KERNEL WAVELET

Oleh :
Fitriani Agustina
Jurusan Pendidikan Matematika FPMIPA UPI-Bandung

ABSTRAK

Kernel wavelet adalah suatu fungsi yang didefinisikan oleh Mayer (1990) sebagai $E_j(u,v) = \sum_{k\in Z} \phi_{j,k}(u)\phi_{j,k}(v)$ dengan $\phi_{j,k}(u) = 2^{j/2}\phi(2^j u - k)$, $\phi_{j,k}(v) = 2^{j/2}\phi(2^j v - k)$ adalah fungsi-fungsi yang diperoleh dengan cara melakukan dilasi 2^j dan translasi $k/2^j$ terhadap sebuah fungsi tunggal ϕ yang disebut fungsi skala (father wavelet). Kernel wavelet dapat juga dinyatakan dalam bentuk $E_j(u,v) = 2^j \sum_{k\in Z} \phi(2^j u - k)\phi(2^j v - k)$.

Seperti halnya fungsi-fungsi kernel, kernel wavelet juga dapat digunakan untuk estimasi statistik nonparametrik, misalnya estimasi fungsi densitas, estimasi fungsi regresi, estimasi fungsi hazard.

Kata kunci : kernel wavelet

1. Pendahuluan

Dalam makalah ini akan diperkenalkan suatu fungsi yang didefinisikan oleh Mayer (1990) yang dikenal dengan sebutan *kernel wavelet*. Untuk lebih memahami tentang pengertian kernel wavelet beserta sifat-sifatnya, penulis mencoba menguraikan terlebih dahulu secara singkat tentang beberapa pengertian dan teori-teori yang ada kaitannya dengan kernel wavelet, seperti : pengetian dan macam-macam fungsi kernel; kernel smoothing; teori wavelet yang meliputi : wavelet ortogonal, analisis multiresolusi (AMR); dan diakhiri dengan memperlihatkan beberapa hasil simulasi komputer untuk fungsi-fungsi kernel.

Seperti halnya fungsi-fungsi kernel, kernel wavelet juga dapat digunakan dalam estimasi fungsi statistika nonparametrik, misalnya untuk estimasi fungsi densitas (lihat Ogden (1997)); estimasi fungsi regresi (lihat Antoniadis (1997)); dan estimasi fungsi hazard dalam analisis data uji hidup (lihat Martadiputra (1999)).

2. Fungsi-Fungsi Kernel

Definisi 2.1

Fungsi kernel $K : R \to R$ adalah fungsi yang simetik terhadap titik pusat O dan mempunyai sifat :

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = 1 \qquad \text{... (2.1)}$$

Dari definisi di atas, jika K adalah fungsi nonnegatif maka K dapat juga diartikan sebagai suatu fungsi padat peluang (fungsi densitas).

Fungsi-fungsi kernel K(.) mempunyai support hingga, yaitu [-1,1] dan memenuhi syarat-syarat berikut :

(1) $\int_{-1}^{1} K(u)\,du = 1$, (2) $\int_{-1}^{1} uK(u)\,du = 0$, (3) $\int_{-1}^{1} u^2K(u)du = \alpha \neq 0$, (4) $\int_{-1}^{1} K^2(u)\,du < \infty$

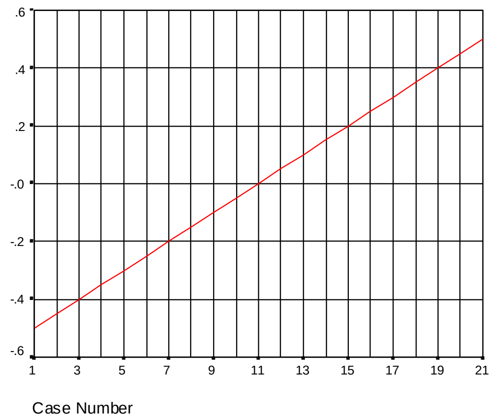
(dalam Eubank (1988) , h.111) ... (2.2)

