

TUGAS PROGRAM LINEAR

MODEL TRANSPORTASI

1. Untuk permasalahan model transportasi ini diperoleh informasi bahwa Pertamina mempunyai:

- ❖ 3 daerah penambangan minyak (sumber), yaitu:
 - a. Cepu (S_1) dengan kapasitas produksi 600.000 galon
 - b. Cilacap (S_2) dengan kapasitas produksi 500.000 galon
 - c. Cirebon (S_3) dengan kapasitas produksi 800.000 galon
 Total supply dari 3 sumber tersebut adalah 1.900.000 galon
- ❖ 3 daerah pemasaran (kota tujuan), yaitu
 - a. Semarang (T_1) dengan daya tampung sebanyak 400.000 galon
 - b. Jakarta (T_2) dengan daya tampung sebanyak 800.000 galon
 - c. Bandung (T_3) dengan daya tampung sebanyak 700.000 galon
 Total demand dari 3 tujuan tersebut adalah 1.900.000 galon
- ❖ Misalkan C_{ij} menyatakan ongkos pengangkutan dari sumber i ke tujuan j ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$), maka ongkos pengangkutan per 100.000 galon, adalah:
 - a. $C_{11} = \text{Rp } 120.000,-$
 - b. $C_{12} = \text{Rp } 180.000,-$
 - c. $C_{21} = \text{Rp } 300.000,-$
 - d. $C_{22} = \text{Rp } 100.000,-$
 - e. $C_{23} = \text{Rp } 80.000,-$
 - f. $C_{31} = \text{Rp } 200.000,-$
 - g. $C_{32} = \text{Rp } 250.000,-$
 - h. $C_{33} = \text{Rp } 120.000,-$
- ❖ Misalkan X_{ij} menyatakan banyaknya minyak yang harus didistribusikan dari sumber i untuk kota tujuan j . ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$).
- ❖ Formulasi untuk masalah program linear ini adalah:

Minimasi:

$$z = 120000x_{11} + 180000x_{12} + 300000x_{21} + 100000x_{22} + 80000x_{23} + 200000x_{31} + 250000x_{32} + 120000x_{33}$$

Pembatas linear:

Pembatas supply

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 600000$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 500000$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 800000$$

Pembatas demand

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 400000$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 800000$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 700000$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33} \geq 0$$

❖ Tabel transportasi awalnya adalah:

Karena total supply = total demand maka model transportasinya merupakan model transportasi seimbang.

Sumber	Tujuan			Supply
	Semarang	Jakarta	Bandung	
Cepu	12	18	M	6
Cilacap	30	10	8	5
Cirebon	20	25	12	8
Demand	4	8	7	

❖ Penentuan Solusi Layak dengan menggunakan metode:

➤ Metode *North Corner*

Sumber	Tujuan			Supply
	Semarang	Jakarta	Bandung	
Cepu	12 4	18	M	2
Cilacap	30	10	8	5
Cirebon	20	25	12	8
Demand		8	7	

Sumber	Tujuan			Supply
	Semarang	Jakarta	Bandung	
Cepu	12 4	18 2	M	
Cilacap	30	10	8	5
Cirebon	20	25	12	8
Demand		6	7	

Sumber	Tujuan			Supply
	Semarang	Jakarta	Bandung	
Cepu	12 4	18 2	M	
Cilacap	30	10 5	8	
Cirebon	20	25	12	8
Demand		1	7	

Sumber	Tujuan			Supply
	Semarang	Jakarta	Bandung	
Cepu	12	18	M	
	4	2		
Cilacap	30	10	8	
		5		
Cirebon	20	25	12	7
		1		
Demand			7	

Sumber	Tujuan			Supply
	Semarang	Jakarta	Bandung	
Cepu	12	18	M	
	4	2		
Cilacap	30	10	8	
		5		
Cirebon	20	25	12	
		1	7	
Demand				

Dengan menggunakan metode *North Corner*, diperoleh *Basic feasible solution*nya adalah $X_{11} = 4$, $X_{12} = 2$, $X_{22} = 5$, $X_{32} = 1$, dan $X_{33} = 7$. Berdasarkan itu maka diperoleh ongkos dari solusi layakanya adalah:

$$Z = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + C_{22}X_{22} + C_{32}X_{32} + C_{33}X_{33}$$

$$Z = (12.4) + (18.2) + (10.5) + (25.1) + (12.7)$$

$$Z = 48 + 36 + 50 + 25 + 84 = 243$$

Karena ongkos pengangkutan dalam puluhan ribu maka total ongkos pengangkutannya adalah Rp 2.430.000,-

Solusi ini sudah layak namun belum tentu optimal.

