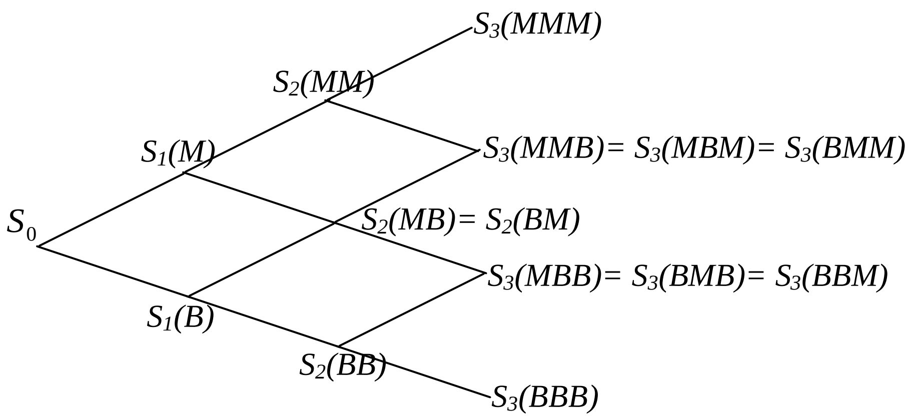
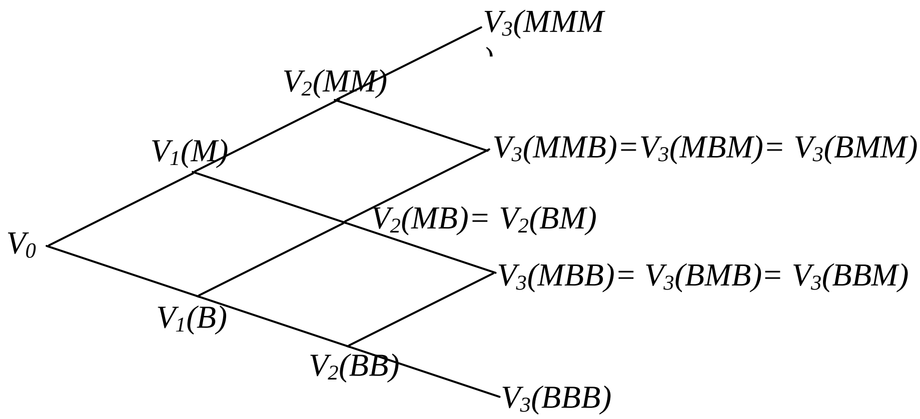
MODEL UNTUK TIGA PERIODE

A. Saham

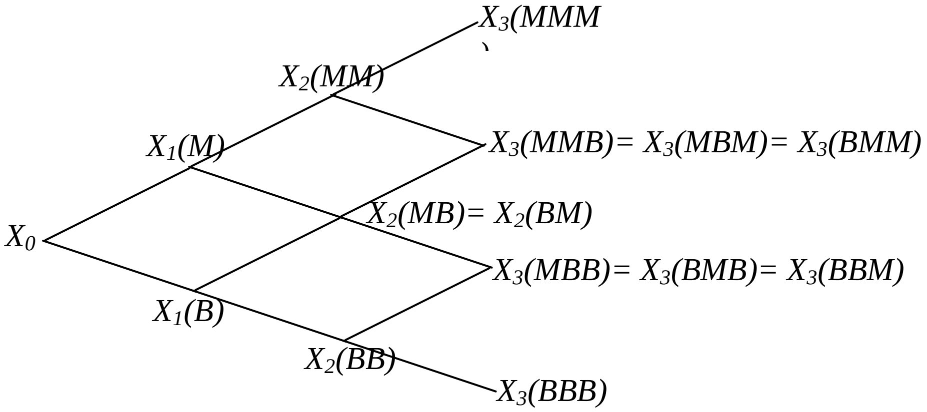


B. Opsi



Fitriani Agustina
Jurusan Pendidikan Matematika
UPI

C. Portfolio


$X_3(MMM)$
$X_2(MM)$
$X_1(M)$
$X_3(MMB) = X_3(MBM) = X_3(BMM)$
$X_2(MB) = X_2(BM)$
X_0
$X_3(MBB) = X_3(BMB) = X_3(BBM)$
$X_1(B)$
$X_2(BB)$
$X_3(BBB)$

Sebagai hasil dari pelantunan koin sebanyak tiga kali, harga saham pada akhir periode ketiga adalah

$$S_3(MMM) = aS_2(MM) = a^3 S_0 \qquad \text{dimana} \quad S_2(MM) = a\,S_1(M) = a^2 S_0 \tag{1.1}$$

$$S_3(MMB) = bS_2(MM) = ba^2 S_0 \tag{1.2}$$

$$S_3(MBM) = aS_2(MB) = ba^2 S_0 \qquad \text{dimana} \quad S_2(MB) = b\,S_1(M) = ba\,S_0 \tag{1.3}$$

$$S_3(MBB) = bS_2(MB) = b^2 a S_0 \tag{1.4}$$

$$S_3(BMM) = aS_2(BM) = ba^2 S_0 \qquad \text{dimana} \quad S_2(BM) = a\,S_1(B) = ab\,S_0 \tag{1.5}$$

$$S_3(BMB) = bS_2(BM) = b^2 a S_0 \tag{1.6}$$

$$S_3(BBM) = aS_2(BB) = ab^2 S_0 \qquad \text{dimana} \quad S_2(BB) = b\,S_1(B) = b^2 S_0 \tag{1.7}$$

$$S_3(BBB) = bS_2(BB) = b^3 S_0 \tag{1.8}$$

Pada kesempatan ini akan membahas mengenai opsi call Eropa yang akan jatuh tempo di akhir periode 3 dengan strike price K. Nilai intrinsik dari opsi call ini adalah

$$V_3 = maks\{S_3 - K, 0\} \tag{1.9}$$

yang dapat diuraikan lebih rinci dengan

$$V_3 = \begin{cases} V_3(MMM) = maks\{S_3(MMM) - K, 0\} \\ V_3(MMB) = maks\{S_3(MMB) - K, 0\} \\ V_3(MBM) = maks\{S_3(MBM) - K, 0\} \\ V_3(MBB) = maks\{S_3(MBB) - K, 0\} \\ V_3(BMM) = maks\{S_3(BMM) - K, 0\} \\ V_3(BMB) = maks\{S_3(BMB) - K, 0\} \\ V_3(BBM) = maks\{S_3(BBM) - K, 0\} \\ V_3(BBB) = maks\{S_3(BBB) - K, 0\} \end{cases} \tag{1.10}$$

Nilai V_3 ini merupakan hak bagi pemegang opsi call dan sekaligus merupakan kewajiban bagi penerbit opsi call pada berbagai keadaan.

Agar penerbit bisa memagari dirinya dari resiko yang mungkin muncul berkaitan dengan kewajibannya untuk menyediakan dana sebesar V_3 di akhir periode 3 maka penernit akan menyusun portfolio replikasi. Portfolio ini disusun dari penjualan opsi call seharga V_0 dan dialokasikan untuk pembelian saham sebanyak Δ_0 sisanya (atau kekurangannya) ditabung (hutang) ke bank dengan suku bunga r per periode. Jadi pada awal periode 1 nilai portfolionya adalah

$$X_0 = V_0 \tag{1.11}$$

Tujuan dari pembentukan portfolio ini adalah untuk mendapatkan nilai portfolio di akhir periode 3 sebesar X_3 yang sama persis dengan nilai opsi call di akhir periode 3.

$$X_3 = V_3 \tag{1.12}$$

melalui pemilihan komposisi portfolio pada tiap awal periode 1, 2, dan 3. Dengan kata lain akan dipilih komposisi portfolio yang terdiri dari sejumlah saham dan tabungan (hutang) di bank dengan Δ_0 lembar saham pada awal perode 1, Δ_1 lembar saham pada awal perode 2, dan Δ_2 lembar saham pada awal perode 3 yang memungkinkan persamaan (1.12) terpenuhi.

Pada awal periode 1 nilai portfolionya adalah X_1, yaitu

$$X_1 = \begin{cases} X_1(M) = \Delta_0\, S_1(M) + (1+r)\left(X_0 - \Delta_0 S_0\right) \\ X_1(B) = \Delta_0\, S_1(B) + (1+r)\left(X_0 - \Delta_0 S_0\right) \end{cases} \tag{1.13}$$

Posisi portfolio pada akhir periode 1 ini akan diubah pada awal periode 2 melalui perubahan komposisi kepemilikan saham dari semula sebanyak Δ_0 lembar menjadi Δ_1 lembar. Kelebihan (kekurangan) dana akan disimpan (hutang) di bank sebesar $X_1 - \Delta_1 S_1$. Nilai portfolio pada akhir periode 2 akan menjadi X_2

$$X_2 = \begin{cases} X_2(MM) = \Delta_1(M)\, S_2(MM) + (1+r)\{X_1(M) - \Delta_1(M) S_1(M)\} \\ X_2(MB) = \Delta_1(M)\, S_2(MB) + (1+r)\{X_1(M) - \Delta_1(M) S_1(M)\} \\ X_2(BM) = \Delta_1(B)\, S_2(BM) + (1+r)\{X_1(B) - \Delta_1(B) S_1(B)\} \\ X_2(BB) = \Delta_1(B)\, S_2(BB) + (1+r)\{X_1(B) - \Delta_1(B) S_1(B)\} \end{cases} \tag{1.14}$$

Posisi portfolio pada akhir periode 2 ini akan diubah pada awal periode 3 melalui perubahan komposisi kepemilikan saham dari semula sebanyak Δ_1 lembar menjadi Δ_2 lembar. Kelebihan (kekurangan) dana akan disimpan (hutang) di bank sebesar $X_2 - \Delta_2 S_2$. Nilai portfolio pada akhir periode 2 akan menjadi X_3

$$X_3 = \begin{cases} X_3(MMM) = \Delta_2(MM)\, S_3(MMM) + (1+r)\{X_2(MM) - \Delta_2(MM)S_2(MM)\} \\ X_3(MMB) = \Delta_2(MM)\, S_3(MMB) + (1+r)\{X_2(MM) - \Delta_2(MM)S_2(MM)\} \\ X_3(MBM) = \Delta_2(MB)\, S_3(MBM) + (1+r)\{X_2(MB) - \Delta_2(MB)S_2(MB)\} \\ X_3(MBB) = \Delta_2(MB)\, S_3(MBB) + (1+r)\{X_2(MB) - \Delta_2(MB)S_2(MB)\} \\ X_3(BMM) = \Delta_2(BM)\, S_3(BMM) + (1+r)\{X_2(BM) - \Delta_2(BM)S_2(BM)\} \\ X_3(BMB) = \Delta_2(BM)\, S_3(BMB) + (1+r)\{X_2(BM) - \Delta_2(BM)S_2(BM)\} \\ X_2(BBM) = \Delta_2(BB)\, S_3(BBM) + (1+r)\{X_2(BB) - \Delta_2(BB)S_2(BB)\} \\ X_2(BBB) = \Delta_2(BB)\, S_3(BBB) + (1+r)\{X_2(BB) - \Delta_2(BB)S_2(BB)\} \end{cases} \qquad (1.15)$$

Dengan demikian telah diperoleh 14 buah persamaan yang terdiri dari (1.13), (1.14), dan (1.15). Dari keempatbelas persamaan ini akan dicari ….. buah nilai yang masing-masing untuk Δ_0, X_0, $\Delta_1(M)$, $\Delta_1(B)$, $\Delta_2(MM)$, $\Delta_2(MB)$, $\Delta_2(BM)$, $\Delta_2(BB)$, $X_1(M)$, $X_1(B)$, $X_2(MM)$, $X_2(MB)$, $X_2(BM)$, $X_2(BB)$ agar persamaan (1.12) terpenuhi.

