanyak θ_0 lembar. Kepemilikan saham tersebut diambil dari penjualan opsi *call* seharga V_0. Apabila besar V_0 tidak mencukupi bagi *writer* opsi *call* untuk membeli θ_0 lembar saham maka *writer* mempunyai pinjaman dengan bunga *r* per periode untuk mencukupinya. Sebaliknya apabila ada kelebihan dana maka sisanya ditabung dengan suku bunga *r* per periode. Nilai portfolio pada awal periode 1 adalah $V_0 = C_0$ yang berupa $\theta_0 S_0$ dalam bentuk saham dan $B_0 = (V_0 - \theta_0 S_0)$ dalam bentuk tabungan atau pinjaman.

$$C_0 = \theta_0 S_0 + (V_0 - \theta_0 S_0) \tag{17}$$

$$C_0 = V_0 \tag{18}$$

Pada akhir periode 1, nilai portfolio akan menjadi V_1 yang terdiri dari $\theta_0 S_0$ dalam bentuk saham dan yang dalam bentuk tabungan atau pinjaman akan bertambah menjadi $e^r\ (V_0 - \theta_0 S_0) = e^r\ B_0$. Nilai portfolio pada akhir periode 1 dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$V_1(\Theta) = C_1 \tag{19}$$

$$V_1(\Theta) = \begin{cases} \theta_0 S_u + e^r\ (V_0 - \theta_0 S_0) = C_u \\ \theta_0 S_d + e^r\ (V_0 - \theta_0 S_0) = C_d \end{cases} \tag{20}$$

atau persamaan (20) dapat dituliskan dalam bentuk:

$$V_1(\Theta) = \begin{cases} \theta_0 S_u + e^r\ B_0 = C_u \\ \theta_0 S_d + e^r\ B_0 = C_d \end{cases} \tag{21}$$

Dengan menyelesaikan (21) maka diperoleh

$$\theta_0 = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d} \tag{22}$$

$$B_0 = \frac{1}{e^r}\left[\frac{C_d S_u - C_u S_d}{S_u - S_d}\right] \tag{23}$$

dimana θ_0 menyatakan banyaknya saham dan B_0 menyatakan besarnya tabungan atau pinjaman.

Berdasarkan *law of one price* "jika dua aset mempunyai nilai akhir yang sama maka dua aset tersebut mempunyai dua nilai awal yang sama, apabila hal tersebut tidak terjadi maka prinsip *no-arbitrage* tidak berlaku", sehingga

$$C_0 = V_0(\Theta)$$

$$= \theta_0 S_0 + B_0$$

$$= \left[\frac{C_u - C_d}{S_u - S_d} \right] S_0 + \frac{1}{e^r} \left[\frac{C_d S_u - C_u S_d}{S_u - S_d} \right]$$

$$C_0 = \frac{1}{e^r} \left[\frac{e^r - d}{u - d} \right] C_u + \frac{1}{e^r} \left[\frac{u - e^r}{u - d} \right] \tag{24}$$

Risk-neutral probability

Berdasarkan hasil yang diperoleh pada persamaan (3.47) diketahui bahwa penjumlahan dari koefisien C_u dengan koefisien C_d sama dengan 1, sehingga koefisien C_u dengan koefisien C_d dapat diinterpretasikan sebagai peluang. Oleh karena itu, persamaan (24) dapat disederhanakan menjadi

$$C_0 = \frac{1}{e^r} \left[\tilde{p} C_u + \tilde{q} C_d \right] \tag{25}$$

$$C_0 = \frac{1}{e^r} \tilde{E}\left[C_1 \right] \tag{26}$$

dimana $\tilde{p} = \left[\frac{e^r - d}{u - d} \right]$ dan $\tilde{q} = \left[\frac{u - e^r}{u - d} \right]$ $\tilde{P} = (\tilde{p}, \tilde{q})$ merupakan ukuran probabilitas baru yang disebut sebagai probabilitas *risk-neutral* (*risk-neutral probability*).

C.2. Model Binomial *n* Periode

Untuk penentukan perumusan harga opsi *call* Eropa model binomial *n* periode dilakukan dengan analog dengan pembahasan sebelumnya dan dengan menggunakan metode *backward induction* maka diperoleh:

$$C = \frac{1}{e^{nr}} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \tilde{p}^j \, \tilde{q}^{n-j} \max\left\{ u^j \, d^{n-j} \, S_0 - K, 0 \right\} \tag{27}$$

dimana variabel acak *j* pada persamaan (27) menyatakan jumlah kenaikan harga saham dari *n Bernoulli experiment* dengan peluang terjadinya kenaikan harga saham adalah $\tilde{p}$ dan peluang terjadinya penurunan harga saham adalah $\tilde{q} = 1 - \tilde{p}$.

