PENDAHULUAN PENGANTAR METODE SIMPLEKS

METODE SIMPLEKS (PRIMAL)

- Masalah Program Linear
- Masalah Program Linear dalam Bentuk Matriks
- Ketentuan dalam Bentuk Standar Masalah PL
- Bentuk Standar Masalah Program Linear
- Bentuk Standar Pembatas Linear
- Bentuk Standar Peubah Keputusan
- Bentuk Standar PL dalam Bentuk Matriks
- Solusi Basis dan Solusi Basis Fisibel
- Memperbaiki Nilai Fungsi Tujuan z
- Mengakhiri Perhitungan Simpleks

Masalah Program Linear

- Maksimasi (Minimasi) : $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

dengan pembatas linear

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \quad &(\leq,\ =,\ \geq)\ b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \quad &(\leq,\ =,\ \geq)\ b_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad &\qquad\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \quad &(\leq,\ =,\ \geq)\ b_m
\end{aligned}$$

dan pembatas tanda

$$x_j \geq 0, \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

Masalah PL dalam bentuk matriks

- Maksimasi (Minimasi) : $z = c_0^t \, x_0$

dengan pembatas linear dan pembatas tanda

$$A_0 \, x_0 = b \qquad\qquad x_0 \geq 0$$

dimana:

$$A_0 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad c_0 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad x_0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Ketentuan dalam Bentuk Standar Masalah PL

- Seluruh pembatas linear harus berbentuk persamaan dengan ruas kanan yang nonnegatif.
- Seluruh peubah keputusan harus merupakan peubah nonnegatif.
- Fungsi tujuan merupakan maksimasi /minimasi.

Beberapa hal yang dapat dilakukan untuk memperoleh bentuk standar masalah PL sesuai ketentuan di atas berkaitan dengan pembatas linear dan peubah keputusan.

Bentuk Standar Pembatas Linear

- Apabila pembatas linearnya bertanda ”≤”, maka pada ruas kiri pembatas linear perlu ditambahkan *slack variable*.
- Pembatas linear bertanda ”≤” berhubungan dengan penggunaan dan ketersediaan sumber daya, sehingga *slack variable* mewakili jumlah sumber daya yang tidak dipergunakan.
- Misalkan pembatas linear ke-*p* bertanda ”≤”, maka diperoleh bentuk standar:

$$a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n + x_{n+p} = b_p$$

dimana x_{n+p} merupakan *slack variable*

- Apabila pembatas linearnya bertanda ”≥”, maka pada ruas kiri pembatas linear perlu dikurangkan *surplus variable*.
- Pembatas linear bertanda ” ≥” berhubungan dengan persyaratan spesifikasi minimum, sehingga *surplus variable* mewakili jumlah kelebihan sesuatu dibandingkan dengan spesifikasi minimumnya.
- Misalkan pembatas linear ke-*q* bertanda ” ≥”, maka diperoleh bentuk standar:

$$a_{q1}x_1 + a_{q2}x_2 + \cdots + a_{qn}x_n - x_{n+q} = b_q$$

dimana x_{n+q} merupakan *surplus variable*

- Ruas kanan dari suatu persamaan dapat dijadikan bilangan nonnegatif dengan cara mengalikan kedua ruas dengan -1.
- Arah pertidaksamaan berubah apabila kedua ruas dikalikan dengan -1.
- Pembatas linear dengan pertidaksamaan yang ruas kirinya berada dalam tanda mutlak dapat diubah menjadi dua pertidaksamaan.

Bentuk Standar Peubah Keputusan

- Suatu peubah keputusan x_j yang tidak terbatas dalam tanda dapat dinyatakan sebagai dua peubah keputusan nonnegatif dengan menggunakan substitusi:

$$x_j = x_j^1 - x_j^2$$

  dimana $x_j^1 \geq 0$ dan $x_j^2 \geq 0$. Selanjutnya substitusi ini harus dilakukan pada seluruh pembatas linear dan fungsi tujuannya.
- Oleh karena itu bentuk standar masalah PL dinyatakan dalam bentuk matriks adalah:

Bentuk Standar Masalah PL dalam Bentuk Matriks

- Misalkan terdapat *m* pembatas linear dimana sebanyak *g* pembatas linear dengan tanda "≤", dan sebanyak *h* pembatas linear dengan tanda "≥", maka dapat dinyatakan bahwa terdapat *(m – g – h)* pembatas linear dengan tanda "=".
- Maksimasi (Minimasi) :

$$z = c_0^t\, x_0 + c_s^t\, x_s$$

dengan pembatas linear dan pembatas tanda

$$Ax = b \qquad x \geq 0$$

Solusi Basis dan Solusi Basis Fisibel

- Bentuk standar pembatas linear adalah

$$Ax = b \qquad (1)$$

Persamaan (1) dapat dinyatakan dalam bentuk berikut ini:

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_N\alpha_N = b \qquad (2)$$

dimana $a_1, a_2, \cdots, a_N$ adalah vektor-vektor yang merupakan vektor kolom pada matriks **A** dengan orde $(m \times N)$ dimana $N = n + g + h$.