➤ Metode *Least Cost*

Sumber	Tujuan			Supply
	Semarang	Jakarta	Bandung	
Cepu	12	18	M	6
Cilacap	30	10	8	
		5		
Cirebon	20	25	12	8
Demand	4	3	7	

Sumber	Tujuan			Supply
	Semarang	Jakarta	Bandung	
Cepu	12	18	M	6
Cilacap	30	10	8	
		5		
Cirebon	20	25	12	1
			7	
Demand	4	3		

Sumber	Tujuan			Supply
	Semarang	Jakarta	Bandung	
Cepu	12	18	M	2
	4			
Cilacap	30	10	8	
		5		
Cirebon	20	25	12	1
			7	
Demand		3		

Sumber	Tujuan			Supply
	Semarang	Jakarta	Bandung	
Cepu	12	18	M	
	4	2		
Cilacap	30	10	8	
		5		
Cirebon	20	25	12	
		1	7	
Demand				

Dengan menggunakan metode *Least Corner*, diperoleh *Basic feasible solution*nya adalah $X_{11} = 4$, $X_{12} = 2$, $X_{22} = 5$, $X_{32} = 1$, dan $X_{33} = 7$. Berdasarkan itu maka diperoleh ongkos dari solusi layakannya adalah:

$$Z = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + C_{22}X_{22} + C_{32}X_{32} + C_{33}X_{33}$$

$$Z = (12.4) + (18.2) + (10.5) + (25.1) + (12.7)$$

$$Z = 48 + 36 + 50 + 25 + 84 = 243$$

Karena ongkos pengangkutan dalam puluhan ribu maka total ongkos pengangkutannya adalah Rp 2.430.000,-

Solusi ini sudah layak namun belum tentu optimal.

➤ Metode **Vogel**

Sumber	Tujuan			Penalty	Supply
	Semarang	Jakarta	Bandung		
Cepu	12	18	M	6	6
Cilacap	30	10	8	2	5
Cirebon	20	25	12	8	8
Penalty	8	8	8		
Demand	4	8	7		

Sumber	Tujuan			Penalty	Supply
	Semarang	Jakarta	Bandung		
Cepu	12	18	M	6	6
Cilacap	30	10	8	2	5
Cirebon	20	25	12	5	1
			7		
Penalty	8	8			
Demand	4	8			

Sumber	Tujuan			Penalty	Supply
	Semarang	Jakarta	Bandung		
Cepu	12	18	M	M-18	2
	4				
Cilacap	30	10	8	2	5
Cirebon	20	25	12	5	1
			7		
Penalty		8			
Demand		8			

Sumber	Tujuan			Penalty	Supply
	Semarang	Jakarta	Bandung		
Cepu	12	18	M		
	4	2			
Cilacap	30	10	8	2	5
Cirebon	20	25	12	5	1
			7		
Penalty		5			
Demand		6			

Sumber	Tujuan			Penalty	Supply
	Semarang	Jakarta	Bandung		
Cepu	12	18	M		
	4	2			
Cilacap	30	10	8		
		5			
Cirebon	20	25	12		
		1	7		
Penalty					
Demand		5			

Dengan menggunakan metode *Vogel*, diperoleh *Basic feasible solution*nya adalah $X_{11} = 4$, $X_{12} = 2$, $X_{22} = 5$, $X_{32} = 1$, dan $X_{33} = 7$. Berdasarkan itu maka diperoleh ongkos dari solusi layakanya adalah:

$$Z = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + C_{22}X_{22} + C_{32}X_{32} + C_{33}X_{33}$$

$$Z = (12.4) + (18.2) + (10.5) + (25.1) + (12.7)$$

$$Z = 48 + 36 + 50 + 25 + 84 = 243$$

Karena ongkos pengangkutan dalam puluhan ribu maka total ongkos pengangkutannya adalah Rp 2.430.000,-

Solusi ini sudah layak namun belum tentu optimal.