Harga opsi *call* Eropa pada persamaan (27) dapat diuraikan menjadi dua buah penjumlahan sebagai berikut:

$$C = \frac{1}{e^{nr}} \left[\begin{array}{l} \sum_{j=0}^{a-1} \binom{n}{j} \tilde{p}^{j} \, \tilde{q}^{n-j} \max\{u^{j} \, d^{n-j} \, S_0 - K, 0\} + \\ \sum_{j=a}^{n} \binom{n}{j} \tilde{p}^{j} \, \tilde{q}^{n-j} \max\{u^{j} \, d^{n-j} \, S_0 - K, 0\} \end{array} \right] \quad (28)$$

dengan a menyatakan jumlah minimal kenaikan harga saham yang akan menghasilkan

$$S_0 \, u^{a} \, d^{n-a} > K \quad (29)$$

sehingga

$$\sum_{j=a}^{n} \binom{n}{j} \tilde{p}^{j} \, \tilde{q}^{n-j} \quad (30)$$

dapat ditafsirkan sebagai peluang opsi *call* Eropa akan berakhir *in-the-money* di dalam *risk-neutral world* sehingga sehingga porsi dari opsi *call* Eropa yang akan berakhir *out-of-the-money* memberikan hasil

$$\sum_{j=0}^{a-1} \binom{n}{j} \tilde{p}^{j} \, \tilde{q}^{n-j} \max\{u^{j} \, d^{n-j} \, S_0 - K, 0\} = 0 \quad (31)$$

Oleh karena itu persamaan (28) akan menjadi

$$C_0 = S_0 \sum_{j=a}^{n} \binom{n}{j} (p^{*})^{j} \, (q^{*})^{n-j} - \frac{K}{e^{nr}} \sum_{j=a}^{n} \binom{n}{j} \tilde{p}^{j} \, \tilde{q}^{n-j} \quad (32)$$

dengan $$p^{*} = \frac{\tilde{p} \, u}{e^{r}} \text{ dan } q^{*} = \frac{\tilde{p} \, d}{e^{r}} . \quad (33)$$

dan perumusan harga opsi *put* Eropa model binomial n periode diperoleh:

$$P_0 = \frac{K}{e^{nr}} \sum_{j=a}^{n} \binom{n}{j} \tilde{p}^{j} \, \tilde{q}^{n-j} - S_0 \sum_{j=a}^{n} \binom{n}{j} (p^{*})^{j} \, (q^{*})^{n-j} \quad (34)$$

D. Model *Cox-Ross-Rubinstein* (CRR)

Model *Cox-Ross-Rubinstein* (CRR) merupakan model pergerakan harga saham dalam konteks waktu yang merupakan variabel acak diskrit yang banyak digunakan dalam pasar saham (*trading*). Apabila pergerakan harga saham mengikuti model binomial dengan faktor kenaikan harga saham sebesar u dan faktor penurunan harga saham sebesar d pada tiap anak interval yang memenuhi

$$d < e^{r \Delta t} < u \quad (35)$$

maka harga saham pada saat jatuh tempo adalah

$$S_T = S_{t_n} = u^j\, d^{n-j}\, S_0 \tag{36}$$

Variabel acak *j* pada persamaan (34) adalah variabel acak yang menyatakan jumlah kenaikan harga saham dalam *n Bernoulli experiment* dengan peluang terjadinya kenaikan harga saham untuk tiap interval waktu Δt dalam *risk-neutral world* adalah $\tilde{p}$. Dengan kata lain variabel acak *j* berdistribusi binomial dengan parameter n dan $\tilde{p}$. *Mean* dan *variansi* dari variabel acak *j* adalah

$$E[j] = n\,\tilde{p}$$

$$Var[j] = n\ \tilde{p}\,\tilde{q}$$

Penentuan harga opsi dengan model CRR merupakan bagian dari penentuan harga opsi dengan model binomial n periode yang ditentukan dengan menggunakan *backward induction* dan berdasarkan persamaan (32) maka persamaan (35) dapat dinyatakan menjadi:

$$C_0 = S_0 \sum_{j=a}^{n} \binom{n}{j} \left(p^*\right)^j \left(q^*\right)^{n-j} - \frac{K}{e^{n\,r\,\Delta t}} \sum_{j=a}^{n} \binom{n}{j} \tilde{p}^j\, \tilde{q}^{n-j}$$

$$C_0 = S_0 \sum_{j=a}^{n} \binom{n}{j} \left(p^*\right)^j \left(q^*\right)^{n-j} - \frac{K}{e^{r\,T}} \sum_{j=a}^{n} \binom{n}{j} \tilde{p}^j\, \tilde{q}^{n-j} \tag{37}$$

dan perumusan harga opsi *put* Eropa model binomial *n* periode diperoleh:

$$P_0 = \frac{K}{e^{r\,T}} \sum_{j=a}^{n} \binom{n}{j} \tilde{p}^j\, \tilde{q}^{n-j} - S_0 \sum_{j=a}^{n} \binom{n}{j} \left(p^*\right)^j \left(q^*\right)^{n-j} \tag{38}$$

dengan

$$\tilde{p} = \left[\frac{e^{r\,\Delta t} - d}{u - d}\right] \text{ dan } \tilde{q} = \left[\frac{u - e^{r\,\Delta t}}{u - d}\right] \tag{39}$$

$$p^* = \frac{\tilde{p}\,u}{e^{\,r\,\Delta t}} \text{ dan } q^* = \frac{\tilde{p}\,d}{e^{\,r\,\Delta t}}. \tag{40}$$

atau persamaan (37) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$C_0 = S_0 \Phi\left(a; n, p^*\right) - \frac{K}{e^{r\,T}} \Phi\left(a; n, \tilde{p}\right) \tag{41}$$

dengan $\Phi(\cdot)$ menyatakan fungsi distribusi binomial.