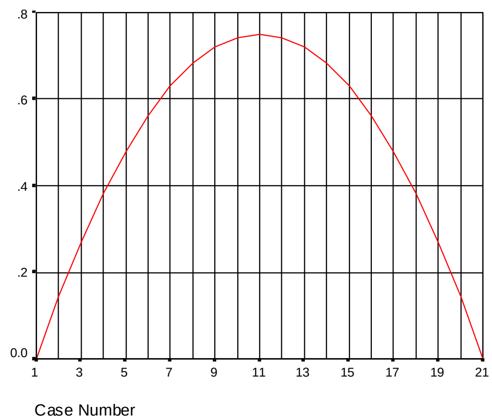
Berikut adalah beberapa macam fungsi kernel yang telah dikenal dan sering digunakan estimasi statistika nonparametrik.

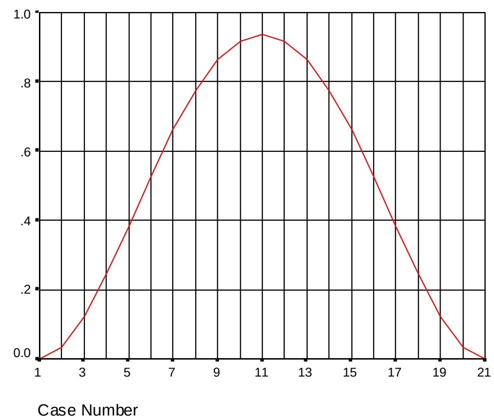
1. Uniform : $K(u) = (1/2)\, I(|u| \leq 1)$
2. Triangle : $K(u) = (1 - |u|)\, I(|u| \leq 1)$
3. Epanechnikov : $K(u) = (3/4)(1 - u^2)\, I(|u| \leq 1)$
4. Quartic : $K(u) = (15/16)\,(1 - u^2)^2\, I(|u| \leq 1)$ ... (2.3)
5. Triweigh : $K(u) = (35/32)\,(1 - u^2)^3\, I(|u| \leq 1)$
6. Gaussian : $K(u) = (1/\sqrt{2\pi})\, \exp(-(1/2)\, u^2)$
7. Cosinus : $K(u) = (\pi/4)\cos(\pi u/2)\, I(|u| \leq 1)$

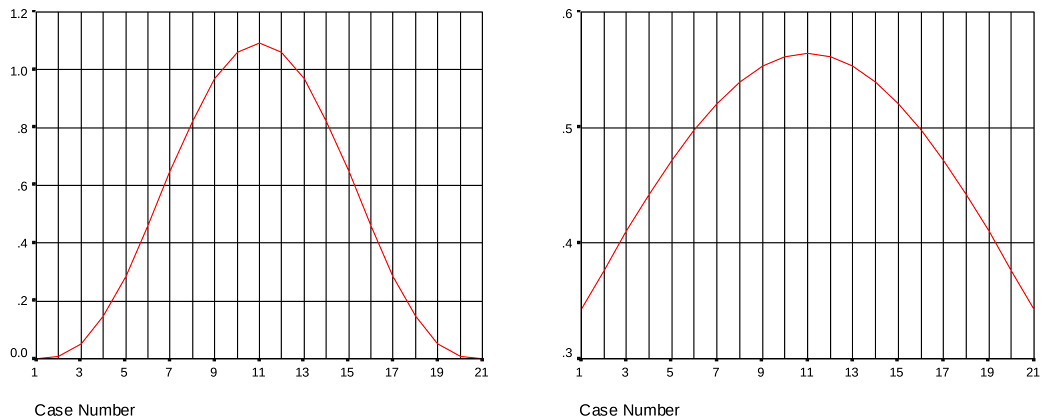
(dalam Hardle(1991), h.45)

Hasil simulasi fungsi kernel dengan menggunakan program SPSS dapat dilihat pada gambar berikut.