Dari kedelapan persamaan di (1.15) ini akan didapat komposisi jumlah kepemilikan saham pada awal periode 3 sebesar Δ_2.

$$\Delta_2(MM) = \frac{X_3(MMM) - X_3(MMB)}{(a-b)a^2\, S_0} = \frac{V_3(MMM) - V_3(MMB)}{(a-b)a^2\, S_0} \qquad (1.16)$$

$$\Delta_2(MB) = \frac{X_3(MBM) - X_3(MBB)}{(a-b)ab\, S_0} = \frac{V_3(MBM) - V_3(MBB)}{(a-b)ab\, S_0} \qquad (1.17)$$

$$\Delta_2(BM) = \frac{X_3(BMM) - X_3(BMB)}{(a-b)ab\, S_0} = \frac{V_3(BMM) - V_3(BMB)}{(a-b)ab\, S_0} \qquad (1.18)$$

$$\Delta_2(BB) = \frac{X_3(BBM) - X_3(BBB)}{(a-b)b^2\, S_0} = \frac{V_3(BBM) - V_3(BBB)}{(a-b)b^2\, S_0} \qquad (1.19)$$

Perubahan dari X_3 ke V_3 dapat dilakukan karena telah mulai digunakan pembatas (1.12) sehingga nilai $\Delta_2(MM)$, $\Delta_2(MB)$, $\Delta_2(BM)$ dan $\Delta_2(BB)$ yang diperoleh telah menjamin bahwa (1.12) terpenuhi.

BUKTI:

Perhatikan persamaan $X_3(MMM)$ dan $X_3(MMB)$, diperoleh

$$
\begin{aligned}
X_3(MMM) &= \Delta_2(MM)\cdot S_3(MMM)+(1+r)\cdot\{X_2(MM)-\Delta_2(MM)\cdot S_2(MM)\} \\
X_3(MMB) &= \Delta_2(MM)\cdot S_3(MMB)+(1+r)\cdot\{X_2(MM)-\Delta_2(MM)\cdot S_2(MM)\} \\
X_3(MMM)-X_3(MMB) &= \Delta_2(MM)\cdot\{S_3(MMM)-S_3(MMB)\} \\
\Delta_2(MM) &= \frac{X_3(MMM)-X_3(MMB)}{S_3(MMM)-S_3(MMB)} \\
\Delta_2(MM) &= \frac{V_3(MMM)-V_3(MMB)}{S_3(MMM)-S_3(MMB)} \\
\Delta_2(MM) &= \frac{V_3(MMM)-V_3(MMB)}{(a-b)a^2 S_0}
\end{aligned}
$$

Perhatikan persamaan $X_3(MBM)$ dan $X_3(MBB)$, diperoleh

$$
\begin{aligned}
X_3(MBM) &= \Delta_2(MB)\cdot S_3(MBM)+(1+r)\cdot\{X_2(MB)-\Delta_2(MB)\cdot S_2(MB)\} \\
X_3(MBB) &= \Delta_2(MB)\cdot S_3(MBB)+(1+r)\cdot\{X_2(MB)-\Delta_2(MB)\cdot S_2(MB)\} \\
X_3(MBM)-X_3(MBB) &= \Delta_2(MB)\cdot\{S_3(MBM)-S_3(MBB)\} \\
\Delta_2(MB) &= \frac{X_3(MBM)-X_3(MBB)}{S_3(MBM)-S_3(MBB)} \\
\Delta_2(MB) &= \frac{V_3(MBM)-V_3(MBB)}{S_3(MBM)-S_3(MBB)} \\
\Delta_2(MB) &= \frac{V_3(MBM)-V_3(MBB)}{(a-b)ba\, S_0}
\end{aligned}
$$

Perhatikan persamaan $X_3(BMM)$ dan $X_3(BMB)$, diperoleh

$$
\begin{aligned}
X_3(BMM) &= \Delta_2(BM)\cdot S_3(BMM)+(1+r)\cdot\{X_2(BM)-\Delta_2(BM)\cdot S_2(BM)\} \\
X_3(BMB) &= \Delta_2(BM)\cdot S_3(BMB)+(1+r)\cdot\{X_2(BM)-\Delta_2(BM)\cdot S_2(BM)\} \\
X_3(BMM)-X_3(BMB) &= \Delta_2(BM)\cdot\{S_3(BMM)-S_3(BMB)\} \\
\Delta_2(BM) &= \frac{X_3(BMM)-X_3(BMB)}{S_3(BMM)-S_3(BMB)} \\
\Delta_2(BM) &= \frac{V_3(BMM)-V_3(BMB)}{S_3(BMM)-S_3(BMB)} \\
\Delta_2(BM) &= \frac{V_3(BMM)-V_3(BMB)}{(a-b)ba\, S_0}
\end{aligned}
$$

Perhatikan persamaan $X_3(BMM)$ dan $X_3(BMB)$, diperoleh

$$\begin{aligned}
X_3(BBM) &= \Delta_2(BB)\cdot S_3(BBM)+(1+r)\cdot\{X_2(BB)-\Delta_2(BB)\cdot S_2(BB)\}\\
X_3(BBB) &= \Delta_2(BB)\cdot S_3(BBB)+(1+r)\cdot\{X_2(BB)-\Delta_2(BB)\cdot S_2(BB)\}\\
X_3(BBM)-X_3(BBB) &= \Delta_2(BB)\cdot\{S_3(BBM)-S_3(BBB)\}\\
\Delta_2(BB) &= \frac{X_3(BBM)-X_3(BBB)}{S_3(BBM)-S_3(BBB)}\\
\Delta_2(BB) &= \frac{V_3(BBM)-V_3(BBB)}{S_3(BBM)-S_3(BBB)}\\
\Delta_2(BB) &= \frac{V_3(BBM)-V_3(BBB)}{(a-b)b^2\, S_0}
\end{aligned}$$

Setelah $\Delta_2(MM)$, $\Delta_2(MB)$, $\Delta_2(BM)$ dan $\Delta_2(BB)$ diperoleh maka dari kedelapan persamaan (1.15) ini pula akan didapat X_2 sebagai nilai portfolio pada akhir periode 2.

$$X_2 = \begin{cases} X_2(MM)=\dfrac{1}{1+r}\left[\tilde{p}\, X_3(MMM)+\tilde{q}\, X_3(MMB)\right]\\ X_2(MB)=\dfrac{1}{1+r}\left[\tilde{p}\, X_3(MBM)+\tilde{q}\, X_3(MBB)\right]\\ X_2(BM)=\dfrac{1}{1+r}\left[\tilde{p}\, X_3(BMM)+\tilde{q}\, X_3(BMB)\right]\\ X_2(BB)=\dfrac{1}{1+r}\left[\tilde{p}\, X_3(BBM)+\tilde{q}\, X_3(BBB)\right]\end{cases} \qquad (1.20)$$

dimana: $\tilde{p}=\dfrac{(1+r)-b}{a-b}$ dan $\tilde{q}=\dfrac{a-(1+r)}{a-b}$

BUKTI:

Perhatikan persamaan $X_3(MMM)$, akan diperoleh

$$\begin{aligned}
X_3(MMM) &= \Delta_2(MM)\cdot S_3(MMM)+(1+r)\cdot\{X_2(MM)-\Delta_2(MM)\cdot S_2(MM)\}\\
&= \frac{X_3(MMM)-X_3(MMB)}{(a-b)a^2S_0}\cdot a^3S_0+(1+r)\cdot\left\{X_2(MM)-\frac{X_3(MMM)-X_3(MMB)}{(a-b)a^2S_0}\cdot a^2S_0\right\}\\
&= \frac{X_3(MMM)-X_3(MMB)}{(a-b)}\cdot a+(1+r)\cdot\left\{X_2(MM)-\frac{X_3(MMM)-X_3(MMB)}{(a-b)}\right\}\\
&= \frac{a\cdot(X_3(MMM)-X_3(MMB))}{(a-b)}+(1+r)\cdot X_2(MM)-\frac{(X_3(MMM)-X_3(MMB))\cdot(1+r)}{(a-b)}\\
X_3(MMM) &= \frac{(a-(1+r))\cdot(X_3(MMM)-X_3(MMB))}{(a-b)}+(1+r)\cdot X_2(MM)
\end{aligned}$$

$$X_3(MMM) = \frac{a-(1+r)}{(a-b)} X_3(MMM) - \frac{a-(1+r)}{(a-b)} X_3(MMB) + (1+r)\cdot X_2(MM)$$

$$0 = \frac{a-(1+r)}{(a-b)} X_3(MMM) - X_3(MMM) - \frac{a-(1+r)}{(a-b)} X_3(MMB) + (1+r)\cdot X_2(MM)$$

$$0 = \frac{a-(1+r)}{(a-b)} X_3(MMM) - \frac{a-b}{a-b} X_3(MMM) - \frac{a-(1+r)}{(a-b)} X_3(MMB) + (1+r)\cdot X_2(MM)$$

$$0 = \frac{b-(1+r)}{(a-b)} X_3(MMM) - \frac{a-(1+r)}{(a-b)} X_3(MMB) + (1+r)\cdot X_2(MM)$$

$$(1+r)\cdot X_2(MM) = -\frac{b-(1+r)}{(a-b)} X_3(MMM) + \frac{a-(1+r)}{(a-b)} X_3(MMB)$$

$$X_2(MM) = \frac{1}{1+r}\left[\frac{(1+r)-b}{(a-b)} X_3(MMM) + \frac{a-(1+r)}{(a-b)} X_3(MMB)\right]$$

$$X_2(MM) = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}\, X_3(MMM) + \tilde{q}\, X_3(MMB)\right]$$