Selanjutnya *Cox, Ross, and Rubinstein* memilih nilai *u* dan *d* sedemikian rupa sehingga

$$u = \exp(\sigma\,\Delta t) \tag{42}$$

$$d = \exp(-\sigma\Delta t) \tag{43}$$

dengan σ adalah volatilitas tahunan dari harga saham. *Cox, Ross, and Rubinstein* memilih nilai *u* dan *d* seperti pada persamaan (42) dan persamaan (43) adalah dengan maksud bahwa pada saat $n \to \infty$ $(\Delta t \to 0)$ maka harga opsi *call* Eropa pada persamaan (37) dari model binomial CRR ini dapat dibuktikan menjadi rumus *Black-Scholes* untuk harga opsi *call* Eropa. Dengan kata lain penentuan harga opsi *call* Eropa model binomial CRR merupakan aproksimasi dari penentuan harga opsi *call* Eropa *Black-Scholes* pada saat $n \to \infty$. Pembuktian bahwa perumusan harga opsi *call* Eropa model binomial CRR ini dapat dibuktikan menjadi rumus *Black-Scholes* untuk harga opsi *call* Eropa dapat dilihat pada lampiran B. Sedangkan pembuktian untuk memperoleh perumusan *u* dan *d* pada model CRR dapat dilihat pada lampiran C.

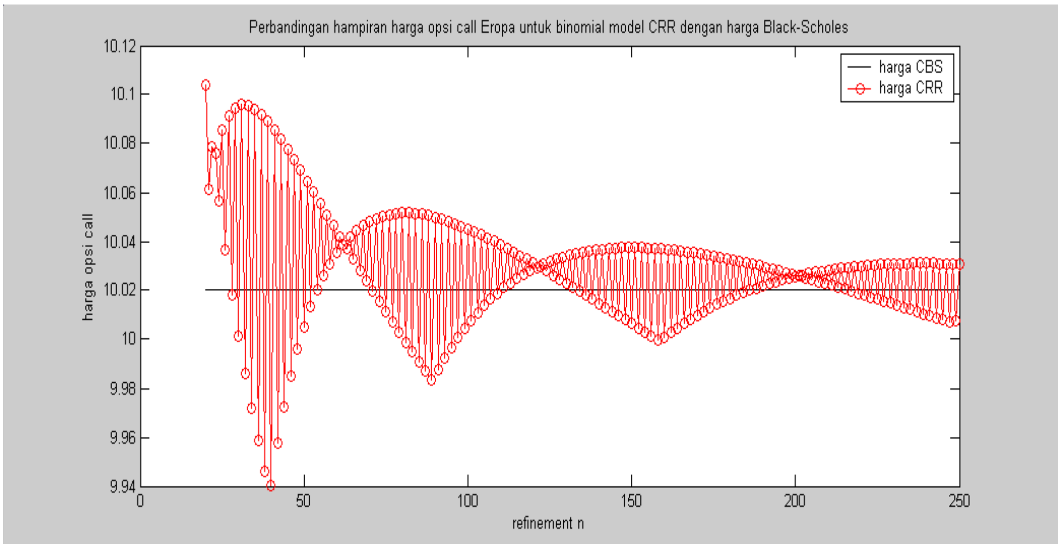
E. Kekonvergenan Harga Opsi Model Binomial

Pada metode binomial, struktur dari pergerakan harga saham dapat digambarkan dalam bentuk pohon yang dikenal sebagai pohon binomial. Pada pembahasan sebelumnya telah dikemukakan bahwa *return* ($\tilde{R}_i, \quad i = 1, \cdots, n$) pada suatu *n* periode dimodelkan sebagai dua buah variabel acak binomial yang iid, seperti yang ditulis pada persamaan:

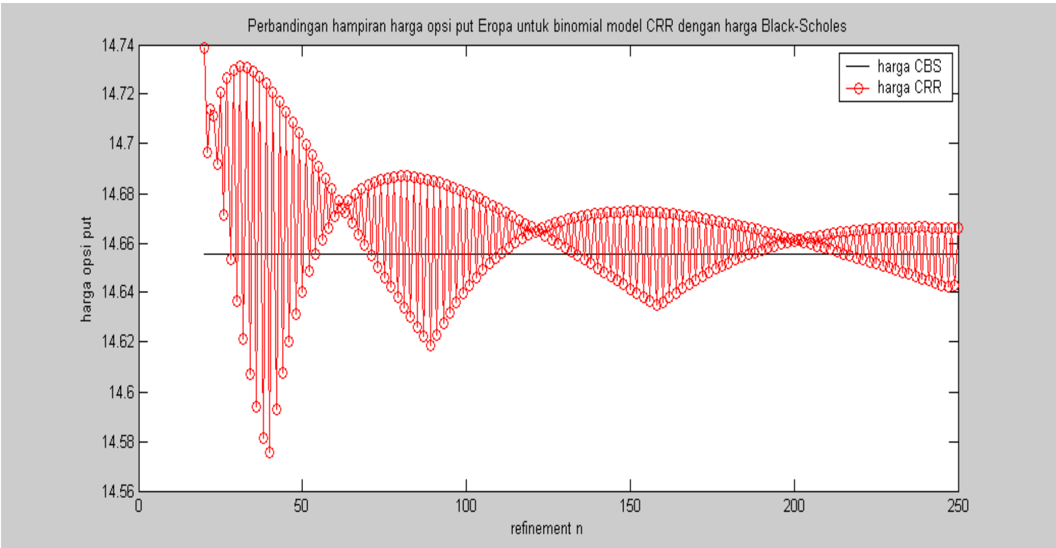
$$R_i = \begin{cases} u & dengan \;\; peluang \;\; p \\ d & dengan \;\; peluang \;\; 1-p \end{cases}$$

