Penentuan Harga Opsi Model Binomial Dua Periode

A. Model Binomial Satu Periode

Model ini merupakan model pasar saham (*trading*) dengan satu periode (*one time step*) dengan kata lain pada model ini hanya terdapat dua waktu *trading* yaitu pada saat $t = 0$ dan $t = 1$. Seperti telah dibahas sebelumnya, maka pada akhir periode yaitu pada saat $t = 1$ pergerakan harga saham hanya ada dua kemungkinan yaitu harga saham naik sebesar *u* dengan peluang sebesar *p* atau harga saham turun sebesar *d* dengan peluang sebesar (1 – *p*). Misalkan S_0 menyatakan harga saham pada saat $t = 0$, maka pada akhir periode S_0 dapat berubah menjadi $S_1(\omega_1)$ atau $S_2(\omega_2)$. Selanjutnya pada pasar dengan model binomial satu periode ini tersusun dari dua asset yaitu aset beresiko yaitu saham dan aset bebas resiko yaitu tabungan dalam bentuk deposito di bank. B_t menyatakan jumlah tabungan dalam bentuk deposito di bank pada saat *t* dan S_t menyatakan harga saham pada saat *t*.

Pada model ini proses pergerakan tabungan berlangsung secara deterministik, dan dapat dinyatakan sebagai berikut

$$B_t = (1 + r)^t \qquad (1)$$

sedemikian hingga

$$B_0 = 1$$
$$B_1 = 1 + r$$

dimana *r* adalah *risk-less (risk-free) interest rate*. Selain itu perlu diketahui bahwa pada pasar uang berlaku suku bunga deposito bank per periode sebesar *r* dan diasumsikan akan berlaku hubungan berikut:

$$d < 1 + r < u \qquad (2)$$

persamaan (2) dapat dinyatakan pula dengan:

$$d < e^r < u \qquad (3)$$

Sedangkan proses pergerakan harga saham merupakan proses stokastik, dan dapat dinyatakan sebagai berikut

$$S_1(\omega) = \begin{cases} S_1(\omega_1) = S_0 u & peluang \;\; p \\ S_1(\omega_2) = S_0 d & peluang \;\; q = (1 - p) \end{cases} \tag{4}$$

Replikasi Portfolio

Misalkan $\Theta = (\theta_0, B_0)$ adalah *self-financing portfolio*, *r* adalah *risk less interest rate*, *C* menyatakan harga opsi dari opsi *call* Eropa, C_u menyatakan *payoff* apabila harga saham naik, dan C_d menyatakan *payoff* apabila harga saham turun. Apabila $S_u = S_0 u$ dan $S_d = S_0 d$ maka *payoff* dari opsi *call* Eropa pada saat $t = 1$ sebagai berikut

$$C_u = \max(S_u - K, 0) \tag{5}$$

$$C_d = \max(S_d - K, 0) \tag{6}$$

Persamaan (5) dan persamaan (6) memperlihatkan besarnya dana yang menjadi hak holder opsi *call* untuk segala kemungkinan skenario pergerakan harga saham. Pada saat yang bersamaan persamaan (5) dan persamaan (6) merupakan kewajiban bagi *writer* opsi *call* untuk menyediakan dana sebesar C_u dan C_d di akhir periode 1. Karena hal itu merupakan kewajiban bagi *writer* maka *writer* harus mengusahakan agar mempunyai dana sebesar C_u dan C_d pada akhir periode 1. Cara yang dapat ditempuh oleh *writer* adalah dengan pembentukan replikasi portfolio. Replikasi portfolio Θ merupakan *derivative security* dari *C* apabila nilai replikasi portfolio tersebut pada saat akhir periode sama dengan *C* untuk segala kemungkinan skenario pergerakan harga saham.