❖ Pengecekan Optimalitas dengan menggunakan *Stepping Stone*

Untuk kasus Pertamina, karena penyelesaian awal (bfs) yang ditentukan dengan 3 metode di atas menghasilkan solusi layak yang sama maka bebas dipilih 1 solusi layak dari 3 solusi yang diperoleh tersebut di atas. Misalkan yang diambil adalah penyelesaian awal (bfs) dengan menggunakan metode *Vogel*.

Peubah Basisnya adalah $\{X_{11}, X_{12}, X_{22}, X_{32}, X_{33}\}$

Peubah Nonbasisnya adalah $\{X_{13}, X_{21}, X_{23}, X_{31}\}$.

- $X_{13} = (+) X_{13} -- (-) X_{33} -- (+) X_{32} -- (-) X_{12} = 2 - 5 - 3 - 0$

- $X_{21} = (+) X_{21} -- (-) X_{11} -- (+) X_{12} -- (-) X_{22} = 4 - 0 - 6 - 1$

- $X_{23} = (+) X_{23} -- (-) X_{33} -- (+) X_{32} -- (-) X_{22} = 5 - 2 - 6 - 0$

- $X_{31} = (+) X_{31} -- (-) X_{11} -- (+) X_{12} -- (-) X_{32} = 1 - 3 - 3 - 0$

- $Z = C_{11}X_{11} + C_{13}X_{13} + C_{22}X_{22} + C_{32}X_{32} + C_{33}X_{33}$

$$Z = (12.4) + (M.2) + (10.5) + (25.3) + (12.5) = 2M + 233$$

$$\Delta Z_{13} = 2M + 233 - 243 = 2M - 10$$

- $Z = C_{21}X_{21} + C_{12}X_{12} + C_{22}X_{22} + C_{32}X_{32} + C_{33}X_{33}$

$$Z = (30.4) + (18.6) + (10.1) + (25.1) + (12.7) = 347$$

$$\Delta Z_{21} = 347 - 243 = 104$$

$$\circ Z = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + C_{23}X_{23} + C_{32}X_{32} + C_{33}X_{33}$$

$$Z = (12.4) + (18.2) + (8.5) + (25.6) + (12.2) = 336$$

$$\Delta Z_{23} = 336 - 243 = 93$$

$$\circ Z = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + C_{22}X_{22} + C_{31}X_{31} + C_{33}X_{33}$$

$$Z = (12.3) + (18.3) + (10.5) + (20.1) + (12.7) = 244$$

$$\Delta Z_{31} = 244 - 243 = 1$$

Karena semua ΔZ dari peubah nonbasis bernilai nonnegatif, dimana hal ini berarti setiap perubahan peubah nonbasis menjadi peubah basis hanya akan mengakibatkan penambahan ongkos pengangkutan, sehingga solusi layak yang telah diperoleh merupakan solusi layak yang optimal.

❖ Kesimpulan untuk masalah Pertamina, agar diperoleh ongkos yang paling minimum, maka hal yang perlu dilakukan oleh Pertamina adalah:

✚ Sumber Pertamina yang ada di Cepu itu mengirimkan 400.000 galon ke kota Semarang, dan 200.000 galon ke kota Jakarta.

✚ Sumber Pertamina yang ada di Cilacap itu hanya mengirimkan 500.000 galon ke kota Jakarta.

✚ Sumber Pertamina yang ada di Cirebon itu mengirimkan 100.000 galon ke kota Jakarta, dan 700.000 galon ke kota Bandung.

✚ Total ongkos pengangkutannya sebesar Rp 2.430.000,-

2. Untuk permasalahan model transportasi ini diperoleh informasi bahwa PN GIA mempunyai:

❖ 3 sumber bahan bakar, yaitu:

a. Pertamina I (S_1) dengan kapasitas produksi 275.000 galon

b. Pertamina II (S_2) dengan kapasitas produksi 550.000 galon

c. Pertamina III (S_3) dengan kapasitas produksi 660.000 galon

Total supply dari 3 sumber tersebut adalah 1.485.000 galon

❖ 4 bandar udara (tujuan), yaitu

a. Jakarta (T_1) dengan daya tampung sebanyak 440.000 galon

b. Bandung (T_2) dengan daya tampung sebanyak 330.000 galon

c. Cirebon (T_3) dengan daya tampung sebanyak 220.000 galon

d. Cilacap (T_4) dengan daya tampung sebanyak 110.000 galon

Total demand dari 4 tujuan tersebut adalah 1.100.000 galon

❖ Misalkan C_{ij} menyatakan ongkos pengangkutan dari sumber i ke tujuan j ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4$), maka ongkos pengangkutan per galon, adalah:

- a. $C_{11} = \text{Rp } 11.000,-$
- b. $C_{12} = \text{Rp } 9.000,-$
- c. $C_{13} = \text{Rp } 10.000,-$
- d. $C_{14} = \text{Rp } 10.000,-$
- e. $C_{21} = \text{Rp } 13.000,-$
- f. $C_{22} = \text{Rp } 12.000,-$
- g. $C_{23} = \text{Rp } 11.000,-$
- h. $C_{24} = \text{Rp } 7.000,-$
- i. $C_{31} = \text{Rp } 9.000,-$
- j. $C_{32} = \text{Rp } 4.000,-$
- k. $C_{33} = \text{Rp } 14.000,-$
- l. $C_{34} = \text{Rp } 8.000,-$

❖ Misalkan X_{ij} menyatakan banyaknya minyak yang harus didistribusikan dari sumber i untuk kota tujuan j . ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3, 4$).

❖ Formulasi untuk masalah program linear ini adalah:

Minimasi:

$$z = 11000x_{11} + 9000x_{12} + 10000x_{13} + 10000x_{14} + 13000x_{21} + 12000x_{22} + 11000x_{23} + 7000x_{24} + 9000x_{31} + 4000x_{32} + 14000x_{33} + 8000x_{34}$$

Pembatas linear:

Pembatas supply

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &\leq 275000 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &\leq 550000 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &\leq 660000 \end{aligned}$$

Pembatas demand

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &\geq 440000 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &\geq 330000 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &\geq 220000 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} &\geq 110000 \end{aligned}$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34} \geq 0$$

❖ Tabel transportasi awalnya adalah:

Karena total supply \neq total demand (total supply $>$ total demand), maka model transportasinya merupakan model transportasi tak seimbang sehingga untuk menjadikannya model model transportasi seimbang, pada tabel transportasinya perlu ditambahkan kolom dummy.

Sumber	Tujuan					Supply
	Jakarta	Bandung	Cirebon	Cilacap	Dummy	
Pertamina I	11	9	10	10	0	275000
Pertamina II	13	12	11	7	0	550000
Pertamina III	9	4	14	8	0	660000
Demand	440000	330000	220000	110000		

Untuk mempermudah perhitunga, pada tabel-tabel selanjutnya banyaknya supllly dan demand dinyatakan dalam ribuan galon.

❖ Penentuan Solusi Layak dengan menggunakan metode:

➤ Metode *North Corner*

Sumber	Tujuan					Supply
	Jakarta	Bandung	Cirebon	Cilacap	Dummy	
Pertamina I	11 275	9	10	10	0	
Pertamina II	13	12	11	7	0	550
Pertamina III	9	4	14	8	0	660
Demand	165	330	220	110	385	

Sumber	Tujuan					Supply
	Jakarta	Bandung	Cirebon	Cilacap	Dummy	
Pertamina I	11 275	9	10	10	0	
Pertamina II	13 165	12	11	7	0	385
Pertamina III	9	4	14	8	0	660
Demand		330	220	110	385	

Sumber	Tujuan					Supply
	Jakarta	Bandung	Cirebon	Cilacap	Dummy	
Pertamina I	11 275	9	10	10	0	
Pertamina II	13 165	12 330	11	7	0	55
Pertamina III	9	4	14	8	0	660
Demand			220	110	385	

Sumber	Tujuan					Supply
	Jakarta	Bandung	Cirebon	Cilacap	Dummy	
Pertamina I	11 275	9	10	10	0	
Pertamina II	13 165	12 330	11 55	7	0	
Pertamina III	9	4	14	8	0	660
Demand			165	110	385	

Sumber	Tujuan					Supply
	Jakarta	Bandung	Cirebon	Cilacap	Dummy	
Pertamina I	11 275	9	10	10	0	
Pertamina II	13 165	12 330	11 55	7	0	
Pertamina III	9	4	14 165	8	0	495
Demand				110	385	

Sumber	Tujuan					Supply
	Jakarta	Bandung	Cirebon	Cilacap	Dummy	
Pertamina I	11 275	9	10	10	0	
Pertamina II	13 165	12 330	11 55	7	0	
Pertamina III	9	4	14 165	8 110	0	385
Demand					385	

Sumber	Tujuan					Supply
	Jakarta	Bandung	Cirebon	Cilacap	Dummy	
Pertamina I	11 275	9	10	10	0	
Pertamina II	13 165	12 330	11 55	7	0	
Pertamina III	9	4	14 165	8 110	0 385	
Demand						

Dengan menggunakan metode *North Corner*, diperoleh *Basic feasible solution*nya adalah $X_{11} = 275$, $X_{21} = 165$, $X_{22} = 300$, $X_{23} = 55$, $X_{33} = 165$, $X_{34} = 110$, dan $X_{35} = 0$.