Selanjutnya suatu barisan hingga $\tilde{R}_i, \quad i = 1, \cdots, n$ dinamakan dengan *lattice*. Untuk setiap *n* yang berbeda, dimana nilai-nilai *r*, σ, *S0, T,* dan *K* yang diberikan akan diperoleh nilai parameter-parameter *u, d,* dan *p* yang berbeda. Hal ini mengakibatkan bahwa untuk setiap nilai *n* berbeda diperoleh barisan hingga $\tilde{R}_i, \quad i = 1, \cdots, n$ (*lattice*) yang berbeda. Selanjutnya hal ini dikenal dengan *lattice approch*. Berdasarkan penjelasan sebelumnya, diperoleh kesimpulan bahwa metode binomial merupakan suatu *lattice approach*.

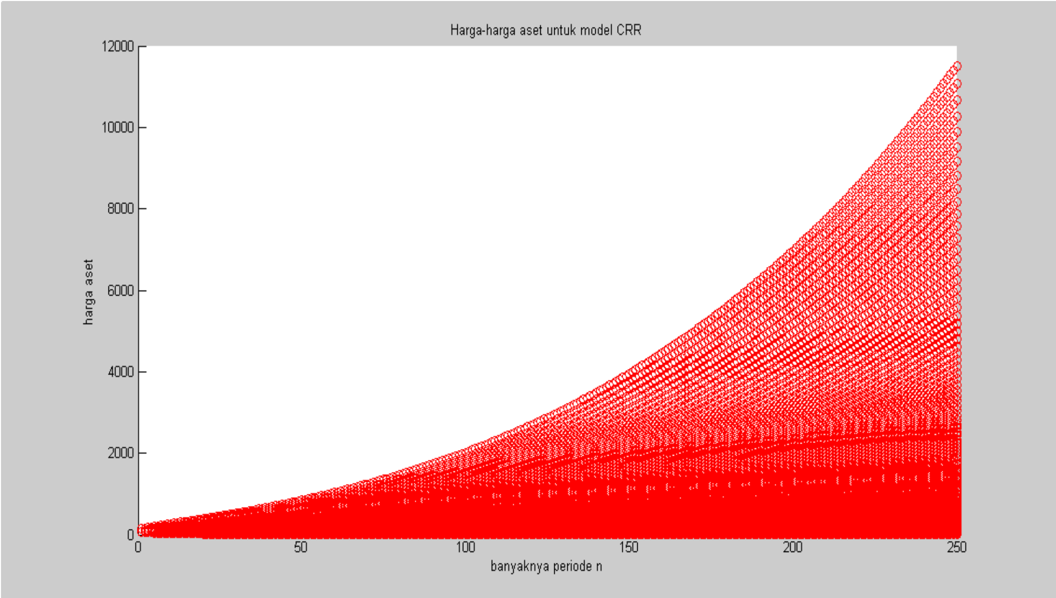
Berikut ini akan disajikan simulasi penentuan harga opsi Eropa model CRR dengan *S0* = 100, *K* = 110, *T* = 1, *r* = 0.05, σ = 0.3, untuk *n* = 100, *n* = 200, *n* = 350, dan *n* = 400. Selain menampilkan grafik dari harga opsi Eropa model CRR akan ditampilkan pula grafik pohon binomial dari model tersebut di atas dimana pohon binomial tersebut menggambarkan harga-harga saham yang mungkin.



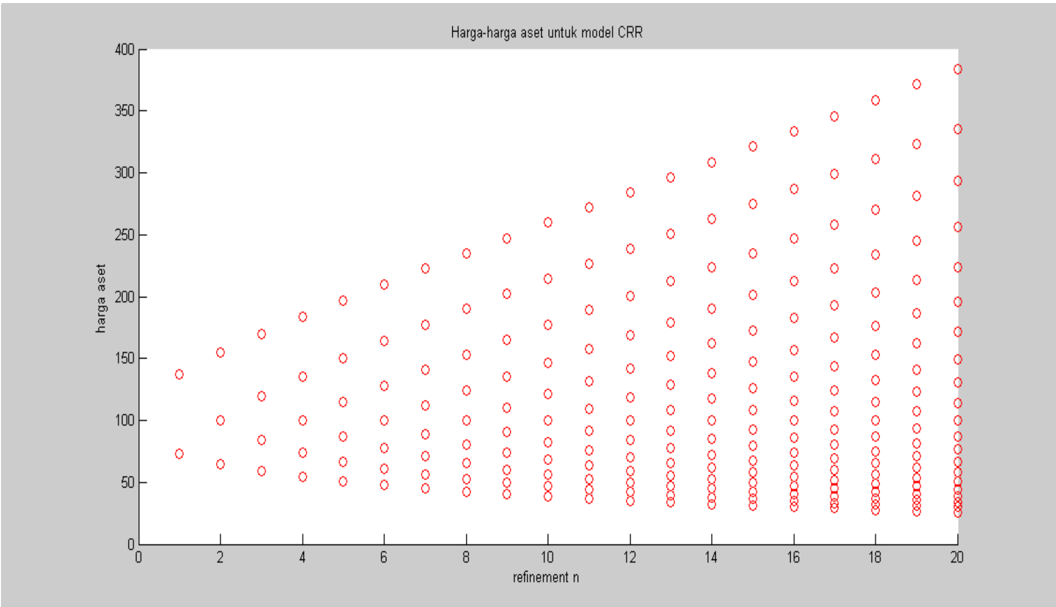
Gambar 4.1 : Harga opsi *call* Eropa model CRR dengan $S0 = 100$, $K = 110$, $T = 1$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.3$, untuk $n = 20, \ldots, 250$