Perhatikan persamaan $X_3(MBM)$, akan diperoleh

$$X_3(MBM) = \Delta_2(MB)\cdot S_3(MBM) + (1+r)\cdot\{X_2(MB) - \Delta_2(MB)\cdot S_2(MB)\}$$

$$= \frac{X_3(MBM) - X_3(MBB)}{(a-b)b\,a\,S_0}\cdot a^2 b\cdot S_0 + (1+r)\cdot\left\{X_2(MB) - \frac{X_3(MBM) - X_3(MBB)}{(a-b)b\,a\,S_0}\cdot a\cdot b\cdot S_0\right\}$$

$$= \frac{X_3(MBM) - X_3(MBB)}{(a-b)}\cdot a + (1+r)\cdot\left\{X_2(MB) - \frac{X_3(MBM) - X_3(MBB)}{(a-b)}\right\}$$

$$= \frac{X_3(MBM) - X_3(MBB)}{(a-b)}\cdot a + (1+r)\cdot X_2(MB) - (1+r)\cdot\frac{X_3(MBM) - X_3(MBB)}{(a-b)}$$

$$= \frac{(a-(1+r))\cdot(X_3(MBM) - X_3(MBB))}{(a-b)} + (1+r)\cdot X_2(MB)$$

$$= \frac{a-(1+r)}{(a-b)} X_3(MBM) - \frac{a-(1+r)}{a-b} X_3(MBB) + (1+r)\cdot X_2(MB)$$

$$0 = \frac{a-(1+r)}{(a-b)} X_3(MBM) - X_3(MBM) - \frac{a-(1+r)}{(a-b)} X_3(MBB) + (1+r)\cdot X_2(MB)$$

$$0 = \frac{a-(1+r)}{(a-b)} X_3(MBM) - \frac{a-b}{a-b} X_3(MBM) - \frac{a-(1+r)}{(a-b)} X_3(MBB) + (1+r)\cdot X_2(MB)$$

$$0 = \frac{b-(1+r)}{(a-b)} X_3(MBM) - \frac{a-(1+r)}{(a-b)} X_3(MBB) + (1+r)\cdot X_2(MB)$$

$$(1+r)\cdot X_2(MB) = -\frac{b-(1+r)}{(a-b)} X_3(MBM) + \frac{a-(1+r)}{a-b} X_3(MBB)$$

$$X_2(MB) = \frac{1}{1+r}\left[\frac{(1+r)-b}{(a-b)} X_3(MBM) + \frac{a-(1+r)}{a-b} X_3(MBB)\right]$$

$$X_2(MB) = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}\, X_3(MBM) + \tilde{q}\, X_3(MBB)\right]$$

Perhatikan persamaan $X_3(BMM)$, akan diperoleh

$$
\begin{aligned}
X_3(BMM) &= \Delta_2(BM)\cdot S_3(BMM) + (1+r)\cdot\{X_2(BM) - \Delta_2(BM)\cdot S_2(BM)\} \\
&= \frac{X_3(BMM) - X_3(BMB)}{(a-b)b\,a\,S_0}\cdot a^2 b\cdot S_0 + (1+r)\cdot\left\{X_2(BM) - \frac{X_3(BMM)-X_3(BMB)}{(a-b)b\,a\,S_0}\cdot a\cdot b\cdot S_0\right\} \\
&= \frac{X_3(BMM) - X_3(BMB)}{(a-b)}\cdot a + (1+r)\cdot\left\{X_2(BM) - \frac{X_3(BMM)-X_3(BMB)}{(a-b)}\right\} \\
&= \frac{X_3(BMM) - X_3(BMB)}{(a-b)}\cdot a + (1+r)\cdot X_2(BM) - (1+r)\cdot\frac{X_3(BMM)-X_3(BMB)}{(a-b)} \\
&= \frac{(a-(1+r))\cdot(X_3(BMM)-X_3(BMB))}{(a-b)} + (1+r)\cdot X_2(BM) \\
&= \frac{a-(1+r)}{(a-b)}X_3(BMM) - \frac{a-(1+r)}{a-b}X_3(BMB) + (1+r)\cdot X_2(BM) \\
0 &= \frac{a-(1+r)}{(a-b)}X_3(BMM) - X_3(BMM) - \frac{a-(1+r)}{(a-b)}X_3(BMB) + (1+r)\cdot X_2(BM) \\
0 &= \frac{a-(1+r)}{(a-b)}X_3(BMM) - \frac{a-b}{a-b}X_3(BMM) - \frac{a-(1+r)}{(a-b)}X_3(BMB) + (1+r)\cdot X_2(BM) \\
0 &= \frac{b-(1+r)}{(a-b)}X_3(BMM) - \frac{a-(1+r)}{(a-b)}X_3(BMB) + (1+r)\cdot X_2(BM) \\
(1+r)\cdot X_2(BM) &= -\frac{b-(1+r)}{(a-b)}X_3(BMM) + \frac{a-(1+r)}{a-b}X_3(BMB) \\
X_2(BM) &= \frac{1}{1+r}\left[\frac{(1+r)-b}{(a-b)}X_3(BMM) + \frac{a-(1+r)}{a-b}X_3(BMB)\right] \\
X_2(BM) &= \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}\,X_3(BMM) + \tilde{q}\,X_3(BMB)\right]
\end{aligned}
$$

Perhatikan persamaan $X_3(BBM)$, akan diperoleh

$$
\begin{aligned}
X_3(BBM) &= \Delta_2(BB)\cdot S_3(BBM) + (1+r)\cdot\{X_2(BB) - \Delta_2(BB)\cdot S_2(BB)\} \\
&= \frac{X_3(BBM) - X_3(BBB)}{(a-b)b^2\,S_0}\cdot ab^2\cdot S_0 + (1+r)\cdot\left\{X_2(BB) - \frac{X_3(BBM)-X_3(BBB)}{(a-b)b^2\,S_0}\cdot b^2\cdot S_0\right\} \\
&= \frac{X_3(BBM) - X_3(BBB)}{(a-b)}\cdot a + (1+r)\cdot\left\{X_2(BB) - \frac{X_3(BBM)-X_3(BBB)}{(a-b)}\right\} \\
&= \frac{X_3(BBM) - X_3(BBB)}{(a-b)}\cdot a + (1+r)\cdot X_2(BB) - (1+r)\cdot\frac{X_3(BBM)-X_3(BBB)}{(a-b)} \\
&= \frac{(a-(1+r))\cdot(X_3(BBM)-X_3(BBB))}{(a-b)} + (1+r)\cdot X_2(BB) \\
&= \frac{a-(1+r)}{(a-b)}X_3(BBM) - \frac{a-(1+r)}{a-b}X_3(BBB) + (1+r)\cdot X_2(BB) \\
0 &= \frac{a-(1+r)}{(a-b)}X_3(BBM) - X_3(BBM) - \frac{a-(1+r)}{(a-b)}X_3(BBB) + (1+r)\cdot X_2(BB) \\
0 &= \frac{a-(1+r)}{(a-b)}X_3(BBM) - \frac{a-b}{a-b}X_3(BBM) - \frac{a-(1+r)}{(a-b)}X_3(BBB) + (1+r)\cdot X_2(BB)
\end{aligned}
$$

$$0 \qquad = \frac{b-(1+r)}{(a-b)} X_3(BBM) - \frac{a-(1+r)}{(a-b)} X_3(BBB) + (1+r)\cdot X_2(BB)$$

$$(1+r)\cdot X_2(BB) \qquad = -\frac{b-(1+r)}{(a-b)} X_3(BBM) + \frac{a-(1+r)}{a-b} X_3(BBB)$$

$$X_2(BB) \qquad = \frac{1}{1+r}\left[\frac{(1+r)-b}{(a-b)} X_3(BBM) + \frac{a-(1+r)}{a-b} X_3(BBB)\right]$$

$$X_2(BB) \qquad = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}\, X_3(BBM) + \tilde{q}\, X_3(BBB)\right]$$

Perolehan $X_2(MM)$, $X_2(MB)$, $X_2(BM)$, dan $X_2(BB)$ di persamaan (1.20) telah melibatkan penggunaan $\Delta_2(MM)$, $\Delta_2(MB)$, $\Delta_2(BM)$ dan $\Delta_2(BB)$ sehingga nilai yang diperoleh turut menjamin bahwa (1.12) terpenuhi.

Dari nilai X_2 ini bisa diperoleh komposisi kepemilikan saham pada awal periode 2 sebesar Δ_1. Dari keempat persamaan di (1.14) ini akan didapat komposisi jumlah kepemilikan saham pada awal periode 2 sebesar Δ_1.

$$\Delta_1(M) \qquad = \frac{X_2(MM) - X_2(MB)}{(a-b)aS_0}$$

$$= \frac{\left[\frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}X_3(MMM) + \tilde{q}X_3(MMB)\right]\right] - \left[\frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}X_3(MBM) + \tilde{q}X_3(MBB)\right]\right]}{(a-b)aS_0}$$

$$= \frac{\tilde{p}\left[X_3(MMM) - X_3(MBM)\right] + \tilde{q}\left[X_3(MMB) - X_3(MBB)\right]}{(1+r)(a-b)aS_0}$$

$$\Delta_1(M) = \frac{\tilde{p}\left[X_3(MMM) - X_3(MBM)\right] + \tilde{q}\left[X_3(MMB) - X_3(MBB)\right]}{(1+r)(a-b)aS_0} \qquad (1.21)$$

$$\Delta_1(B) \qquad = \frac{X_2(BM) - X_2(BB)}{(a-b)bS_0}$$

$$= \frac{\left[\frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}X_3(BMM) + \tilde{q}X_3(BMB)\right]\right] - \left[\frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}X_3(BBM) + \tilde{q}X_3(BBB)\right]\right]}{(a-b)aS_0}$$

$$= \frac{\tilde{p}\left[X_3(BMM) - X_3(BBM)\right] + \tilde{q}\left[X_3(BMB) - X_3(BBB)\right]}{(1+r)(a-b)aS_0}$$

$$\Delta_1(B) = \frac{\tilde{p}\left[X_3(BMM) - X_3(BBM)\right] + \tilde{q}\left[X_3(BMB) - X_3(BBB)\right]}{(1+r)(a-b)aS_0} \qquad (1.22)$$

BUKTI:

Perhatikan persamaan $X_2(MM)$ dan $X_2(MB)$, diperoleh

$$\begin{aligned}
X_2(MM) &= \Delta_1(M)\, S_2(MM) + (1+r)\{X_1(M) - \Delta_1(M) S_1(M)\} \\
X_2(MB) &= \Delta_1(M)\, S_2(MB) + (1+r)\{X_1(M) - \Delta_1(M) S_1(M)\} \\
X_2(MM) - X_2(MB) &= \Delta_1(M)\left[S_2(MM) - S_2(MB)\right] \\
\Delta_1(M) &= \frac{X_2(MM) - X_2(MB)}{S_2(MM) - S_2(MB)} \\
\Delta_1(M) &= \frac{X_2(MM) - X_2(MB)}{(a-b)a\,S_0}
\end{aligned}$$