- Pada pembahasan ini diasumsikan bahwa persamaan (1) konsisten.

- Persamaan (1) diasumsikan bahwa $m < N$ dan $Rank(A) = m$ serta tiap peubah x_j secara tetap diasosiasikan berkoresponden dengan vektor kolom α_j.
- Apabila dipilih *m* vektor kolom yang membentuk matriks **A** adalah bebas linear, dan $(N - m)$ peubah lain yang berkoresponden dengan vektor-vektor yang tersisa pada matriks **A** tersebut mempunyai nilai nol, sehingga himpunan *m* persamaan simultan itu mempunyai penyelesaian tunggal yang dinamakan **penyelesaian dasar** (**solusi basis**).

- *m* peubah dari solusi basis yang berasosiasi dengan *m* vektor kolom yang bebas linear dinamakan **peubah dasar (*basic variable*/BV**),
- (N – m) peubah sisanya dinamakan **peubah nondasar (*nonbasic variable*/NBV)** pada umumnya ditetapkan **bernilai nol**.
- Apabila terdapat satu/lebih BV yang bernilai nol maka masalah program linear tersebut dinamakan degenerasi dan BV yang bernilai nol dinamakan peubah degenerasi.
- Jika seluruh peubah pada suatu solusi basis bernilai nonnegatif, maka solusi itu dinamakan **solusi basis fisibel** (BFS).

KLIK

Memperbaiki nilai fungsi tujuan *z*

- Misalkan diberikan *z* tertentu sebagai solusi basis awal, maka pada iterasi berikutnya akan dicoba untuk memperoleh solusi basis fisibel yang baru dengan nilai fungsi tujuan yang berubah.
- Apabila maksimasi $z = f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$ maka nilai *z* akan ditingkatkan dengan cara memperoleh solusi basis fisibel yang baru sampai mencapai nilai maksimum (optimal),dan berlaku sebaliknya untuk kasus minimasi.

- Misalkan untuk bentuk standar masalah PL diketahui solusi basis fisibel awalnya dan **B** merupakan matriks dengan orde (*m x m*) dimana kolom-kolom dari matriks **B** merupakan vektor basis, sehingga **B** dinamakan matriks basis yaitu suatu sub matriks dari matriks **A** yang non singular

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1(n+1)} & a_{1(n+2)} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2(n+1)} & a_{2(n+2)} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & a_{m(n+1)} & a_{m(n+2)} & \cdots & a_{mN} \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} a_{1(n+1)} & a_{1(n+2)} & \cdots & a_{1N} \\ a_{2(n+1)} & a_{2(n+2)} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m(n+1)} & a_{m(n+2)} & \cdots & a_{mN} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

- Ambil sembarang vektor basis x_B dan vektor harga dari peubah basis c_B , kemudian dari $Ax = b$ diidentifikasi sejumlah NBV dan BV dari persamaan awal yang merupakan solusi basis fisibel:

$$Bx_B = b \qquad \text{atau} \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{Bi}\, d_i = b$$

$$x_{B1}\, d_1 + \cdots + x_{Br}\, d_r + x_{Br+1}\, d_{r+1} + \cdots + x_{Bm}\, d_m = b$$

dan fungsi tujuannya adalah $z = c_B^t\, x_B$

dimana

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad x_B = \begin{bmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \\ \vdots \\ x_{Bm} \end{bmatrix}$$

- Perlu diingat bahwa **B** merupakan matriks berorde (*m x m*) dan $Rank(A) = m = Rank(B)$, hal ini berarti bahwa tiap kolom dari matriks **A** , yaitu α_j merupakan kombinasi linear dari kolom d_i pada matriks **B**. Hubungan tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\alpha_j = a_{1j}\, d_1 + \cdots + a_{mj}\, d_m$$

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^{m} d_i\, a_{ij}$$ atau $$\alpha_j = B\; a_j$$

dimana: $a_j = \begin{bmatrix} a_{1j} & \cdots & a_{mj} \end{bmatrix}^T$

- Solusi basis fisibel yang baru diperoleh dengan cara sederhana yaitu dengan hanya mengganti satu kolom matriks **B**.
- Matriks basis baru yang non singular dinotasikan dengan $\overline{B}$ yang dibentuk melalui perubahan kolom d_r dari matriks **B** dan penempatan kembali kolom α_k ($\alpha_k \neq 0$) dari matriks **A**. Dalam hal ini α_k dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $d_1, \cdots, d_m$:

$$\alpha_k = a_{1k}\, d_1 + \cdots + a_{rk}\, d_r + \cdots + a_{mk}\, d_m \qquad (3)$$