Gambar 4.2 : Harga opsi *put* Eropa model CRR dengan $S0 = 100$, $K = 110$, $T = 1$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.3$, untuk $n = 20, \ldots, 250$



Gambar 4.3 : Harga-harga saham model CRR dengan $S0$ = 100, K = 110, T = 1, r = 0.05, σ = 0.3, untuk n = 1, . . ., 250



Gambar 4.4 : Harga-harga saham model CRR dengan $S0$ = 100, K = 110, T = 1, r = 0.05, σ = 0.3, untuk n = 1, . . ., 20

Daftar harga opsi Eropa model CRR dan harga opsi Eropa *Black-Scholes* untuk simulasi di atas dapat dilihat pada lampiran E. Berdasarkan gambar 4.1 dan gambar 4.2 dapat diketahui bahwa meskipun harga opsi Eropa *Black-Scholes* merupakan aproksimasi dari harga opsi Eropa model CRR pada saat n menuju tak hingga, namun ternyata kekonvergenan harga opsi Eropa tersebut tidak monoton, hal ini dapat dilihat dengan jelas dari grafik harga opsi Eropa model CRR yang bergerak naik turun. Oleh karena itu, diperoleh kesimpulan bahwa:

1. Penentuan harga opsi Eropa dengan metode binomial merupakan aproksimasi dari penentuan harga opsi *Black-Scholes* pada saat $n \to \infty$
2. Kekonvergenannya tidak monoton.

Pergerakan harga opsi Eropa yang tidak teratur, mengakibatkan kekonvergenan harga opsi tersebut tidak monoton, namun order kekonvergenan dari harga opsi Eropa tersebut dapat diketahui. Pada dasarnya harga opsi Eropa yang diperoleh dengan menggunakan metode binomial tidak akan sama dengan harga opsi Eropa *Black-Scholes*. Oleh karena itu, terdapat selisih antara harga opsi Eropa model CRR dengan harga opsi Eropa *Black-Scholes*. Selisih antara kedua harga opsi tersebut untuk selanjutnya dinyatakan sebagai *error* (galat). Nilai *error* (galat) dari kedua harga opsi tersebut didefinisikan sebagai berikut:

$$e_n = \left| c(t_0, S_0) - c_n(t_0, S_0) \right| \tag{44}$$

dengan mengaplikasikan teorema limit pusat pada persamaan (44) diperoleh bahwa

$$\lim_{n \to \infty} e_n = 0 \tag{45}$$

Hal ini mempunyai arti bahwa harga opsi yang ditentukan dengan menggunakan metode binomial akan konvergen menuju harga opsi yang ditentukan dengan menggunakan rumus *Black-Scholes*.

Pada dasarnya adalah merupakan sesuatu hal yang mungkin untuk menentukan pada order berapa kekonvergenan harga opsi itu diperoleh. Hal tersebut dapat dilakukan menentukan batas atas yang tepat untuk persamaan (44). Oleh karena itu untuk menjelaskan order kekonvergenan (*order of convergence)* diperlukan definisi berikut bawah ini.

Definis .1

Misalkan $f : x \to \max\{x - K, 0\}$ adalah suatu fungsi dari opsi *call* Eropa. Suatu barisan *lattice* dikatakan *converges with order* $\rho > 0$ apabila ada konstanta $\kappa > 0$ sedemikian hingga

$$e_n \le \frac{\kappa}{n^{\rho}}, \quad \forall\, n \in N \tag{46}$$

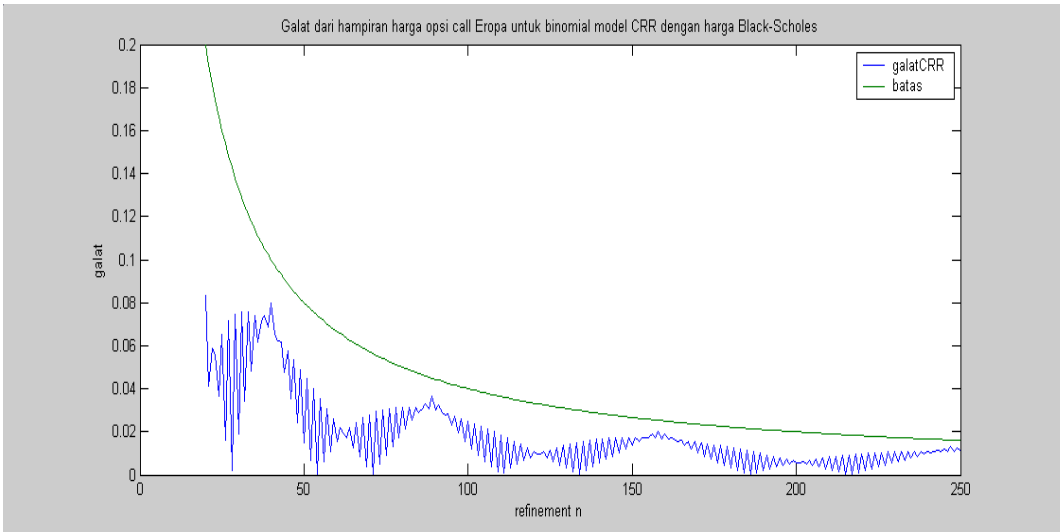
Selanjutnya dengan mengaplikasikan logaritma pada persamaan (46), akan diperoleh

$$\log(e_n) \le \log\left(\frac{\kappa}{n^{\rho}}\right)$$
$$\log(e_n) \le \log\kappa - \rho\log n$$