Perhatikan persamaan $X_2(BM)$ dan $X_2(BB)$, diperoleh

$$\begin{aligned}
X_2(BM) &= \Delta_1(B)\, S_2(BM) + (1+r)\{X_1(B) - \Delta_1(B) S_1(B)\} \\
X_2(BB) &= \Delta_1(B)\, S_2(BB) + (1+r)\{X_1(B) - \Delta_1(B) S_1(B)\} \\
X_2(BM) - X_2(BB) &= \Delta_1(B)\left[S_2(BM) - S_2(BB)\right] \\
\Delta_1(B) &= \frac{X_2(BM) - X_2(BB)}{S_2(BM) - S_2(BB)} \\
\Delta_1(B) &= \frac{X_2(BM) - X_2(BB)}{(a-b)b\,S_0}
\end{aligned}$$

Setelah $\Delta_1(M)$ dan $\Delta_1(B)$ diperoleh maka dari keempat persamaan (1.14) ini pula akan didapat X_1 sebagai nilai portfolio pada akhir periode 1.

$$X_1 = \begin{cases} X_1(M) = \dfrac{1}{(1+r)}\left[\tilde{p}X_2(MM) + \tilde{q}X_2(MB)\right] \\ X_1(B) = \dfrac{1}{(1+r)}\left[\tilde{p}X_2(BM) + \tilde{q}X_2(BB)\right] \end{cases}$$

$$X_1 = \begin{cases} X_1(M) = \dfrac{1}{(1+r)^2}\left[\tilde{p}^2\, X_3(MMM) + 2\tilde{p}\tilde{q}\, X_3(MMB) + \tilde{q}^2 X_3(MBB)\right] \\ X_1(B) = \dfrac{1}{(1+r)^2}\left[\tilde{p}^2\, X_3(BMM) + 2\tilde{p}\tilde{q}\, X_3(BMB) + \tilde{q}^2 X_3(BBB)\right] \end{cases} \qquad (1.23)$$

dimana: $\tilde{p} = \dfrac{(1+r)-b}{a-b}$ dan $\tilde{q} = \dfrac{a-(1+r)}{a-b}$

BUKTI:

Perhatikan persamaan $X_2(MM)$, akan diperoleh

$$X_2(MM) = \Delta_1(M)\cdot S_2(MM) + (1+r)\cdot\{X_1(M) - \Delta_1(M)\cdot S_1(M)\}$$

$$= \frac{X_2(MM) - X_2(MB)}{(a-b)a\,S_0} \cdot a^2 S_0 + (1+r) \cdot \left\{ X_1(M) - \frac{X_2(MM) - X_2(MB)}{(a-b)a\,S_0} \cdot a\,S_0 \right\}$$

$$= \frac{X_2(MM) - X_2(MB)}{(a-b)} \cdot a + (1+r) \cdot \left\{ X_1(M) - \frac{X_2(MM) - X_2(MB)}{(a-b)} \right\}$$

$$= \frac{a \cdot (X_2(MM) - X_2(MB))}{(a-b)} + (1+r) \cdot X_1(M) - \frac{(X_2(MM) - X_2(MB)) \cdot (1+r)}{(a-b)}$$

$$X_2(MM) = \frac{(a-(1+r)) \cdot (X_2(MM) - X_2(MB))}{(a-b)} + (1+r) \cdot X_1(M)$$

$$X_2(MM) = \frac{a-(1+r)}{(a-b)} X_2(MM) - \frac{a-(1+r)}{(a-b)} X_2(MB) + (1+r) \cdot X_1(M)$$

$$0 = \frac{a-(1+r)}{(a-b)} X_2(MM) - X_2(MM) - \frac{a-(1+r)}{(a-b)} X_2(MB) + (1+r) \cdot X_1(M)$$

$$0 = \frac{a-(1+r)}{(a-b)} X_2(MM) - \frac{a-b}{a-b} X_2(MM) - \frac{a-(1+r)}{(a-b)} X_2(MB) + (1+r) \cdot X_1(M)$$

$$0 = \frac{b-(1+r)}{(a-b)} X_2(MM) - \frac{a-(1+r)}{(a-b)} X_2(MB) + (1+r) \cdot X_1(M)$$

$$(1+r) \cdot X_1(M) = -\frac{b-(1+r)}{(a-b)} X_2(MM) + \frac{a-(1+r)}{(a-b)} X_2(MB)$$

$$X_1(M) = \frac{1}{1+r} \left[\frac{(1+r)-b}{(a-b)} X_2(MM) + \frac{a-(1+r)}{(a-b)} X_2(MB) \right]$$

$$X_1(M) = \frac{1}{1+r} \left[\tilde{p}\, X_2(MM) + \tilde{q}\, X_2(MB) \right]$$

$$X_1(M) = \frac{1}{1+r} \left[\tilde{p} \frac{1}{1+r} \left[\tilde{p} X_3(MMM) + \tilde{q} X_3(MMB) \right] + \tilde{q} \frac{1}{1+r} \left[\tilde{p} X_3(MBM) + \tilde{q} X_3(MBB) \right] \right]$$

$$X_1(M) = \frac{1}{(1+r)^2} \left[\tilde{p}^2 X_3(MMM) + \tilde{p}\tilde{q} X_3(MMB) + \tilde{q}\tilde{p} X_3(MBM) + \tilde{q}^2 X_3(MBB) \right]$$

karena $X_3(MMB) = X_3(MBM)$, maka

$$X_1(M) = \frac{1}{(1+r)^2} \left[\tilde{p}^2 X_3(MMM) + 2\tilde{p}\tilde{q} X_3(MMB) + \tilde{q}^2 X_3(MBB) \right]$$

Perhatikan persamaan $X_2(BM)$, akan diperoleh

$$X_2(BM) = \Delta_1(B) \cdot S_2(BM) + (1+r) \cdot \{ X_1(B) - \Delta_1(B) \cdot S_1(B) \}$$

$$= \frac{X_2(BM) - X_2(BB)}{(a-b)b\,S_0} \cdot a\,b\,S_0 + (1+r) \cdot \left\{ X_1(B) - \frac{X_2(BM) - X_2(BB)}{(a-b)b\,S_0} \cdot b\,S_0 \right\}$$

$$= \frac{X_2(BM) - X_2(BB)}{(a-b)} \cdot a + (1+r) \cdot \left\{ X_1(B) - \frac{X_2(BM) - X_2(BB)}{(a-b)} \right\}$$

$$= \frac{a \cdot \left(X_2(BM) - X_2(BB)\right)}{(a-b)} + (1+r) \cdot X_1(B) - \frac{\left(X_2(BM) - X_2(BB)\right) \cdot (1+r)}{(a-b)}$$

$$X_2(BM) = \frac{\left(a-(1+r)\right) \cdot \left(X_2(BM) - X_2(BB)\right)}{(a-b)} + (1+r) \cdot X_1(B)$$

$$X_2(BM) = \frac{a-(1+r)}{(a-b)} X_2(BM) - \frac{a-(1+r)}{(a-b)} X_2(BB) + (1+r) \cdot X_1(B)$$

$$0 = \frac{a-(1+r)}{(a-b)} X_2(BM) - X_2(BM) - \frac{a-(1+r)}{(a-b)} X_2(BB) + (1+r) \cdot X_1(B)$$

$$0 = \frac{a-(1+r)}{(a-b)} X_2(BM) - \frac{a-b}{a-b} X_2(BM) - \frac{a-(1+r)}{(a-b)} X_2(BB) + (1+r) \cdot X_1(B)$$

$$0 = \frac{b-(1+r)}{(a-b)} X_2(BM) - \frac{a-(1+r)}{(a-b)} X_2(BB) + (1+r) \cdot X_1(B)$$

$$(1+r) \cdot X_1(B) = -\frac{b-(1+r)}{(a-b)} X_2(BM) + \frac{a-(1+r)}{(a-b)} X_2(BB)$$

$$X_1(B) = \frac{1}{1+r}\left[\frac{(1+r)-b}{(a-b)} X_2(BM) + \frac{a-(1+r)}{(a-b)} X_2(BB)\right]$$

$$X_1(B) = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}\, X_2(BM) + \tilde{q}\, X_2(BB)\right]$$

$$X_1(B) = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}\frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}X_3(BMM) + \tilde{q}X_3(BMB)\right] + \tilde{q}\frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}X_3(BBM) + \tilde{q}X_3(BBB)\right]\right]$$

$$X_1(B) = \frac{1}{(1+r)^2}\left[\tilde{p}^2 X_3(BMM) + \tilde{p}\tilde{q}X_3(BMB) + \tilde{q}\tilde{p}X_3(BBM) + \tilde{q}^2 X_3(BBB)\right]$$

karena $X_3(BMB) = X_3(BBM)$, maka

$$X_1(B) = \frac{1}{(1+r)^2}\left[\tilde{p}^2 X_3(BMM) + 2\tilde{p}\tilde{q}X_3(BMB) + \tilde{q}^2 X_3(BBB)\right]$$

Dari nilai X_1 ini dapat diperoleh komposisi kepemilikan saham pada awal periode 1 sebanyak Δ_0 lembar sesuai dengan (1.13)

$$\Delta_0 = \frac{X_1(M) - X_1(B)}{S_1(M) - S_2(B)} = \frac{X_1(M) - X_1(B)}{(a-b)S_0} \qquad (1.24)$$

BUKTI:

Perhatikan persamaan $X_1(M)$ dan $X_1(B)$, diperoleh

$$X_1(M) = \Delta_0\, S_1(M) + (1+r)\{X_0 - \Delta_0\, S_0\}$$

$$X_1(B) = \Delta_0\, S_1(B) + (1+r)\{X_0 - \Delta_0\, S_0\}$$

$$X_1(M) - X_1(B) = \Delta_0\, \left[S_1(M) - S_1(B)\right]$$

$$\Delta_0 \qquad = \frac{X_1(M) - X_1(B)}{S_1(M) - S_1(B)}$$

$$\Delta_0 \qquad = \frac{X_1(M) - X_1(B)}{(a-b)S_0}$$

Dengan mensubstitusikan nilai X_1 pada persamaan (1.23) ke persamaan (1.24), akan diperoleh:

$$\Delta_0 = \frac{\left[\tilde{p}^2 X_3(MMM) + 2\tilde{p}\tilde{q}X_3(MMB) + \tilde{q}^2 X_3(MMB)\right] - \left[\tilde{p}^2 X_3(BMM) + 2\tilde{p}\tilde{q}X_3(BMB) + \tilde{q}^2 X_3(BBB)\right]}{(1+r)^2\,(a-b)S_0} \qquad (1.25)$$

dan nilai opsi call pada awal periode 1 melalui persamaan (1.13)

$$X_0 = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}X_1(M) + \tilde{q}X_1(B)\right] \qquad (1.26)$$

$$X_0 = \frac{1}{(1+r)^3}\begin{bmatrix}\left[\tilde{p}^3 X_3(MMM) + 2\tilde{p}^2\tilde{q}X_3(MMB) + \tilde{p}\tilde{q}^2 X_3(MBB)\right] \\ +\left[\tilde{p}^2\tilde{q}X_3(BMM) + 2\tilde{p}\tilde{q}^2 X_3(BMB) + \tilde{q}^3 X_3(BBB)\right]\end{bmatrix} \qquad (1.27)$$

atau

$$V_0 = \frac{1}{(1+r)^3}\begin{bmatrix}\left[\tilde{p}^3 V_3(MMM) + 2\tilde{p}^2\tilde{q}V_3(MMB) + \tilde{p}\tilde{q}^2 V_3(MBB)\right] \\ +\left[\tilde{p}^2\tilde{q}V_3(BMM) + 2\tilde{p}\tilde{q}^2 V_3(BMB) + \tilde{q}^3 V_3(BBB)\right]\end{bmatrix} \qquad (1.28)$$

dimana: $\tilde{p} = \frac{(1+r)-b}{a-b}$ dan $\tilde{q} = \frac{a-(1+r)}{a-b}$

BUKTI:

Perhatikan persamaan $X_1(M)$ diperoleh

$$X_1(M) \quad = \Delta_0\ S_1(M) + (1+r)\{X_0 - \Delta_0\ S_0\}$$

$$= \frac{X_1(M) - X_1(B)}{(a-b)S_0}a.S_0 + (1+r)\left\{X_0 - \frac{X_1(M) - X_1(B)}{(a-b)S_0}S_0\right\}$$

$$= \frac{X_1(M) - X_1(B)}{(a-b)}a. + (1+r)\left\{X_0 - \frac{X_1(M) - X_1(B)}{(a-b)}\right\}$$

$$= \frac{X_1(M) - X_1(B)}{(a-b)}a. + (1+r)X_0 - (1+r)\left(\frac{X_1(M) - X_1(B)}{(a-b)}\right)$$

$$X_1(M) \quad = \frac{(a-(1+r))}{a-b}X_1(M) - \frac{(a-(1+r))}{a-b}X_1(B) + (1+r)X_0$$

$$0 \quad = \frac{(a-(1+r))}{a-b}X_1(M) - X_1(M) - \frac{(a-(1+r))}{a-b}X_1(B) + (1+r)X_0$$

$$0 \quad = \frac{(a-(1+r))}{a-b}X_1(M) - \frac{a-b}{a-b}X_1(M) - \frac{(a-(1+r))}{a-b}X_1(B) + (1+r)X_0$$

$$0 \quad = \frac{(b-(1+r))}{a-b}X_1(M) - \frac{(a-(1+r))}{a-b}X_1(B) + (1+r)X_0$$

$$
\begin{aligned}
(1+r)X_0 &= \frac{((1+r)-b)}{a-b}X_1(M) + \frac{(a-(1+r))}{a-b}X_1(B) \\
X_0 &= \frac{1}{1+r}\left[\frac{((1+r)-b)}{a-b}X_1(M) + \frac{(a-(1+r))}{a-b}X_1(B)\right] \\
X_0 &= \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}X_1(M) + \tilde{q}X_1(B)\right]
\end{aligned}
$$

Dengan mensubstitusikan nilai X_1 pada persamaan (1.23) ke persamaan (1.26), akan diperoleh:

$$
X_0 = \frac{1}{1+r}\left[\begin{array}{l} \tilde{p}\dfrac{1}{(1+r)^2}\left[\tilde{p}^2X_3(MMM) + 2\tilde{p}\tilde{q}X_3(MMB) + \tilde{q}^2X_3(MBB)\right] \\ +\tilde{q}\dfrac{1}{(1+r)^2}\left[\tilde{p}^2X_3(BMM) + 2\tilde{p}\tilde{q}X_3(BMB) + \tilde{q}^2X_3(BBB)\right] \end{array}\right]
$$

$$
X_0 = \frac{1}{(1+r)^3}\left[\begin{array}{l} \left[\tilde{p}^3X_3(MMM) + 2\tilde{p}^2\tilde{q}X_3(MMB) + \tilde{p}\tilde{q}^2X_3(MBB)\right] \\ +\left[\tilde{p}^2\tilde{q}X_3(BMM) + 2\tilde{p}\tilde{q}^2X_3(BMB) + \tilde{q}^3X_3(BBB)\right] \end{array}\right]
$$

MODEL UNTUK TIGA PERIODE

Misalkan ada sebuah eksperimen acak yang berupa pelantunan sebuah koin sebanyak tiga kali. Secara formal, seluruh hasil yang mungkin dari eksperimen ini akan dinyatakan dalam suatu ruang sampel (sample space) Ω.

$$\boxed{\Omega = \{MMM, MMB, MBM, MBB, BMM, BMB, BBM, BBB\}}$$

dengan M menyatakan lantunan dengan hasil muka dengan peluang

$$P(M) = p$$

dengan B menyatakan lantunan dengan hasil belakang dengan peluang

$$\begin{aligned} P(B) &= 1 - p \\ &= q \end{aligned}$$

Sebuah aljabar yang paling sederhana yang bisa dibangun pada Ω adalah $\mathcal{F}_0$.

$$\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \varnothing\}$$

sedangkan σ-aljabar yang paling kompleks yang bisa dibangun pada Ω adalah $\mathcal{F}$ yang berupa keluarga seluruh sub-himpunan dari Ω (himpunan kuasa dari Ω).

$$\mathcal{F} = \{ \text{ kuasa } \Omega\}$$

Perincian dari himpunan $\mathcal{F}$ dapat dilihat seperti di bawah ini:

$\mathcal{F}$ = { Ω, ∅,{MMM},{MMB},{MBM},{MBB},{BMM},{BMB},
{BBM},{BBB},E_M, F_M,{MMM,MBB},G_M,{MMM,BMB},
{MMM,BBM},{MMM,BBB},{MMB,MBM},{MMB,MBB},
{MMB,BMM},{MMB,BMB},{MMB,BBM},{MMB,BBB},
{MBM,MBB},{MBM,BMM},{MBM,BMB},{MBM,BBM},
{MBM,BBB},{MBB,BMM},{MBB,BMB},{MBB,BBM},
G_B,{BMM,BMB},{BMM,BBM},{BMM,BBB},{BMB,BBM},
F_B, E_B,{MMM,MMB,MBM},{MMM,MMB,MBB},
{MMM,MMB,BMM},{MMM,MMB,BMB},{MMM,MMB,BBM},
{MMM,MMB,BBB},{MMM,MBM,MBB},{MMM,MBM,BMB},
{MMM,MBM,BBM},{MMM,MBM,BBB},{MMM,MBB,BMM},
{MMM,MBB,BMB},{MMM,MBB,BBM},{MMM,MBB,BBB},
{MMM,BMM,BMB},{MMM,BMM,BBM},{MMM,BMM,BBB},
{MMM,BMB,BBM},{MMM,BMB,BBB},{MMM,BBM,BBB},