Dalam estimasi statistik nonparametrik menggunakan kernel K(.), biasa digunakan estimator-estimator kernel dengan pembobotan yaitu

$$K_b(x) = (1/b)K(x/b) \qquad \text{... (2.4)}$$

dengan b adalah parameter smoothing yang mengatur tingkat kemulusan untuk kernel smoothers yang disebut *bandwidth* b. Jika fungsi kernel K(u) mempunyai support [-1,1] maka fungsi K(u/b) mempunyai support [-b,b].

3. Teori Wavelet

Ogden (1997) mendefinisikan sebuah *wavelet* sebagai suatu *fungsi gelombang yang disederhanakan dan dikonstruksi dengan hati-hati sehingga memiliki sifat-sifat matematika yang dapat dipercaya*. Ide dari pengkontruksian wavelet adalah bagaimana memilih suatu fungsi tunggal ψ (yang disebut wavelet) kemudian dibentuk keluarga fungsi $\{\psi_{j,k}\}$ yang diperoleh dengan cara mendelasi dan mentranslasi ψ sehingga akan diperoleh basis di $L^2(R)$. Dengan kata lain $\{\psi_{j,k}\}$ membangun $L^2(R)$ dan setiap $f \in L^2(R)$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $\psi_{j,k}$.

Misalkan ψ adalah fungsi tunggal yang dipilih. Melalui delasi 2^j dan translasi $k/2^j$ terhadap $\psi(x)$ diperoleh keluarga fungsi $\{\psi(2^j x - k) : j,k \in Z\}$. Selanjutnya dengan normalisasi $2^{j/2}$ pada $\psi(2^j x - k)$ akan diperoleh $\psi(2^j x - k)$ akan diperoleh

$$\|\psi_{j,k}\|_2 = \left\|2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k)\right\|_2 = 1 \qquad \text{... (3.1)}$$

Definisi 3.1

Suatu fungsi $\psi \in L^2(R)$ disebut *wavelet ortogonal* jika keluarga fungsi $\{\psi_{j,k}\}$ yang didefinisikan sebagai $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x\text{-}k)$ merupakan basis ortonormal untuk $L^2(R)$ yaitu :

(a) $<\psi_{j,k}(x), \psi_{m,n}(x)> = \delta_{j,m}\,\delta_{k,n}$

dengan $\delta_{j,k} = \begin{cases} 1, \text{ jika } j = k \\ 0, \text{ jika } j \neq k \end{cases}$ $j,k,m,n \in Z$ (disebut *simbol Kronecker*) dan

(b) setiap $f \in L^2(R)$ dapat ditulis dalam bentuk *deret wavelet*

$$f(x) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{j,k}\,\psi_{j,k}(x) \qquad \text{... (3.2)}$$

dengan $c_{j,k} = <f, \psi_{j,k}>$ adalah *koefisien wavelet.*

Jika suatu wavelet $\psi \in L^2(R)$ telah dikontruksi, maka disarankan untuk mempelajari struktur dari suatu dekomposisi $L^2(R)$ yang membangunnya (dalam Chui (1992), h.120).

Definisi 3.2

Keluarga ruang bagian tertutup $\{V_j : j \in Z\}$ dari $L^2(R)$ yang memenuhi sifat :

(1) *Inklusi* : $V_j \subset V_{j+1}$ untuk setiap $j \in Z$.

(2) *Maksimalitas* : $\bigcap_{n \in N} V_j = \{0\}$

Fitriani Agustina
Jurusan Pendidikan Matematika
UPI

(3) *Densiti* : Closure $\left\{\bigcup_{n\in N} V_j\right\} = L^2(R)$

(4) *Skala* : f(x) $\in V_j$ jika dan hanya jika f(2x) $\in V_{j+1}$

(5) *Basis* : terdapat $\phi \in V_0$ sedemikian sehingga $\{\phi(.\ -\ k) : k \in Z\}$ merupakan basis ortonormal untuk V_0

disebut *Analisis Multiresolusi* (AMR) pada $L^2(R)$

ϕ disebut *fungsi skala* pada AMR.