Replikasi portfolio tersebut akan dibentuk dengan cara sebagai berikut. Misalkan *writer* menjual opsi *call* di awal periode 1 seharga V_0. Agar *writer* mempunyai dana yang cukup untuk menutup kewajiban membayar dana sebesar C_u dan C_d maka sejak awal periode 1 *writer* akan membuat suatu portfolio keuangan yang terdiri dari saham sebanyak θ_0 lembar. Kepemilikan saham tersebut diambil dari penjualan opsi *call* seharga V_0. Apabila besar V_0 tidak mencukupi bagi *writer* opsi *call* untuk membeli θ_0 lembar saham maka *writer* mempunyai pinjaman dengan bunga *r* per periode untuk mencukupinya. Sebaliknya apabila ada kelebihan dana maka sisanya ditabung dengan suku bunga *r* per periode. Nilai portfolio pada awal periode 1 adalah $V_0 = C_0$ yang berupa $\theta_0 S_0$ dalam bentuk saham dan $B_0 = (C_0 - \theta_0 S_0)$ dalam bentuk tabungan atau pinjaman.

$$C_0 = \theta_0 S_0 + \left(V_0 - \theta_0 S_0\right) \tag{7}$$

$$C_0 = V_0 \tag{8}$$

Pada akhir periode 1, nilai portfolio akan menjadi V_1 yang terdiri dari $\theta_0 S_0$ dalam bentuk saham dan yang dalam bentuk tabungan atau pinjaman akan bertambah menjadi $e^r \left(V_0 - \theta_0 S_0\right) = e^r B_0$. Nilai portfolio pada akhir periode 1 dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$V_1\left(\Theta\right) = C_1 \tag{9}$$

$$V_1\left(\Theta\right) = \begin{cases} \theta_0 S_u + e^r \left(V_0 - \theta_0 S_0\right) = C_u \\ \theta_0 S_d + e^r \left(V_0 - \theta_0 S_0\right) = C_d \end{cases} \tag{10}$$

atau persamaan (10) dapat dituliskan dalam bentuk:

$$V_1\left(\Theta\right) = \begin{cases} \theta_0 S_u + e^r B_0 = C_u \\ \theta_0 S_d + e^r B_0 = C_d \end{cases} \tag{11}$$

Dengan menyelesaikan (11) maka diperoleh

$$\theta_0 = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d} \tag{12}$$

$$B_0 = \frac{1}{e^r}\left[\frac{C_d S_u - C_u S_d}{S_u - S_d}\right] \tag{13}$$

dimana θ_0 menyatakan banyaknya saham dan B_0 menyatakan besarnya tabungan atau pinjaman.

Berdasarkan *law of one price* "jika dua aset mempunyai nilai akhir yang sama maka dua aset tersebut mempunyai dua nilai awal yang sama, apabila hal tersebut tidak terjadi maka prinsip *no-arbitrage* tidak berlaku", sehingga

$$\begin{aligned} C_0 &= V_0\left(\Theta\right) \\ &= \theta_0 S_0 + B_0 \\ &= \left[\frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}\right] S_0 + \frac{1}{e^r}\left[\frac{C_d S_u - C_u S_d}{S_u - S_d}\right] \end{aligned}$$

$$C_0 = \frac{1}{e^r}\left[\frac{e^r - d}{u - d}\right] C_u + \frac{1}{e^r}\left[\frac{u - e^r}{u - d}\right] \tag{14}$$

Risk-neutral probability

Berdasarkan hasil yang diperoleh pada persamaan (14) diketahui bahwa penjumlahan dari koefisien C_u dengan koefisien C_d sama dengan 1, sehingga koefisien C_u dengan koefisien C_d dapat diinterpretasikan sebagai peluang. Oleh karena itu, persamaan (14) dapat disederhanakan menjadi

$$C_0 = \frac{1}{e^r}\left[\tilde{p}\,C_u + \tilde{q}\,C_d\right] \tag{15}$$

$$C_0 = \frac{1}{e^r}\tilde{E}\left[C_1\right] \tag{16}$$

dimana $\tilde{p} = \left[\dfrac{e^r - d}{u - d}\right]$ dan $\tilde{q} = \left[\dfrac{u - e^r}{u - d}\right]$ $\tilde{P} = (\tilde{p}, \tilde{q})$ merupakan ukuran probabilitas baru yang disebut sebagai probabilitas *risk-neutral* (*risk-neutral probability*). Secara umum nilai *derivative security X* pada saat $t = 0$ untuk model binomial satu periode adalah

$$X_0 = \frac{1}{e^r}\tilde{E}\left[X_1\right] \tag{17}$$

$$X_0 = \tilde{E}\left[\overline{X}_1\right] \tag{18}$$

dimana $\overline{X}_1$ merupakan harga saham terdiskon pada saat $t = 1$.