{MMB,MBM,MBB},{MMB,MBM,BMM},{MMB,MBM,BMB},

{MMB,MBM,BBM},{MMB,MBM,BBB},{MMB,MBB,BMM},

{MMB,MBB,BMB},{MMB,MBB,BBM},{MMB,MBB,BBB},

{MMB,BMM,BMB},{MMB,BMM,BBM},{MMB,BMM,BBM},

{MMB,BMM,BBB},{MMB,BMB,BBM},{MMB,BMB,BBB},

{MMB,BBM,BBB},{MBM,MBB,BMM},{MBM,MBB,BMB},

{MBM,MBB,BBM},{MBM,MBB,BBB},{MBM,BMM,BMB},

{MBM,BMM,BBM},{MBM,BMM,BBB},{MBM,BMB,BBM},

{MBM,BMB,BBB},{MBM,BBM,BBB},{MBB,BMM,BMB},

{MBB,BMM,BBM},{MBB,BMM,BBB},{MBB,BMB,BBM},

{MBB,BMB,BBB},{MBB,BBM,BBB},{BMM,BMB,BBM},

{BMM,BMB,BBB},{BMM,BBM,BBB},{BMB,BBM,BBB},

A_M,{MMM,MMB,MBM,BMM},{MMM,MMB,MBM,BMB},

{MMM,MMB,MBM,BBM},{MMM,MMB,MBM,BBB},

{MMM,MMB,MBB,BMM},{MMM,MMB,MBB,BMB},

{MMM,MMB,MBB,BBM},{MMM,MMB,MBB,BBB},C_M,

{MMM,MMB,BMM,BBM},{MMM,MMB,BMM,BBB},

{MMM,MMB,BMB,BBM},{MMM,MMB,BMB,BBB},

{MMM,MMB,BBM,BBB},{MMM,MBM,MBB,BMM},

{MMM,MBM,MBB,BMB},{MMM,MBM,MBB,BBM},

{MMM,MBM,MBB,BBB},{MMM,MBM,BMM,BMB},

D_M,{MMM,MBM,BMM,BBB},{MMM,MBM,BMB,BBM},

{MMM,MBM,BMB,BBB},{MMM,MBM,BBM,BBB},

{MMM,MBB,BMM,BMB},{MMM,MBB,BMM,BBM},

{MMM,MBB,BMM,BBB},{MMM,MBB,BMB,BBM},

{MMM,MBB,BMB,BBB},{MMM,MBB,BBM,BBB},

{MMM,BMM,BMB,BBM},{MMM,BMM,BMB,BBB},

{MMM,BMM,BBM,BBB},{MMM,BMB,BBM,BBB},

{MMB,MBM,MBB,BMM},{MMB,MBM,MBB,BMB},

{MMB,MBM,MBB,BBM},{MMB,MBM,MBB,BBB},

{MMB,MBM,BMM,BMB},{MMB,MBM,BMM,BBM},

{MMB,MBM,BMM,BBB},{MMB,MBM,BMB,BBM},

{MMB,MBM,BMB,BBB},{MMB,MBM,BBM,BBB},

{MMB,MBB,BMM,BMB},{MMB,MBB,BMM,BBM},

{MMB,MBB,BMM,BBB},{MMB,MBB,BMB,BBM}, D_B,

{MMB,MBB,BBM,BBB},{MMB,BMM,BMB,BBM},

{MMB,BMM,BMB,BBB},{MMB,BMM,BBM,BBB},

{MMB,BMB,BBM,BBB},{MBM,MBB,BMM,BMB},

{MBM,MBB,BMM,BBM},{MBM,MBB,BMM,BBB},

{MBM,MBB,BMB,BBM},{MBM,MBB,BMB,BBB},C_B,

{MBM,BMM,BMB,BBM},{MBM,BMM,BMB,BBB},

{MBM,BMM,BBM,BBB},{MBM,BMB,BBM,BBB},

{MBB,BMM,BMB,BBM},{MBB,BMM,BMB,BBB},

{MBB,BMM,BBM,BBB},{MBB,BMB,BBM,BBB}, $A_{B,}$

{MMM,MMB,MBM,MBB,BMM},{MMM,MMB,MBM,MBB,BMB},

{MMM,MMB,MBM,MBB,BBM},{MMM,MMB,MBM,MBB,BBB},

{MMM,MMB,MBM,BMM,BMB},{MMM,MMB,MBM,BMM,BBM},

{MMM,MMB,MBM,BMM,BBB},{MMM,MMB,MBM,BMB,BBM},

{MMM,MMB,MBM,BMB,BBB},{MMM,MMB,MBM,BBM,BBB},

{MMM,MMB,MBB,BMM,BMB},{MMM,MMB,MBB,BMM,BBM},

{MMM,MMB,MBB,BMM,BBB},{MMM,MMB,MBB,BMB,BBM},

{MMM,MMB,MBB,BMB,BBB},{MMM,MMB,MBB,BBM,BBB},

{MMM,MMB,BMM,BMB,BBM},{MMM,MMB,BMM,BMB,BBB},

{MMM,MMB,BMM,BBM,BBB},{MMM,MMB,BMB,BBM,BBB},

{MMM,MBM,MBB,BMM,BMB},{MMM,MBM,MBB,BMM,BBM},

{MMM,MBM,MBB,BMM,BBB},{MMM,MBM,MBB,BMB,BBM},

{MMM,MBM,MBB,BMB,BBB},{MMM,MBM,MBB,BBM,BBB},

{MMM,MBM,BMM,BMB,BBM},{MMM,MBM,BMM,BMB,BBB},

{MMM,MBM,BMM,BBM,BBB},{MMM,MBM,BMB,BBM,BBB},

{MMM,MBB,BMM,BMB,BBM},{MMM,MBB,BMM,BMB,BBB},

{MMM,MBB,BMM,BBM,BBB},{MMM,MBB,BMB,BBM,BBB},

{MMM,BMM,BMB,BBM,BBB},{MMB,MBM,MBB,BMM,BMB},

{MMB,MBM,MBB,BMM,BBM},{MMB,MBM,MBB,BMM,BBB},

{MMB,MBM,MBB,BMB,BBM},{MMB,MBM,MBB,BMB,BBB},

{MMB,MBM,MBB,BBM,BBB},{MMB,MBM,BMM,BMB,BBM},

{MMB,MBM,BMM,BMB,BBB},{MMB,MBM,BMM,BBM,BBB},

{MMB,MBM,BMB,BBM,BBB},{MMB,MBB,BMM,BMB,BBM},

{MMB,MBB,BMM,BMB,BBB},{MMB,MBB,BMM,BBM,BBB},

{MMB,MBB,BMB,BBM,BBB},{MMB,BMM,BMB,BBM,BBB},

{MBM,MBB,BMM,BMB,BBM},{MBM,MBB,BMM,BMB,BBB},

{MBM,MBB,BMM,BBM,BBB},{MBM,MBB,BMB,BBM,BBB},

{MBM,BMM,BMB,BBM,BBB},{MBB,BMM,BMB,BBM,BBB},

{MMM,MMB,MBM,MBB,BMM,BMB},

{MMM,MMB,MBM,MBB,BMM,BBM},

{MMM,MMB,MBM,MBB,BMM,BBB},

{MMM,MMB,MBM,MBB,BMB,BBM},

{MMM,MMB,MBM,MBB,BMB,BBB},

{MMM,MMB,MBM,MBB,BBM,BBB},

{MMM,MMB,MBM,BMM,BMB,BBM},

{MMM,MMB,MBM,BMM,BMB,BBB},

{MMM,MMB,MBM,BMM,BBM,BBB},

{MMM,MMB,MBM,BMB,BBM,BBB},

{MMM,MMB,MBB,BMM,BMB,BBM},

{MMM,MMB,MBB,BMM,BMB,BBB},

{MMM,MMB,MBB,BMM,BBM,BBB},

{MMM,MMB,MBB,BMB,BBM,BBB},

{MMM,MMB,BMM,BMB,BBM,BBB},

{MMM,MBM,MBB,BMM,BMB,BBM},

{MMM,MBM,MBB,BMM,BMB,BBB},

{MMM,MBM,MBB,BMM,BBM,BBB},

{MMM,MBM,MBB,BMB,BBM,BBB},

{MMM,MBM,BMM,BMB,BBM,BBB},

{MMM,MBB,MBB,BMB,BBM,BBB},

{MMB,MBM,MBB,BMM,BMB,BBM},

{MMB,MBM,MBB,BMM,BMB,BBB},

{MMB,MBM,MBB,BMM,BBM,BBB},

{MMB,MBM,MBB,BMB,BBM,BBB},

{MMB,MBM,BMM,BMB,BBM,BBB},

{MMB,MBB,BMM,BMB,BBM,BBB},

{MBM,MBB,BMM,BMB,BBM,BBB},

{MMM,MMB,MBM,MBB,BMM,BMB,BBM},

{MMM,MMB,MBM,MBB,BMM,BMB,BBB},

{MMM,MMB,MBM,MBB,BMM,BBM,BBB},

{MMM,MMB,MBM,MBB,BMB,BBM,BBB},

{MMM,MMB,MBM,BMM,BMB,BBM,BBB},

{MMM,MMB,MBB,BMM,BMB,BBM,BBB},

{MMM,MBM,MBB,BMM,BMB,BBM,BBB},

{MMB,MBM,MBB,BMM,BMB,BBM,BBB}}

Koleksi himpunan $\mathcal{F}$ diatas merupakan sebuah σ-aljabar yang berisi seluruh informasi mengenai hasil eksperimen acak dari pelantunan koin sebanyak tiga kali. Karena setiap unsur di $\mathcal{F}$ disebut sebagai kejadian (event) maka untuk membantu mempersingkat penulisan ada beberapa unsur yang bisa dinyatakan sebagai suatu kejadian tertentu, sebagai berikut:

1. Kejadian yang menyatakan bahwa lantunan pertama menghasilkan muka adalah

$$A_M = \{MMM, MMB, MBM, MBB\}$$

2. Kejadian yang menyatakan bahwa lantunan pertama menghasilkan belakang adalah

$$A_B = \{BMM, BMB, BBM, BBB\}$$

3. Kejadian yang menyatakan bahwa lantunan kedua menghasilkan muka adalah

$$C_M = \{MMM, MMB, BMM, BMB\}$$

4. Kejadian yang menyatakan bahwa lantunan kedua menghasilkan belakang adalah

$$C_B = \{MBM, MBB, BBM, BBB\}$$

5. Kejadian yang menyatakan bahwa lantunan ketiga menghasilkan muka adalah

$$D_M = \{MMM, MBM, BMM, BBM\}$$

6. Kejadian yang menyatakan bahwa lantunan ketiga menghasilkan belakang adalah

$$D_B = \{MMB, MBB, BMB, BBB\}$$

7. Kejadian yang menyatakan bahwa lantunan pertama dan kedua menghasilkan muka adalah

$$E_M = \{MMM, MMB\}$$

8. Kejadian yang menyatakan bahwa lantunan pertama dan kedua menghasilkan belakang adalah

$$E_B = \{BBM, BBB\}$$

9. Kejadian yang menyatakan bahwa lantunan pertama dan ketiga menghasilkan muka adalah

$$F_M = \{MMM, MBM\}$$

10. Kejadian yang menyatakan bahwa lantunan pertama dan ketiga menghasilkan belakang adalah

$$F_B = \{BMB, BBB\}$$

11. Kejadian yang menyatakan bahwa lantunan kedua dan ketiga menghasilkan muka adalah

$$G_M = \{MMM, BMM\}$$

12. Kejadian yang menyatakan bahwa lantunan kedua dan ketiga menghasilkan belakang adalah

$$G_B = \{MBB, BBB\}$$

Setiap unsur dari Ω akan dinyatakan dengan ω. Selanjutnya akan dimisalkan variabel acak S_1 menyatakan nilai saham pada akhir periode pertama, yaitu

$$S_1(\omega) = \begin{cases} 8, & bila \quad \omega \in \{MMM, MMB, MBM, MBB\} \\ 2, & bila \quad \omega \in \{BMM, BMB, BBM, BBB\} \end{cases}$$

sedangkan variabel acak S_2 menyatakan nilai saham pada akhir periode kedua, yaitu

$$S_2(\omega) = \begin{cases} 16, & bila \quad \omega \in \{MMM, MMB\} \\ 4, & bila \quad \omega \in \{MBM, MBB, BMM, BMB\} \\ 1, & bila \quad \omega \in \{BBM, BBB\} \end{cases}$$

dan variabel acak S_3 menyatakan nilai saham pada akhir periode ketiga, yaitu

$$S_3(\omega) = \begin{cases} 32, & bila \quad \omega \in \{MMM\} \\ 8, & bila \quad \omega \in \{MMB, MBM, BMM\} \\ 2, & bila \quad \omega \in \{MBB, BMB, BBM\} \\ \dfrac{1}{2}, & bila \quad \omega \in \{BBB\} \end{cases}$$

Tetapi sebelumnya akan dibuktikan terlebih dahulu bahwa S_1, S_2, dan S_3 adalah variabel acak. Untuk membuktikannya digunakan definisi dari variabel acak sebagai berikut dan akan diperiksa bahwa S_1, S_2, dan S_3 adalah variabel acak untuk $A \in B(\Re)$.

Definisi:

Misal $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ adalah suatu ruang probabilitas. Suatu fungsi $X : \Omega \to \mathbb{R}$ akan disebut $\mathcal{F}$-terukur bila f^{-1} : ß($\mathbb{R}$) $\to \mathcal{F}$ atau $f^{-1}(ß) = \{\omega : f(\omega) \in ß\} \in \mathcal{F}$

$$S_i^{-1}(\mathrm{A}) = \{\omega : S_i(\omega) \in A\} \quad \text{dimana } i = 1, 2, 3$$

1. Pembuktian S_1 adalah variabel acak,

$$S_1^{-1}(\omega) = \begin{cases} \{MMM, MMB, MBM, MBB\} & jika \quad 8 \in A, 2 \notin A \\ \{BMM, BMB, BBM, BBB\} & jika \quad 8 \notin A, 2 \in A \\ \Omega & jika \quad 8, 2 \in A \\ \varnothing & jika \quad 8, 2 \notin A \end{cases}$$

2. Pembuktian S_2 adalah variabel acak,

$$S_1^{-1}(\omega) = \begin{cases} \{MMM, MMB\} & jika \quad 16 \in A; 4,1 \notin A \\ \{MBM, MBB, BMM, BMB\} & jika \quad 4 \in A; 16,1 \notin A \\ \{BBM, BBB\} & jika \quad 1 \in A; 16, 4 \notin A \\ \{MMM, MMB, MBM, MBB, BMM, BMB\} & jika \quad 16, 4 \in A; 1 \notin A \\ \{MMM, MMB, BBM, BBB\} & jika \quad 16,1 \in A; 4 \notin A \\ \{MBM, MBB, BMM, BMB, BBM, BBB\} & jika \quad 4,1 \in A; 16 \notin A \\ \Omega & jika \quad 16, 4,1 \in A \\ \varnothing & jika \quad 16, 4,1 \notin A \end{cases}$$