- apabila solusi persamaan (3) untuk d_r disubstitusi ke persamaan $\sum_{i=1}^{m} x_{Bi}\, d_i = b$ akan diperoleh solusi basis baru yaitu:

$$\sum_{\substack{i=1;\\ i\neq r}}^{m}\left(x_{Bi} - \frac{a_{ik}}{a_{rk}} x_{Br} \right) d_i + \frac{x_{Br}}{a_{rk}} \alpha_k = b$$

- Solusi basisnya harus fisibel, yaitu:

$$\bar{x}_{Bi} = \left(x_{Bi} - \frac{a_{ik}}{a_{rk}} x_{Br} \right) \geq 0 \quad \text{untuk} \quad \left(i = 1, \cdots, m \quad \text{dan} \quad i \neq r\right)$$

dimana:

$$\bar{x}_{Br} = \frac{x_{Br}}{a_{rk}} \geq 0 \qquad \frac{x_{Br}}{a_{rk}} = \min_{i=1,\cdots,m} \left\{ \frac{x_{Bi}}{a_{ik}}; \quad a_{ik} \geq 0 \right\} = \theta \geq 0$$

- Nilai fungsi tujuan dapat ditentukan oleh $\bar{z} > z$, dan untuk permasalahan memaksimumkan *z*, diperoleh

$$z = \sum_{i=1}^{m} c_{Bi} \; x_{Bi} \quad \text{dan} \quad \bar{z} = \sum_{i=1}^{m} \bar{c}_{Bi} \; \bar{x}_{Bi}$$

tetapi karena $\bar{c}_{Bi} = c_{Bi}$, $(i \neq r)$ dan $\bar{c}_{Br} = c_k$ maka diperoleh:

$$\bar{z} = z - \frac{x_{Br}}{a_{rk}}(z_k - c_k) = z - \theta(z_k - c_k)$$

dimana $z_k = \sum_{i=1}^{m} c_{Bi} \; a_{ik} = c_B^t \, a_i$ dan z_k adalah solusi basis fisibel untuk suatu *k* yang diberikan karena c_B dan a_k diketahui.

Mengakhiri perhitungan simpleks

Secara garis besar pada tiap iterasi metode simpleks, terdapat tiga aspek yang perlu diperhatikan, yaitu:

1. Vektor α_k (berkorespondensi dengan peubah x_k) adalah calon peubah untuk menjadi peubah masuk (*entering variable*/EV) pada matriks basis apabila *k* memenuhi syarat:

$$z_k - c_k = \min_{j=1,\cdots,N} \{z_j - c_j;\ z_j - c_j < 0\} \qquad \text{(a.1)}$$

- Penyataan $\bar{z} > z$ jika dan hanya jika $z_k - c_k < 0$ dan $\theta > 0$ menunjukkan bahwa dapat dipilih α_k vektor dari matriks **A** untuk masuk dalam matriks basis.
- Apabila terdapat lebih dari satu *k* yang menunjukkan bahwa $z_k - c_k < 0$ maka nilai *k* yang dipilih adalah nilai *k* yang menunjukkan $z_k - c_k < 0$ yang paling minimum.

2. Vektor d_r (berkorespondensi dengan peubah x_{Br}) akan menjadi peubah keluar (*leaving variable*/LV) meninggalkan matriks basis apabila r memenuhi syarat: (a.2)

$$\frac{x_{Br}}{a_{rk}} = \min_{i=1,\cdots,m} \left\{ \frac{x_{Bi}}{a_{ik}};\ a_{ik} > 0 \right\} = \theta \geq 0$$

3. Fungsi tujuan dapat diperbaiki (ditingkatkan apabila memaksimumkan) jika dan hanya jika $z_k - c_k < 0$ dan $\theta \geq 0$ dimana θ diperoleh pada aspek ke-2.

4. Apabila tidak ada *k* yang menunjukkan $z_k - c_k < 0$ Dengan kata lain terdapat nilai $z_k - c_k \geq 0$ untuk tiap kolom vektor α_j pada matriks **A**. Hal ini berarti bahwa nilai fungsi tujuan telah mencapai maksimum.

Untuk masalah program linear dengan maksimasi $z = c^t x$ dengan pembatas linear $Ax = b$ dan pembatas tanda $x \geq 0$. Misalkan solusi basis fisibel ada dan paling sedikit untuk satu nilai *k*, $z_k - c_k < 0$ dan $a_{ik} \geq 0$ untuk semua ($i = 1, \ldots, m$), maka masalah program linear tersebut mempunyai nilai tak tebatas untuk fungsi tujuannya.

Untuk masalah program linear dengan maksimasi $z = c^t x$ dengan pembatas linear $Ax = b$ dan pembatas tanda $x \geq 0$. Apabila pada solusi basis fisibel yang diperoleh terdapat $z_j - c_j \geq 0$ untuk tiap kolom α_j dari matriks **A** yang tidak terdapat pada matriks **B** maka solusi basis fisibelnya adalah optimal.