Akibat 2.1

Misalkan $\{V_j : j\in Z\}$ adalah AMR pada $L^2(R)$ dan $\phi \in V_0$ adalah fungsi skala yang bersesuaian pada AMR tersebut. Jika didefinisikan $\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\phi(2^jx\text{-}k)$, j,k$\in$Z maka untuk setiap j$\in$Z, $\{\phi_{j,k}\ ;\ k\in Z\}$ merupakan basis ortonormal untuk V_j.

Contoh 3.1

Misalkan $V_j = \{f\in L^2(R)\ |\ f$ konstan pada interval $[k/2^{-j}, (k+1)/2^{-j})$, $k\in Z\}$, maka $\{V_j\}_{j\in Z}$ adalah subruang dari $L^2(R)$ yang memenuhi kelima aksioma analisis multiresolusi**.** Dalam wavelet Haar untuk memenuhi aksioma basis, digunakan fungsi skala (father wavelet) Haar $\phi(x) = I_{[0,1)}(x)$. Selanjutnya dengan menggunakan aksioma skala dan aksioma basis dapat ditunjukkan bahwa $\{2^{j/2}\phi(2^j x\text{-}k)\}_{k\in Z}$ basis ortonormal untuk V_j. Tetapi totalitas dari semua basis ortonormal itu memuat suatu himpunan $\{2^{j/2}\ \phi(2^j x\text{-}k)\}_{j,k\in Z}$ yang bukan basis ortonormal untuk $L^2(R)$ sebab ruang-ruang V_j tidak saling mutually ortogonal. Untuk memperbaiki kesulitan ini, diperlukan subruang yang disebut subruang wavelet dan dinotasikan dengan W_j .

Misalkan $\{V_j : j\in Z\}$ adalah suatu AMR pada $L^2(R)$ dan W_0 adalah *komplemen ortogonal* dari V_0 di dalam V_1 , dengan kata lain W_0 memenuhi persamaan

$$V_1 = V_0 \oplus W_0 \qquad \text{... (3.3)}$$

dengan $\oplus$ adalah jumlah dari subruang yang saling ortogonal.

Jika untuk setiap j$\in$Z didefinisikan $W_j = \{f(2^j .) : k\in Z\}$ sebagai komplemen ortogonal dari V_j di dalam V_{j+1} maka W_j memenuhi persamaan

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \qquad \text{... (3.4)}$$

Karena Closure $\left\{\bigcup_{n\in N} V_j\right\} = L^2(R)$ (aksioma densiti) dan $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ maka diperoleh

$$L^2(R) = V_0 \oplus \bigoplus_{j=0}^{\infty} W_j \qquad \text{... (3.5)}$$

Selanjutnya jika V_0 didekomposisikan dengan cara yang sama, maka peroleh

$$L^2(R) = \bigoplus_{j\in Z} W_j \qquad \text{... (3.6)}$$

Jadi L^2 (R) adalah jumlah ortogonal dari subspace wavelet W_j .

Lemma 2.4.2

Misalkan $\psi \in W_0$ sedemikian sehingga $\{\psi(.\ -\ k) : k\in Z\}$ merupakan basis ortonormal untuk W_0. Jika $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^jx\text{-}k)$ dengan j,k$\in$Z maka $\{\psi_{j,k} : j,k\in Z\}$ merupakan basis ortonormal untuk $L^2(R)$.