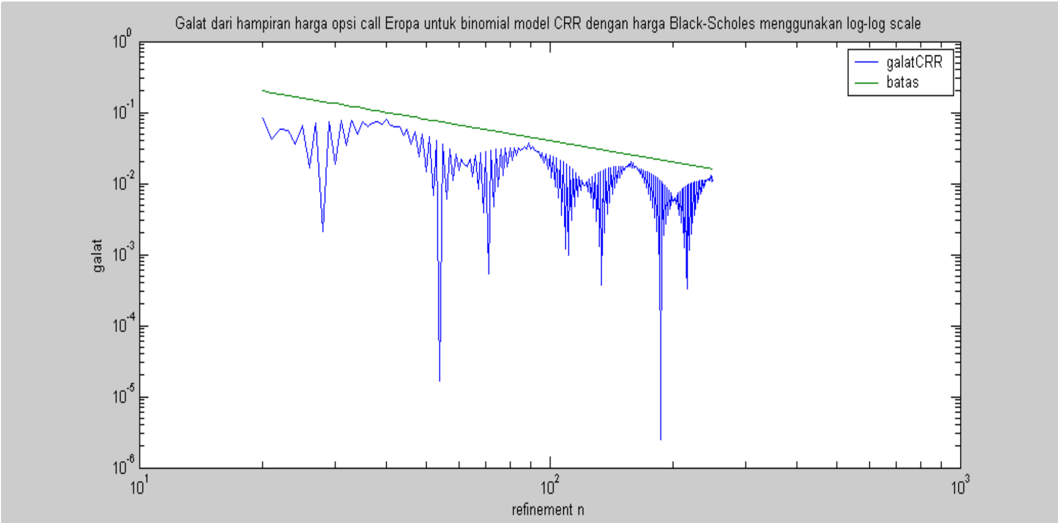
dimana hal ini menunjukkan bahwa logaritma *error* (galat) sebagai fungsi dari log n akan terletak di bawah suatu garis dengan kemiringan (*slope*) $-\rho$.

Suatu *lattice approach* dikatakan *converges with order* $\rho > 0$ jika untuk setiap nilai r, σ, $S0$, T, dan K yang diberikan diperoleh barisan *lattice* yang *converges with order* $\rho > 0$ dan dinotasikan dengan $e_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\rho}}\right)$.

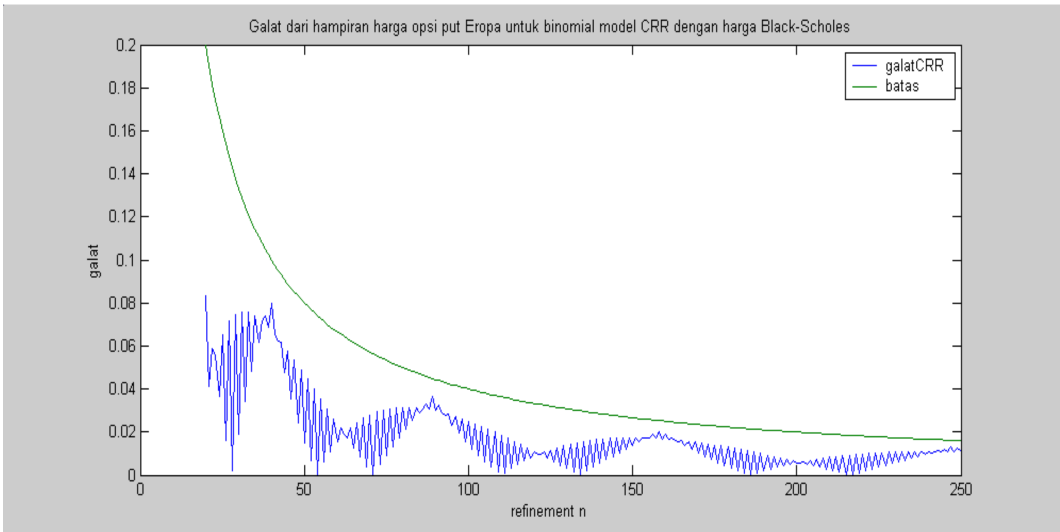
Perlu diketahui bahwa order kekonvergenan yang lebih dari nol mengakibatkan harga opsi menjadi konvergen. Semakin besar order kekonvergenan maka akan semakin cepat harga opsi tersebut konvergen. Oleh karena itu, order kekonvergenan tidaklah tunggal atau dengan kata lain suatu *lattice approach* yang *converges with order* $\rho > 0$ dapat mempunyai order kekonvergenan yang lain yaitu $\tilde{\rho}$ dimana $\tilde{\rho} \le \rho$. Order kekonvergenan akan lebih mudah dipahami melalui simulasi, karena pada simulasi itu akan diperoleh hasil plot dari nilai *error* (galat) terhadap n refinement dalam skala logaritma. Berikut ini akan disajikan simulasi *error* (galat) dari opsi Eropa model CRR dengan $S0$ = 100, K = 110, T = 1, r = 0.05, σ = 0.3, untuk n = 20, . . ., 250