Berdasarkan itu maka diperoleh ongkos dari solusi layak adalah:

$$Z = C_{11}X_{11} + C_{21}X_{21} + C_{22}X_{22} + C_{23}X_{23} + C_{33}X_{33} + C_{34}X_{34} + C_{35}X_{35}$$

$$Z = (11.275) + (13.165) + (12.330) + (11.55) + (14.165) + (8.110) + (0.385)$$

$$Z = 3025 + 2145 + 3960 + 605 + 2310 + 880 + 0 = 12925$$

Karena ongkos pengangkutan dalam ribu dan banyaknya unit dalam ribuan galon, maka total ongkos pengangkutannya adalah Rp 12.925.000.000,-

Solusi ini sudah layak namun belum tentu optimal.

➤ Metode *Least Cost*

Sumber	Tujuan					Supply
	Jakarta	Bandung	Cirebon	Cilacap	Dummy	
Pertamina I	11	9	10	10	0	
					275	
Pertamina II	13	12	11	7	0	550
Pertamina III	9	4	14	8	0	660
Demand	440	330	220	110	110	

Sumber	Tujuan					Supply
	Jakarta	Bandung	Cirebon	Cilacap	Dummy	
Pertamina I	11	9	10	10	0	
					275	
Pertamina II	13	12	11	7	0	440
					110	
Pertamina III	9	4	14	8	0	660
Demand	440	330	220	110		

Sumber	Tujuan					Supply
	Jakarta	Bandung	Cirebon	Cilacap	Dummy	
Pertamina I	11	9	10	10	0	
					275	
Pertamina II	13	12	11	7	0	440
					110	
Pertamina III	9	4	14	8	0	330
		330				
Demand	440		220	110		

Sumber	Tujuan					Supply
	Jakarta	Bandung	Cirebon	Cilacap	Dummy	
Pertamina I	11	9	10	10	0	
					275	
Pertamina II	13	12	11	7	0	330
				110	110	
Pertamina III	9	4	14	8	0	330
		330				
Demand	440		220			

Sumber	Tujuan					Supply
	Jakarta	Bandung	Cirebon	Cilacap	Dummy	
Pertamina I	11	9	10	10	0	275
Pertamina II	13	12	11	7	0	330
Pertamina III	9	4	14	8	0	
Demand	110	330	220			

Sumber	Tujuan					Supply
	Jakarta	Bandung	Cirebon	Cilacap	Dummy	
Pertamina I	11	9	10	10	0	275
Pertamina II	13	12	11	7	0	330
Pertamina III	9	4	14	8	0	
Demand	110	330	220	110	110	

Sumber	Tujuan					Supply
	Jakarta	Bandung	Cirebon	Cilacap	Dummy	
Pertamina I	11	9	10	10	0	275
Pertamina II	13	12	11	7	0	330
Pertamina III	9	4	14	8	0	
Demand	110	330	220	110	110	

Dengan menggunakan metode *Least Corner*, diperoleh *Basic feasible solution*nya adalah $X_{15} = 275$, $X_{21} = 110$, $X_{23} = 220$, $X_{24} = 110$, $X_{25} = 110$, $X_{31} = 330$, dan $X_{32} = 330$.

Berdasarkan itu maka diperoleh ongkos dari solusi layak adalah:

$$Z = C_{15}X_{15} + C_{21}X_{21} + C_{23}X_{23} + C_{24}X_{24} + C_{25}X_{25} + C_{31}X_{31} + C_{32}X_{32}$$

$$Z = (0.275) + (13.110) + (11.220) + (7.110) + (0.110) + (9.330) + (4.330)$$

$$Z = 0 + 1430 + 2420 + 770 + 0 + 2970 + 1320 = 8910$$

Karena ongkos pengangkutan dalam ribu dan banyaknya unit dalam ribuan galon, maka total ongkos pengangkutannya adalah Rp 8.910.000.000,-

Solusi ini sudah layak namun belum tentu optimal.