4. Kernel Wavelet $E_m(.\ ,\ .)$

Misalkan $h\in L^2(R)$ dan V_j adalah subruang tertutup dari $L^2(R)$. Proyeksi dari h pada V_j dapat dituliskan sebagai

$$h \to E_j(h)(u) = \sum_{k\in Z} c_{j,k}\ \phi_{j,k}(u) \qquad \text{... (4.1)}$$

dengan $c_{j,k} = \langle h, \phi_{j,k}\rangle = \int_R h(v)\ \phi_{j,k}(v)\ dv$.

Misalkan kita perkenalkan proyektor yang berhubungan dengan integral kernel, yaitu

$$h \to E_j(h)(u) = \int_R E_j(u, v)h(v)\ dv \qquad \text{... (4.2)}$$

yang juga menyatakan proyeksi dari h pada V_j.

Fitriani Agustina
Jurusan Pendidikan Matematika
UPI

Dari (3.1) dan (3.2) diperoleh hubungan

$$\int_R E_j(u,v)h(v)\,dv = \sum_{k\in Z} c_{j,k}\,\phi_{j,k}(u)$$
$$= \sum_{k\in Z} \int_R h(v)\phi_{j,k}(v)\,dv\,\phi_{j,k}(u)$$
$$= \int_R \sum_{k\in Z} \phi_{j,k}(u)\phi_{j,k}(v)h(v)\,dv \qquad \text{... (4.3)}$$

Dari (4.3) diperoleh

$$E_j(u,v) = \sum_{k\in Z} \phi_{j,k}(u)\,\phi_{j,k}(v) \qquad \text{... (4.4)}$$

yaitu sebuah fungsi yang didefinisikan oleh Mayer (1990) sebagai *kernel wavelet.*
Karena $\phi_{j,k}(u) = 2^{j/2}\phi(2^j u - k)$ dan $\phi_{j,k}(v) = 2^{j/2}\phi(2^j v - k)$ maka kernel wavelet (4.4) dapat juga dinyatakan dalam bentuk

$$E_j(u,v) = 2^j \sum_{k\in Z} \phi(2^j u - k)\phi(2^j v - k) \qquad \text{... (4.5)}$$

4.1 Sifat-Sifat Kernel Wavelet $E_j(.\,,.)$

Sifat 1

$$E_j(u,v) = 2^j E_0(2^j u, 2^j v) \qquad \text{... (4.1.1)}$$

Bukti :

$$E_j(u\,,v) = \sum_{k\in Z} \phi_{j,k}(u)\,\phi_{j,k}(v) = 2^j \sum_{k\in Z} \phi(2^j u-k)\phi(2^j v-k)$$
$$= 2^{j+0} \sum_{k\in Z} \phi(2^{j+0}u-k)\phi(2^{j+0}v-k) = 2^j(2^0 \sum_{k\in Z} \phi(2^0(2^j u-k))\,\phi(2^0(2^j v-k))$$
$$= 2^j E_0(2^j u\,, 2^j v) \qquad \square$$

Sifat 2

$$E_0(u+k,v+k) = E_0(u,v) \text{ untuk } k\in Z \qquad \text{... (4.1.2)}$$

Bukti :

$$E_0(u+k,v+k) = \sum_{k\in Z} \phi((u+k)-k)\phi((v+k)-k) = \sum_{k\in Z} \phi((u)\phi((v)$$
$$= \sum_{k\in Z} \phi(u-k)\phi(v-k)$$
$$= E_0(u\,,v) \qquad \square$$

Sifat 3

$$\left|E_0(u\,,v)\right| \le K(u - v) \qquad \text{... (4.1.3)}$$

dengan K(.) adalah fungsi integrabel, terbatas, dan positif (fungsi kernel)
Bukti : *(lihat Mayer (1990), h.33)*
Sifat 4

$$\sup_{u,v} \left|E_j(u\,,v)\right| \le O(2^j) \qquad \text{... (4.1.4)}$$

Bukti :