3. Pembuktian S_3 adalah variabel acak,

$$S_3^{-1}(\omega)=\begin{cases} \{MMM\} & jika\ \ 32\in A;\ \ 8,2,\frac{1}{2}\notin A\\ \{MMB,MBM,BMM\} & jika\ \ 8\in A;\ \ 32,2,\frac{1}{2}\notin A\\ \{MBB,BMB,BBM\} & jika\ \ 2\in A;\ \ 32,8,\frac{1}{2}\notin A\\ \{BBB\} & jika\ \ \frac{1}{2}\in A;\ \ 32,8,2\notin A\\ \{MMM,MMB,MBM,BMM\} & jika\ \ 32,8\in A;\ \ 2,\frac{1}{2}\notin A\\ \{MMM,MBB,BMB,BBM\} & jika\ \ 32,2\in A;\ \ 8,\frac{1}{2}\notin A\\ \{MMM,BBB\} & jika\ \ 32,\frac{1}{2}\in A;\ \ 8,2\notin A\\ \{MMB,MBM,BMM,MBB,BMB,BBM\} & jika\ \ 8,2\in A;\ \ 32,\frac{1}{2}\notin A\\ \{MMB,MBM,BMM,BBB\} & jika\ \ 8,\frac{1}{2}\in A;\ \ 32,2\notin A\\ \{MBB,BMB,BBM,BBB\} & jika\ \ 2,\frac{1}{2}\in A;\ \ 32,8\notin A\\ \left\{\begin{matrix}MMM,MMB,MBM,BMM,\\ MBB,BMB,BBM\end{matrix}\right\} & jika\ \ 32,8,2\in A;\ \ \frac{1}{2}\notin A\\ \{MMM,MMB,MBM,BMM,BBB\} & jika\ \ 32,8,\frac{1}{2}\in A;\ \ 2\notin A\\ \{MMM,MBB,BMB,BBM,BBB\} & jika\ \ 32,2,\frac{1}{2}\in A;\ \ 8\notin A\\ \left\{\begin{matrix}MMB,MBM,BMM,MBB,\\ BMB,BBM,BBB\end{matrix}\right\} & jika\ \ 8,2,\frac{1}{2}\in A;\ \ 32\notin A\\ \Omega & jika\ \ 32,8,2,\frac{1}{2}\in A\\ \varnothing & jika\ \ 32,8,2,\frac{1}{2}\notin A \end{cases}$$

Apabila didefinisikan X sebagai variabel acak yang menyatakan jumlah muka di dalam pelantunan sebuah koin sebanyak tiga kali maka distribusi dari X adalah Binomial b(2,p) dengan p adalah peluang muka M akan keluar dari setiap pelantunan koin. Sehingga bisa dipahami bahwa sekalipun X dan S_3 adalah dua buah variabel acak yang berbeda namun keduanya memiliki distribusi yang sama.

$$P(X=3)=P(S_3=32)=\binom{3}{3}\cdot p^3\cdot q^{3-3}=p^3$$

Fitriani Agustina
Jurusan Pendidikan Matematika
UPI

$$P(X=2)=P(S_3=8)=\binom{3}{2}\cdot p^2\cdot q^{3-2}=3\,p^2\,q$$

$$P(X=1)=P(S_3=2)=\binom{3}{1}\cdot p^1\cdot q^{3-1}=3\,p\,q^2$$

$$P(X=0)=P\left(S_3=\frac{1}{2}\right)=\binom{3}{0}\cdot p^0\cdot q^{3-0}=q^3$$

Selanjutnya akan dicari σ-aljabar yang dibangkitkan oleh S_1, S_2, dan S_3.

1. Atom-atom dari $\sigma(S_1)$ terdiri dari:

$$\{S_1^{-1}(8)\}=\{\omega : S_1(\omega)=8\}=\{MMM, MMB, MBM, MBB\}$$
$$\{S_1^{-1}(2)\}=\{\omega : S_1(\omega)=2\}=\{BMM, BMB, BBM, BBB\}$$

sehingga σ-aljabar yang dibangkitkan oleh S_1, yaitu $\sigma(S_1)$, dapat dibentuk melalui operasi himpunan terhadap atom-atom tersebut diatas.

$$\sigma(S_1)=\{\Omega, \varnothing, \{MMM, MMB, MBM, MBB\}, \{BMM, BMB, BBM, BBB\}\}$$

2. Atom-atom dari $\sigma(S_2)$ terdiri dari:

$$\{S_2^{-1}(16)\}=\{\omega : S_2(\omega)=16\}=\{MMM, MMB\}$$
$$\{S_2^{-1}(4)\}=\{\omega : S_2(\omega)=4\}=\{MBM, MBB, BMM, BMB\}$$
$$\{S_2^{-1}(1)\}=\{\omega : S_2(\omega)=1\}=\{BBM, BBB\}$$

sehingga σ-aljabar yang dibangkitkan oleh S_2, yaitu $\sigma(S_2)$, dapat dibentuk melalui operasi himpunan terhadap atom-atom tersebut diatas.

$$\sigma(S_2)=\left\{\begin{array}{l}\Omega, \varnothing, \{MMM, MMB\}, \{MBM, MBB, BMM, BMB\}, \{BBM, BBB\}, \\ \{MBM, MBB, BMM, BMB, BBM, BBB\}, \{MMM, MMB, BBM, BBB\}, \\ \{MMM, MMB, MBM, MBB, BMM, BMB\},\end{array}\right\}$$

3. Atom-atom dari $\sigma(S_3)$ terdiri dari:

$$\{S_3^{-1}(32)\}=\{\omega : S_3(\omega)=32\}=\{MMM\}$$
$$\{S_3^{-1}(8)\}=\{\omega : S_3(\omega)=8\}=\{MMB, MBM, BMM\}$$
$$\{S_3^{-1}(2)\}=\{\omega : S_3(\omega)=2\}=\{MBB, BBM, BBM\}$$
$$\left\{S_3^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right\}=\left\{\omega : S_3(\omega)=\frac{1}{2}\right\}=\{BBB\}$$

sehingga σ-aljabar yang dibangkitkan oleh S_3, yaitu $\sigma(S_3)$, dapat dibentuk melalui operasi himpunan terhadap atom-atom tersebut diatas.

$$\sigma(S_3)=\left\{\begin{array}{l}\Omega,\varnothing,\{MMM\},\{MMB,MBM,BMM\},\{MBB,BMB,BBM\},\\ \{BBB\},\{MMB,MBM,MBB,BMM,BMB,BBM,BBB\},\\ \{MMM,MBB,BMB,BBM,BBB\},\\ \{MMM,MMB,MBM,BMM,BBB\},\\ \{MMM,MMB,MBM,MBB,BMM,BMB,BBM\},\\ \{MMM,MMB,MBM,BMM\},\{MBB,BMB,BBM,BBB\},\\ \{MMM,MBB,BMB,BBM\},\{MMB,MBM,BMM,BBB\}\end{array}\right\}$$

Setelah memperoleh σ-aljabar yang dibangkitkan oleh S_1, S_2, dan S_3 yaitu $\sigma(S_1)$, $\sigma(S_2)$, dan $\sigma(S_3)$, langkah selanjutnya adalah mencari σ-aljabar yang dibangkitkan oleh S_1 dan S_2, yaitu $\sigma(S_1,S_2)$, σ-aljabar yang dibangkitkan oleh S_1 dan S_3 yaitu $\sigma(S_1,S_3)$, dan σ-aljabar yang dibangkitkan oleh S_2 dan S_3 yaitu $\sigma(S_2,S_3)$.

Seperti halnya pada saat mencari σ-aljabar yang dibangkitkan oleh S_1, S_2, dan S_3, terlebih dahulu ditentukan atom-atom yang membangun σ-aljabar yang akan dicari tersebut.

σ-aljabar yang dibangkitkan oleh S_1 dan S_2 dibangun dari gabungan atom-atom dari S_1 dan atom-atom dari S_2 dan dilanjutkan dengan operasi himpunan pada koleksi himpunan atom-atom tersebut. Atom-atom dari $\sigma(S_1,S_2)$ terdiri dari:

{MMM,MMB,MBM,MBB},{BMM,BMB,BBM,BBB},{MMM,MMB},
{MBM,MBB,BMM,BMB},{BBM,BBB}

sehingga σ-aljabar yang dibangkitkan oleh S_1 dan S_2, yaitu $\sigma(S_1,S_2)$, dapat dibentuk melalui operasi himpunan terhadap atom-atom tersebut diatas.

$$\sigma(S_1,S_2)=\left\{\begin{array}{l}\Omega,\varnothing,\{MMM,MMB\},\{BBM,BBB\},\{BMM,BMB\},\\ \{MBM,MBB\},\{MMM,MMB,MBM,MBB\},\\ \{BMM,BMB,BBM,BBB\},\{MBM,MBB,BMM,BMB\},\\ \{MMM,MMB,BBM,BBB\},\\ \{MBM,MBB,BMM,BMB,BBM,BBB\},\\ \{MMM,MMB,MBM,MBB,BMM,BMB\},\\ \{MMM,MMB,MBM,MBB,BBM,BBB\},\\ \{MMM,MMB,BMM,BMB,BBM,BBB\}\end{array}\right\}$$

σ-aljabar yang dibangkitkan oleh S_1 dan S_3 dibangun dari gabungan atom-atom dari S_1 dan atom-atom dari S_3 dan dilanjutkan dengan operasi himpunan pada koleksi himpunan atom-atom tersebut. Atom-atom dari $\sigma(S_1,S_3)$ terdiri dari:

{MMM},{MMB,MBM,BMM},{MBB,BMB,BBM},{BBB},
{MMM,MMB,MBM,MBB},{BMM,BMB,BBM,BBB},

sehingga σ-aljabar yang dibangkitkan oleh S_1 dan S_3 yaitu $\sigma(S_1,S_3)$, dapat dibentuk melalui operasi himpunan terhadap atom-atom tersebut diatas.

$$\sigma(S_1, S_3) = \left\{ \begin{array}{l} \Omega, \varnothing, \{\mathrm{MMM}, \mathrm{MMB}, \mathrm{MBM}, \mathrm{MBB}\}, \\ \{\mathrm{BMM}, \mathrm{BMB}, \mathrm{BBM}, \mathrm{BBB}\}, \{\mathrm{MMM}\}, \\ \{\mathrm{MMB}, \mathrm{MBM}, \mathrm{BMM}\}, \{\mathrm{MBB}, \mathrm{BMB}, \mathrm{BBM}\}, \{\mathrm{BBB}\}, \\ \{\mathrm{MMM}, \mathrm{MMB}, \mathrm{MBM}, \mathrm{MBB}, \mathrm{BMM}\}, \\ \{\mathrm{MMM}, \mathrm{MMB}, \mathrm{MBM}, \mathrm{MBB}, \mathrm{BMB}, \mathrm{BBM}\}, \\ \{\mathrm{MMM}, \mathrm{MMB}, \mathrm{MBM}, \mathrm{MBB}, \mathrm{BBB}\} \\ \{\mathrm{MMM}, \mathrm{MMB}, \mathrm{MBM}, \mathrm{BMM}\}, \{\mathrm{MMM}, \mathrm{MBB}, \mathrm{BMB}, \mathrm{BBM}\}, \\ \{\mathrm{MMB}, \mathrm{MBM}, \mathrm{MBB}, \mathrm{BMM}, \mathrm{BMB}, \mathrm{BBM}, \mathrm{BBB}\}, \\ \{\mathrm{MMM}, \mathrm{MBB}, \mathrm{BMB}, \mathrm{BBM}, \mathrm{BBB}\}, \\ \{\mathrm{MMM}, \mathrm{MMB}, \mathrm{MBM}, \mathrm{BMM}, \mathrm{BBB}\} \\ \{\mathrm{MMM}, \mathrm{MMB}, \mathrm{MBM}, \mathrm{MBB}, \mathrm{BMM}, \mathrm{BMB}, \mathrm{BBM}\} \\ \{\mathrm{BMB}, \mathrm{BBM}, \mathrm{BBB}\}, \{\mathrm{BMM}, \mathrm{BBB}\}, \{\mathrm{BMM}, \mathrm{BMB}, \mathrm{BBM}\}, \\ \{\mathrm{MBB}, \mathrm{BMB}, \mathrm{BBM}, \mathrm{BBB}\}, \{\mathrm{MMB}, \mathrm{MBM}, \mathrm{BMM}, \mathrm{BBB}\}\} \end{array} \right\}$$

Untuk eksperimen lantunan koin sebanyak tiga kali ini akan dihitung nilai ekspektasi dari masing-masing S_1, S_2, dan S_3.