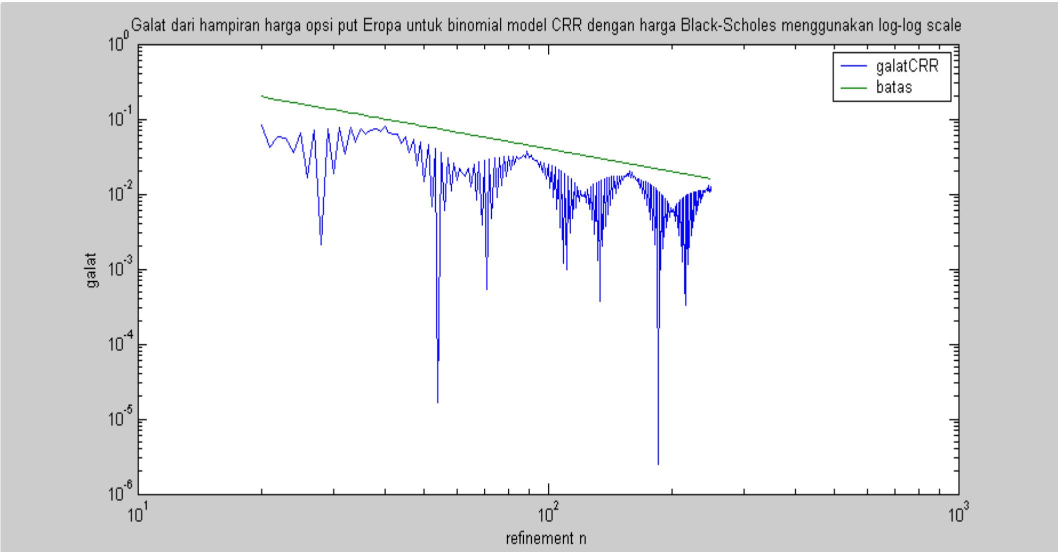
Gambar 4.5 : *Error* (galat) dari opsi *call* Eropa model CRR dengan *S0* = 100, *K* = 110, *T* = 1, *r* = 0.05, σ = 0.3, untuk *n* = 20, . . ., 250 dengan nilai kappa = 4



Gambar 4.6 : *Error* (galat) dari opsi *call* Eropa model CRR dengan *S0* = 100, *K* = 110, *T* = 1, *r* = 0.05, σ = 0.3, untuk *n* = 20, . . ., 250 dengan nilai kappa = 4 serta menggunakan *log-log scale*.

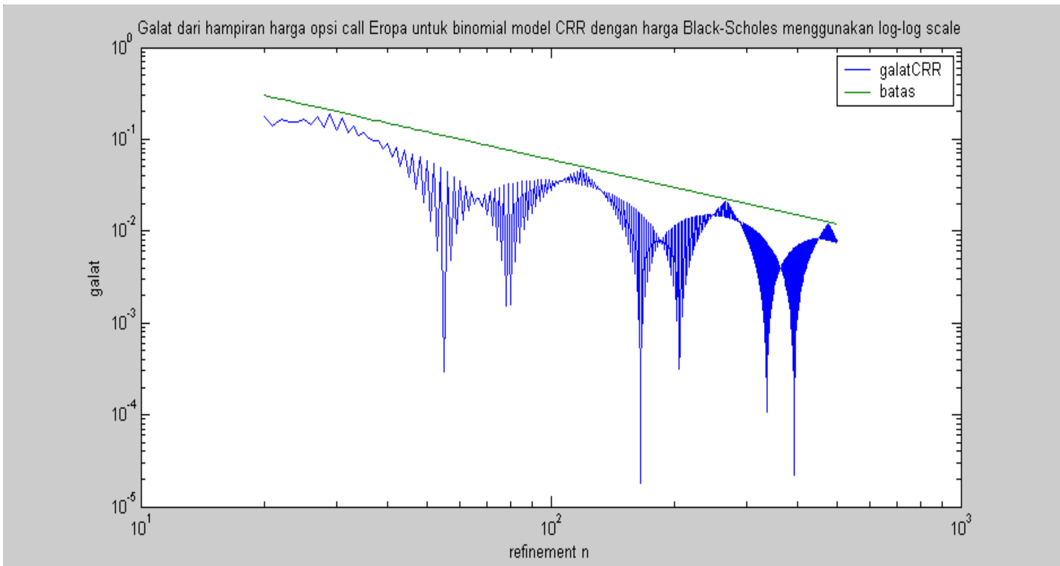


Gambar 4.7 : *Error* (galat) dari opsi *put* Eropa model CRR dengan $S0$ = 100, K = 110, T = 1, r = 0.05, σ = 0.3, untuk n = 20, . . ., 250 dengan nilai kappa = 4