Akan ditunjukkan bahwa $\lim\limits_{u,v\to 1} \left|(\sup\limits_{u,v} \left|E_j(u\,,v)\right|)/2^j\right| < \infty$

$$u,v\to 1$$
$$\left|(\sup_{u,v} \left|E_j(u\,,v)\right|)/2^j)\right| = \left|[\sup_{u,v} \left|2^j E_0(2^j u\,, 2^j v)\right|]/2^j\right|$$
$$= \left|[\sup_{u,v} \left|2^j\right|\left|E_0(2^J u\,, 2^J v)\right|]/2^j\right|$$
$$= \left|\sup_{u,v} \left|E_0(2^j u\,, 2^j v)\right|\right|$$

Fitriani Agustina
Jurusan Pendidikan Matematika
UPI

$$\leq \left| \operatorname*{Sup}_{u,v} K(2^j u - 2^j v) \right| \qquad \text{(sifat 3)}$$

Karena K(.) fungsi terbatas, maka $\operatorname*{Sup}_{u,v} K(2^j u - 2^j v)$ juga terbatas.

Sehingga diperoleh

$$\lim_{u,v\to 1} \left| \left(\operatorname*{Sup}_{u,v} \left| E_j(u\,,\,v) \right| \right)/2^j \right| < \infty.$$

Dengan kata lain terbukti bahwa $\operatorname*{Sup}_{u,v} \left| E_j(u\,,\,v) \right| \leq O(2^j)$ □

Sifat 5

Jika fungsi h terletak pada ruang Sobolev $H^v = H^v(R)$ maka

(a) Barisan $E_j(h) = \int_R E_j(.\,,\,y)h(y)\,dy$ konvergen kuat ke h pada H^v untuk $|v| \leq q$

dan

(b) $\left\| h - E_j(h) \right\|_\upsilon = O(2^{-j\upsilon})$ untuk $0 < v < q$

dengan $\left\| . \right\|_\upsilon$ adalah norma yang berasosiasi dengan H^v ... (4.1.5)

Bukti : *(lihat Mallat (1989), teorema 3)*

Catatan :

q menunjukkan *derajat keteraturan* dari ϕ.

Ruang Sobolev H^v adalah *suatu ruang dari distribusi-distribusi yang bersifat bahwa transformasi Fourier terintegralkan kuadrat yang bersesuaian dengan suatu ukuran* $(1+|x|2)^v\,dx$ *pada R* (dalam Antoniadis (1994), h.1342).

Sifat 6

Kernel wavelet adalah transisi invarians diadik, artinya

$$E_j(t+u, .) = E_j(t,. - u) \text{ untuk setiap diadik u berbentuk } k/2^j \qquad \text{... (4.1.6)}$$

Bukti :

$E_j(t+u, .) = 2^j E_0(2^j(t+u)\,,\,2^j(.))$

$= 2^j E_0(2^j(t+u) - 2^j u,\, 2^j(.) - 2^j u))$ (sifat 2 dengan $k = 2^j u$)

$= 2^j E_0(2^j t\,,\,2^j(. - u))$ (sifat 1)

$= E_j(t\,,\,. - u)$ □

Sifat 7

$E_0(0,-t)$ adalah suatu kernel K(t) yang mempunyai bandwidth 2^{-j} ... (4.1.7)

Bukti :

$$K(t) = E_0(0,-t) = E_0(t,0) \qquad \text{(sifat 6)}$$

Misalkan $t = 2^m x$ adalah titik diadik $\Leftrightarrow x = t/2^m$, sehingga

$K(2^j x) = E_0(2^j x\,,\,0)$

$= (1/2^j)\,E_j(2^j x\,,\,0)$ (sifat 1)

$= 2^j K(2^j x)$

$= K_2 J\,(x)$

Ini adalah fungsi kernel yang mempunyai bandwidth 2^{-j} □

Sifat 8

Untuk setiap $x \in [0,1]$ berlaku

(a) $\operatorname*{Sup}_{j\geq 1} \int_0^1 \left| E_j(x\,,y) \right| dy < \infty$