➤ Metode **Vogel**

Sumber	Tujuan					Penalty	Supply
	Jakarta	Bandung	Cirebon	Cilacap	Dummy		
Pertamina I	11	9	10	10	0	9	275
Pertamina II	13	12	11	7	0	7	550
Pertamina III	9	4	14	8	0	4	660
Penalty	2	5	1	1	0		
Demand	440	330	220	110	385		

Sumber	Tujuan					Penalty	Supply
	Jakarta	Bandung	Cirebon	Cilacap	Dummy		
Pertamina I	11	9	10	10	0		
					275		
Pertamina II	13	12	11	7	0	7	550
Pertamina III	9	4	14	8	0	4	660
Penalty	2	5	1	1	0		
Demand	440	330	220	110	110		

Sumber	Tujuan					Penalty	Supply
	Jakarta	Bandung	Cirebon	Cilacap	Dummy		
Pertamina I	11	9	10	10	0		
					275		
Pertamina II	13	12	11	7	0	6	440
					110		
Pertamina III	9	4	14	8	0	4	660
Penalty	2	5	1	1			
Demand	440	330	220	110			

Sumber	Tujuan					Penalty	Supply
	Jakarta	Bandung	Cirebon	Cilacap	Dummy		
Pertamina I	11	9	10	10	0		
					275		
Pertamina II	13	12	11	7	0	1	330
				110	110		
Pertamina III	9	4	14	8	0	1	330
Penalty	2	5	1				
Demand	440	330	220				

Sumber	Tujuan					Penalty	Supply
	Jakarta	Bandung	Cirebon	Cilacap	Dummy		
Pertamina I	11	9	10	10	0		
					275		
Pertamina II	13	12	11	7	0	2	330
				110	110		
Pertamina III	9	4	14	8	0	1	330
		330					
Penalty	2		1				
Demand	440		220				

Sumber	Tujuan					Penalty	Supply
	Jakarta	Bandung	Cirebon	Cilacap	Dummy		
Pertamina I	11	9	10	10	0		
					275		
Pertamina II	13	12	11	7	0	2	330
				110	110		
Pertamina III	9	4	14	8	0		
	330	330					
Penalty	2		1				
Demand	110		220				

Sumber	Tujuan					Penalty	Supply
	Jakarta	Bandung	Cirebon	Cilacap	Dummy		
Pertamina I	11	9	10	10	0		
					275		
Pertamina II	13	12	11	7	0		
	110		220	110	110		
Pertamina III	9	4	14	8	0		
	330	330					
Penalty							
Demand							

Dengan menggunakan metode *Vogel*, diperoleh *Basic feasible solution*nya adalah $X_{15} = 275$, $X_{21} = 110$, $X_{23} = 220$, $X_{24} = 110$, $X_{25} = 110$, $X_{31} = 330$, dan $X_{32} = 330$.

Berdasarkan itu maka diperoleh ongkos dari solusi layak adalah:

$$Z = C_{15}X_{15} + C_{21}X_{21} + C_{23}X_{23} + C_{24}X_{24} + C_{25}X_{25} + C_{31}X_{31} + C_{32}X_{32}$$

$$Z = (0.275) + (13.110) + (11.220) + (7.110) + (0.110) + (9.330) + (4.330)$$

$$Z = 0 + 1430 + 2420 + 770 + 0 + 2970 + 1320 = 8910$$

Karena ongkos pengangkutan dalam ribu dan banyaknya unit dalam ribuan galon, maka total ongkos pengangkutannya adalah Rp 8.910.000.000,-

Solusi ini sudah layak namun belum tentu optimal.

❖ Pengecekan Optimalitas dengan menggunakan *Stepping Stone*

Untuk kasus PN GIA, karena penyelesaian awal (bfs) yang diambil adalah penyelesaian awal (bfs) dengan menggunakan metode Vogel/metode *Least Cost*, hal ini dikarenakan dengan metode Vogel/metode *Least Cost* ini diperoleh ongkos pengiriman yang minimum.

Peubah Basisnya adalah $\{ X_{15}, X_{21}, X_{23}, X_{24}, X_{25}, X_{31}, X_{32} \}$

Peubah Nonbasisnya adalah $\{ X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{35} \}$.