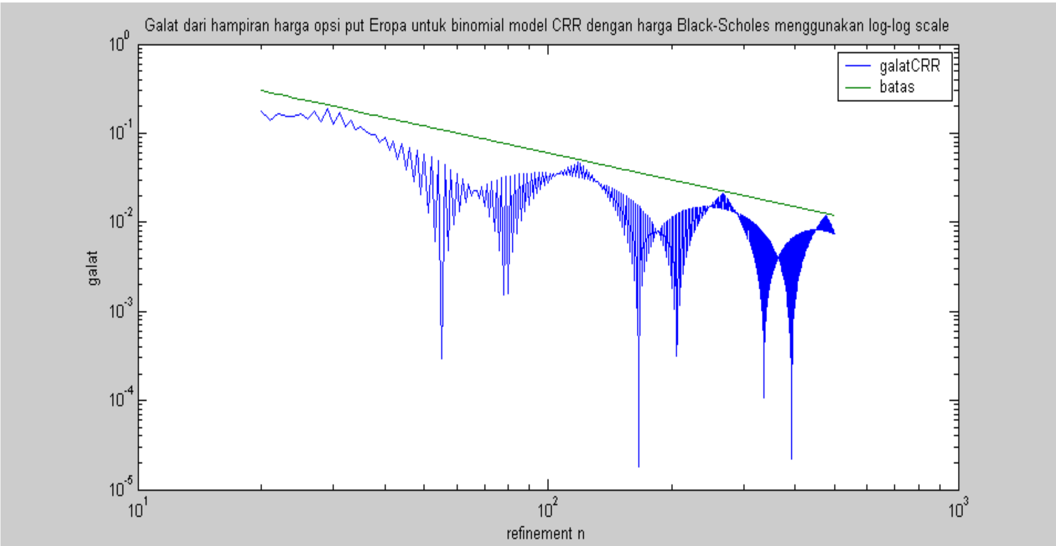


Gambar 4.8 : *Error* (galat) dari opsi *put* Eropa model CRR dengan $S0$ = 100, K = 110, T = 1, r = 0.05, σ = 0.3, untuk n = 20, . . ., 250 dengan nilai kappa = 4 serta menggunakan *log-log scale*.

Pada simulasi tersebut dapat dilihat bahwa harga opsi *call* Eropa model CRR dengan nilai-nilai parameter tersebut di atas itu konvergen dengan order 1. Hal lain yang perlu diketahui bahwa nilai dari κ selalu berubah-ubah berdasarkan dari nilai-nilai r, σ, $S0$, T, dan K yang diberikan. Untuk memperoleh nilai κ yang sesuai dengan nilai-nilai r, σ, $S0$, T, dan K yang diberikan dilakukan dengan cara mencoba untuk setiap nilai κ yang mungkin memenuhi. Pada simulasi *error* (galat) dari opsi Eropa model CRR dengan $S0$ = 100, K = 110, T = 1, r = 0.05, σ = 0.3, untuk n = 20, . . ., 250 diperoleh nilai κ yang memenuhi adalah 4. Sedangkan pada simulasi *error* (galat) dari opsi Eropa model CRR dengan $S0$ = 100, K = 110, T = 3, r = 0.06, σ = 0.3, untuk n = 20, . . ., 500 diperoleh nilai κ yang memenuhi adalah 6



Gambar 4.9 : *Error* (galat) dari opsi *call* Eropa model CRR dengan $S0$ = 100, K = 110, T = 3, r = 0.06, σ = 0.3, untuk n = 20, . . ., 500 dengan nilai kappa = 6 serta menggunakan *log-log scale*.



Gambar 4.10 : *Error* (galat) dari opsi *put* Eropa model CRR dengan $S0$ = 100, K = 110, T = 3, r = 0.06, σ = 0.3, untuk n = 20, . . ., 500 dengan nilai kappa = 6 serta menggunakan *log-log scale*.

DAFTAR PUSTAKA

Abramowitz, M., Stegun, I. (1968), *Handbook of Mathematical Function*, Dover Printing

Bony P J M. (2008), *Penentuan Harga Opsi-opsi Compound dengan Menggunakan Metode Martingales dan Metode Binomial*. Tesis Program Magister, Institut Teknologi Bandung.

Cox, J., Ross, S.A., Rubinstein M. (1979), *Option Pricing: A Simplified Approach, Journal of Financial Economics* 7, 229-263

Fitriani A (2009), *Kekonvergenan Model Binomial Leisen Reimer dalam Penentuan Harga Opsi Eropa*. Tesis Program Magister, Institut Teknologi Bandung.

Harrison, J., Pliska S. (1981), *Martingales and Stochastic Integrals in The Theory of Continuous Trading, Stochastic Processes and Their Applications.*

Higham, D.J. (2004), *An Introduction to Financial Option Valuation*, Cambridge University Press, Cambridge, 106-107.

Kijima, M. (2003). *Stochastic Processes with Applications to Finance*. Chapman & Hall/CRC, 61-62, 84-87, 225-227.

Kwok, Y.K. (1998), *Mathematical Models of Financial Derivatives*, Springer-Verlag, Singapura, 39 dan 282-292.

Leisen, Dietmar., Matthias Reimer. (1996), *Binomial models for option valuation-examining and improving convergence, Applied Mathematical Finance*, 3, 319-346.

Odegbile, O.O. (2005), *Binomial Option Pricing Model*, African Institute for Mathematical Sciences, 3.

Øksendal, B. (2003), *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*, Edisi enam, Springer-Verlag, Berlin, 43-49.

Peizer, D.B., Pratt J.W. (1968), *A Normal Approximation for Binomial, F, Beta, and Other Common Related Tail Probabilities I, The Journal of the American Statistical Association*, Vol 63, 1416-1456.

Pratt J.W. (1968), *A Normal Approximation for Binomial, F, Beta, and Other Common Related Tail Probabilities II, The Journal of the American Statistical Association*, Vol 63, 1457-1483.

Seydel, R. (2002), *Tools for Computational Finance,* Springer-Verlag, Berlin, 141-156.

Shreve, S.E. (2004), *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*, Springer Science+Business Media, Inc., 212-214 dan 228-230.