(b) $\int_0^1 E_j(x\,,y)\,dy \to 1$ ... (4.1.8)

(c) $\int_0^1 |E_j(x,y)| I\{|x-y| > \varepsilon\}\, dy \to 0$, untuk setiap $\varepsilon > 0$

(d) $\mathrm{Sup}_{y\in[0,1]} |E_j(x,y)| = O(2^j)$

Bukti : *(lihat Isogi (1990), Mallat (1989)).*

Sifat 9

Jika h : R → R kontinu pada t maka $\lim_{j\to\infty} 2^{-j} \int_R E_J^2(t^{(j)}, s) h(s)\, ds = h(t) w_0^2$.

dengan $$w_0^2 = \int_R E_0^2(0,s)\, ds = \sum_{k\in Z} \phi^2(k) \qquad \text{... (4.1.9)}$$

Bukti :

Karena $2^{-j} t^{(j)} = [2^j t]$ dan $E_0(x+k, y+k) = E_0(x,y)$ untuk setiap $k\in Z$, maka

$$2^{-j}\int_R E_j^2(t^{(j)}, s) h(s)\, ds = 2^j\ E_0^2(2^j t^{(j)}, 2^j s) h(s)\, ds = 2^j\ E_0^2(0, 2^j s - [2^j t]) h(s)\, ds$$

Misalkan $u = 2^j s - [2^j t] \Leftrightarrow du = 2^j ds$.

Sehingga

$$2^{-j}\int_R E_j^2(t^{(j)}, s) h(s)\, ds = \int_R E_0^2(0,u) h(t^{(j)} + u2^{-j}) du \longrightarrow h(t)\int_R E_0^2(0,u) du \text{ bila } j \to \infty \qquad \square$$

Untuk selanjutnya kernel wavelet dan sifat-sifatnya dapat digunakan untuk estimasi statistik nonparametrik seperti halnya fungsi-fungsi kernel.

DAFTAR PUSTAKA

Antoniadis, A., Gregoire, G., Mc.Keague, W. (1994). “Wavelets Methods for Curve Estimation”. *Journal of the American Statistical Association, Dec, Vol.84, No.428, 1340-1353.*

Bruce, A., Gao, H. Y. (1996). *”Applied Wavelet Analysis with S-Plus”.* New York: Springer -Verlag.

Chui, K. (1992). *“An Introduction to Wavelet”.* Boston : Academic Press, Inc.

Eubank, R. L. (1988). *“Spline Smoothing and Nonparametric Regression”.* New York: Marcel Dekker. Inc.

Hardle, W. (1991). *“Smoothing Techniques with Implementation in S”.* New York: Springer-Verlag.

Issogi, E. (1990). “Nonparametric Estimation of a Regressi Function by Delta Sequences”. *Ann. Inst. Statist. Math., 42, 699-708.*

Kaiser, G. (1994). *“A Friendly Guide to Wavelets”.* Boston : Birkhauser.

Mallat, S. (1989). “Multiresolution Approximations and Wavelet Orthonormal Bases of $L^2(R)$”. *Transactions of the American Mathematical Society, 315, 69-87.*

Martadiputra, B.A.P. (1999). “Estimator Wavelet Untuk Fungsi Hazard”. Yogyakarta: Tesis - PPS UGM.

MathSoft. (1993). *“User’s Manual S-Plus, version 3.2”.* Seattle : Stat Sci, a divition of MathSoft, Inc.

Mayer, Y. (1990). *“Ondelettes et Operateurs I: Ondelettes”.* Paris : Hermann.

Ogden, T.R. (1997). *“Essensial Wavelets for Statistical Application and Data Analysis”.* Boston: Birkhauser.

Schomburg, B. (1990). "On the Approximation of the Delta Distribution in Sobolev Spaces of Negative Order". *Applicable Analysis, 36, 89-93.*