Peubah NonBasis	Z _{baru}	ΔZ
X ₁₁	8690	-220
X ₁₂	9020	110
X ₁₃	8690	-220
X ₁₄	9240	330
X ₂₂	9350	440
X ₃₃	10450	1540
X ₃₄	9460	550
X ₃₅	9350	440

Karena ada nilai $\Delta Z < 0$, maka solusi layak yang diperoleh belum optimal, karena nilai ΔZ sama, maka dipilih salah satu. Misalkan dipilih X₁₃ sebagai entering variable dan X₂₃ sebagai leaving variable dan diperoleh nilai fungsi tujuan baru sebesar 8690, dengan kata lain diperoleh total ongkos pengangkutan yang baru, yaitu Rp 8.690.000.000,- .

Untuk tabel pengecekan yang baru diperoleh:

Peubah Basisnya adalah $\{ X_{15}, X_{21}, X_{13}, X_{24}, X_{25}, X_{31}, X_{32} \}$

Peubah Nonbasisnya adalah $\{ X_{11}, X_{12}, X_{23}, X_{14}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{35} \}$.

Sumber	Tujuan				
	Jakarta	Bandung	Cirebon	Cilacap	Dummy
Pertamina I	11	9	10 220	10	0 55
Pertamina II	13 110	12	11	7 110	0 330
Pertamina III	9 330	4 330	14	8	0

Peubah NonBasis	Z _{baru}	ΔZ
X ₁₁	8580	-110
X ₁₂	8745	55
X ₂₃	9130	440
X ₁₄	9625	935
X ₂₂	8910	220
X ₃₃	10450	1760
X ₃₄	9240	550
X ₃₅	10010	1320

Karena ada nilai $\Delta Z < 0$, maka solusi layak yang diperoleh belum optimal, karena nilai ΔZ sama, maka dipilih salah satu. Misalkan dipilih X₁₁ sebagai entering variable dan X₁₅

sebagai leaving variable dan diperoleh nilai fungsi tujuan baru sebesar 8580, dengan kata lain diperoleh total ongkos pengangkutan yang baru, yaitu Rp 8.580.000.000,- .

Untuk tabel pengecekan yang baru diperoleh:

Peubah Basisnya adalah $\{ X_{11}, X_{21}, X_{13}, X_{24}, X_{25}, X_{31}, X_{32} \}$

Peubah Nonbasisnya adalah $\{ X_{15}, X_{12}, X_{23}, X_{14}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{35} \}$.

Sumber	Tujuan				
	Jakarta	Bandung	Cirebon	Cilacap	Dummy
Pertamina I	11 55	9	10 220	10	0
Pertamina II	13 55	12	11	7 110	0 385
Pertamina III	9 330	4 330	14	8	0

Peubah NonBasis	Z_{baru}	ΔZ
X_{15}	8690	110
X_{12}	8745	165
X_{23}	9625	1045
X_{14}	8855	275
X_{22}	8800	220
X_{33}	9900	1320
X_{34}	9625	1045
X_{35}	9900	1320

Karena semua ΔZ dari peubah nonbasis bernilai nonnegatif, dimana hal ini berarti setiap perubahan peubah nonbasis menjadi peubah basis hanya akan mengakibatkan penambahan ongkos pengangkutan, sehingga solusi layak yang telah diperoleh merupakan solusi layak yang optimal, dengan total ongkos pengangkutan optimum, yaitu Rp 8.580.000.000,- .

- ❖ Kesimpulan untuk masalah PN GIA, agar diperoleh ongkos yang paling minimum, maka hal yang perlu dilakukan oleh PN GIA adalah:
 - a. Sumber Pertamina I mengirimkan 55.000 galon ke bandar udara di Jakarta, dan 220.000 galon ke kota bandar udara di Cirebon.
 - b. Sumber Pertamina II mengirimkan 55.000 galon ke bandar udara di Jakarta, 110.000 galon ke bandar udara di Cilacap, sedangkan sebanyak 385.000 galon merupakan kelebihan produksi dari Pertamina II.
 - c. Sumber Pertamina III mengirimkan 330.000 galon ke bandar udara di Jakarta, dan 330.000 galon ke bandar udara di Bandung.
 - d. Total ongkos pengangkutannya sebesar Rp 8.580.000,-