1. Ekspektasi $E(S_1)$ adalah

$$E(S_1) = \int_{\Omega} S_1 \, dP$$

$$\begin{aligned} E(S_1) &= \sum_{i=1}^{2} \alpha_i \, P(A_i) \\ &= 8 \cdot P(\{MMM, MMB, MBM, MBB\}) + 2 \cdot P(\{BMM, BMB, BBM, BBB\}) \\ &= 8 \cdot \left(p^3 + 2p^2q + pq^2\right) + 2 \cdot \left(p^2q + 2pq^2 + q^3\right) \\ &= 8p^3 + 18p^2q + 12pq^2 + 2q^3 \\ &= 4p^3 + 9p^2q + 6pq^2 + q^3 \end{aligned}$$

2. Ekspektasi E(S_2) adalah

$$E(S_2)=\int_{\Omega} S_2\ dP$$

$$\begin{aligned}
E(S_2) &= \sum_{i=1}^{3}\alpha_i\ P(A_i) \\
&= \begin{bmatrix} 16\cdot P(\{MMM, MMB\})+4\cdot P(\{MBM, MBB, BMM, BMB\})+ \\ 1\cdot P(\{BBM, BBB\}) \end{bmatrix} \\
&= 16\cdot\left(p^3+p^2q\right)+4\cdot\left(2p^2q+2pq^2\right)+1\left(pq^2+q^3\right) \\
&= 16p^3+24p^2q+9pq^2+q^3
\end{aligned}$$

3. Ekspektasi E(S_3) adalah

$$E(S_3)=\int_{\Omega} S_3\ dP$$

$$\begin{aligned}
E(S_3) &= \sum_{i=1}^{4}\alpha_i\ P(A_i) \\
&= \begin{bmatrix} 32\cdot P(\{MMM\})+8\cdot P(\{MMB, MBM, BMM\})+ \\ 2\cdot P(\{MBB, BMB, BBM,\})+\frac{1}{2}\cdot P(\{BBB\}) \end{bmatrix} \\
&= 16\cdot\left(p^3\right)+8\cdot\left(3p^2q\right)+2\left(3pq^2\right)+\frac{1}{2}\left(q^3\right) \\
&= 32p^3+24p^2q+6pq^2+\frac{1}{2}q^3
\end{aligned}$$

Untuk selanjutnya akan menghitung nilai dari

$$\int_{\Omega} X\ dP$$

dimana $X\ \sim\ Exp(1)$ denga pdf adalah sebagai berikut:

$$f(x)=\exp(-x)$$

$$\begin{aligned}
E[X] &= \lim_{n\to\infty} E[X_n] \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n\cdot 2^n}\left(\frac{i}{2^n}\right)\Delta_i\ P(\omega)
\end{aligned}$$

dengan

$$\Delta_i\ P(\omega)\ = P\left(\omega : \frac{i}{2^n}\le X(\omega)\le\frac{i+1}{2^n}\right)$$

$$= \int_{i/2^n}^{(i+1)/2^n} f_X(x)\,dx$$

$$= \int_{i/2^n}^{(i+1)/2^n} \exp(-x)\,dx$$

$$= \exp\left(-\frac{i}{2^n}\right) - \exp\left(-\frac{(i+1)}{2^n}\right)$$

sehingga

$$E[X] = \lim_{n\to\infty} E[X_n]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n\cdot 2^n} \left(\frac{i}{2^n}\right) \Delta_i\, P(\omega)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n\cdot 2^n} \left(\frac{i}{2^n}\right)\left[\exp\left(-\frac{i}{2^n}\right) - \exp\left(-\frac{(i+1)}{2^n}\right)\right]$$

terlebih dahulu akan dihitung nilai dari $\sum_{i=0}^{n\cdot 2^n} \left(\frac{i}{2^n}\right)\left[\exp\left(-\frac{i}{2^n}\right) - \exp\left(-\frac{(i+1)}{2^n}\right)\right]$ sebagai berikut:

$$\sum_{i=0}^{n\cdot 2^n} \left(\frac{i}{2^n}\right)\left[\exp\left(-\frac{i}{2^n}\right) - \exp\left(-\frac{(i+1)}{2^n}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2^n}\right)\left[\exp\left(-\frac{1}{2^n}\right) - \exp\left(-\frac{2}{2^n}\right)\right] + \left(\frac{2}{2^n}\right)\left[\exp\left(-\frac{2}{2^n}\right) - \exp\left(-\frac{3}{2^n}\right)\right] + \cdots +$$
$$\left(\frac{n\cdot 2^n}{2^n}\right)\left[\exp\left(-\frac{n\cdot 2^n - 1}{2^n}\right) - \exp\left(-\frac{n\cdot 2^n}{2^n}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2^n}\right)\left[\exp\left(-\frac{1}{2^n}\right)\right] + \left(\frac{1}{2^n}\right)\left[\exp\left(-\frac{2}{2^n}\right)\right] + \cdots + (n)[\exp(-n)] - n\cdot\exp\left[-n-2^{-n}\right]$$

dari hasil di atas dapat dilihat bahwa

$\left(\frac{1}{2^n}\right)\left[\exp\left(-\frac{1}{2^n}\right)\right] + \left(\frac{1}{2^n}\right)\left[\exp\left(-\frac{2}{2^n}\right)\right] + \cdots + (n)[\exp(-n)]$ merupakan suatu deret geometri sehingga dapat dicari nilai S_n yaitu

$$S_n = a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

diperoleh

$$S_n = \frac{1}{2^n}\exp\left(-\frac{1}{2^n}\right)\cdot\frac{\left[1-\exp\left(-\frac{1}{2^n}\right)^{n\cdot 2^n}\right]}{1-\exp\left(-\frac{1}{2^n}\right)}$$

$$= \frac{1}{2^n}\exp\left(-\frac{1}{2^n}\right)\cdot\frac{[1-\exp(-n)]}{1-\exp\left(-\frac{1}{2^n}\right)}$$

sehingga

$$\sum_{i=0}^{n\cdot 2^n}\left(\frac{i}{2^n}\right)\left[\exp\left(-\frac{i}{2^n}\right)-\exp\left(-\frac{(i+1)}{2^n}\right)\right]$$

$$=\left(\frac{1}{2^n}\right)\left[\exp\left(-\frac{1}{2^n}\right)\right]+\left(\frac{1}{2^n}\right)\left[\exp\left(-\frac{2}{2^n}\right)\right]+\cdots+ \ (n)[\exp(-n)]-n\cdot\exp\left[-n-2^{-n}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{2^n}\right)\left[\exp\left(-\frac{1}{2^n}\right)\right]\frac{[1-\exp(-n)]}{1-\exp\left(-\frac{1}{2^n}\right)}-n\cdot\exp\left[-n-2^{-n}\right]$$

maka

$$E[X] = \lim_{n\to\infty}E[X_n]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n\cdot 2^n}\left(\frac{i}{2^n}\right)\left[\exp\left(-\frac{i}{2^n}\right)-\exp\left(-\frac{(i+1)}{2^n}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2^n}\right)\left[\exp\left(-\frac{1}{2^n}\right)\right]\frac{[1-\exp(-n)]}{1-\exp\left(-\frac{1}{2^n}\right)}-n\cdot\exp\left[-n-2^{-n}\right]\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2^n}\right)\left[\exp\left(-\frac{1}{2^n}\right)\right]\frac{[1-\exp(-n)]}{1-\exp\left(-\frac{1}{2^n}\right)}\right]-\lim_{n\to\infty}\left[n\cdot\exp\left(-\left(n+2^{-n}\right)\right)\right]$$

akan kita hitung bagian per bagian sehingga akan dihitung nilai dari E[X]

- Bagian pertama yaitu

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2^n}\right)\left[\exp\left(-\frac{1}{2^n}\right)\right]\frac{[1-\exp(-n)]}{1-\exp\left(-\frac{1}{2^n}\right)}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{2^{-n}}{1-\exp\left(-\frac{1}{2^n}\right)}\right)\left[\exp\left(-\frac{1}{2^n}\right)(1-\exp(-n))\right]\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{2^{-n}}{1-\exp\left(-\frac{1}{2^n}\right)}\right)\right]\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\exp\left(-\frac{1}{2^n}\right)(1-\exp(-n))\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{2^{-n}}{1-\exp\left(-\frac{1}{2^n}\right)}\right)\right]\cdot\exp(0)(1-0)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{-2^{-n}\ \ln(2)}{-2^{-n}\ln(2)\exp\left(-\frac{1}{2^n}\right)}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\ \exp\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

$$=\exp\ (0)$$

$$=1$$

- Bagian kedua yaitu

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\cdot\exp\left(-\left(n+2^{-n}\right)\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{\exp\left(\left(n+2^{-n}\right)\right)}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1-2^n\ \ln(2)\exp\left(\left(n+2^{-n}\right)\right)}\right]$$

$$=0$$

Berdasarkan hasil dari bagian satu dan bagian dua diperoleh:

$$E[X]\quad=\lim_{n\to\infty}E[X_n]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n\cdot 2^n} \left(\frac{i}{2^n}\right)\left[\exp\left(-\frac{i}{2^n}\right) - \exp\left(-\frac{(i+1)}{2^n}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1}{2^n}\right)\left[\exp\left(-\frac{1}{2^n}\right)\right]\frac{[1-\exp(-n)]}{1-\exp\left(-\frac{1}{2^n}\right)}\right] - \lim_{n\to\infty}\left[n\cdot\exp\left(-\left(n+2^{-n}\right)\right)\right]$$

$$= 1 - 0$$

$$= 1$$