B. Model Binomial Dua Periode

Ini merupakan model pasar saham (*trading*) dengan dua periode (dua *time step*) dengan kata lain pada model ini hanya terdapat tiga waktu *trading* yaitu pada saat $t = 0$, $t = 1$ dan $t = 2$. Seperti telah dibahas sebelumnya, maka pada akhir periode yaitu pada saat $t = 2$ pergerakan harga saham hanya ada dua kemungkinan yaitu harga saham naik atau harga saham turun. Misalkan S_1 menyatakan harga saham pada saat $t = 1$, maka pada akhir periode S_1 dapat berubah menjadi

$$S_2(\omega) = \begin{cases} S_2(\omega_1^2) = u^2 S_0 \\ S_2(\omega_1\omega_2) = S_2(\omega_2\omega_1) = u\,d\,S_0 \\ S_2(\omega_2^2) = d^2 S_0 \end{cases} \tag{19}$$

Misalkan $\Theta = (\theta_1, B_1)$ adalah *self-financing portfolio*, r adalah risk *less interest rat*e, C menyatakan nilai dari *European Call Option*, C_u menyatakan *payoff* apabila harga saham naik, dan C_d menyatakan *payoff* apabila harga saham turun. Apabila $S_{uu} = u^2 S_0$,

$S_{ud} = u\,d\,S_0$, dan $S_{dd} = d^2 S_0$ maka *payoff* dari *European Call Option* pada saat *t = 2* sebagai berikut

$$C_{uu} = \max\left(S_{uu} - K, 0\right) = \left(u^2 S_0 - K\right)^+ \qquad (20)$$

$$C_{ud} = \max\left(S_{ud} - K, 0\right) = \left(u\,d\,S_0 - K\right)^+ \qquad (21)$$

$$C_{uu} = \max\left(S_{dd} - K, 0\right) = \left(d^2 S_0 - K\right)^+ \qquad (22)$$

Berdasarkan *law of one price* "jika dua aset mempunyai nilai akhir yang sama maka dua aset tersebut mempunyai dua nilai awal yang sama, apabila hal tersebut tidak terjadi maka prinsip *no-arbitrage* tidak berlaku". Berdasarkan persamaan (15) yang diperoleh pada model binomial satu periode maka:

1. Apabila pada akhir periode 2, harga saham mengalami kenaikan maka diperoleh

$$C_u = \frac{1}{e^r}\left[\tilde{p}\,C_{uu} + \tilde{q}\,C_{du}\right] \qquad (23)$$

2. Apabila pada akhir periode 2, harga saham mengalami penurunan maka diperoleh

$$C_d = \frac{1}{e^r}\left[\tilde{p}\,C_{ud} + \tilde{q}\,C_{dd}\right] \qquad (24)$$

selanjutnya persamaan (23) dan persamaan (24) disubstitusikan ke persamaan

$$C = \frac{1}{e^r}\left[\tilde{p}\,C_u + \tilde{q}\,C_d\right]$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{e^r}\left[\tilde{p}\left(\frac{1}{e^r}\left[\tilde{p}\,C_{uu} + \tilde{q}\,C_{du}\right]\right) + \tilde{q}\left(\frac{1}{e^r}\left[\tilde{p}\,C_{ud} + \tilde{q}\,C_{dd}\right]\right)\right] \\ &= \frac{1}{e^{2r}}\left[\tilde{p}^2 C_{uu} + \tilde{p}\tilde{q}\,C_{du} + \tilde{q}\tilde{p}\,C_{ud} + \tilde{q}^2 C_{dd}\right] \\ &= \frac{1}{e^{2r}}\left[\tilde{p}^2 C_{uu} + 2\tilde{p}\tilde{q}\,C_{du} + \tilde{q}^2 C_{dd}\right] \end{aligned}$$

$$C = \frac{1}{e^{2r}}\left[\tilde{p}^2\left(u^2 S_0 - K\right)^+ + 2\tilde{p}\tilde{q}\left(u\,d\,S_0 - K\right)^+ + \tilde{q}^2\left(d^2 S_0 - K\right)^+\right] \qquad (25)$$

persamaan (25) dapat disederhanakan penulisannya menjadi

Fitriani Agustina
Jurusan Pendidikan Matematika
UPI

$$C = \frac{1}{e^{2r}}\left[\sum_{j=0}^{2}\binom{2}{j}\tilde{p}^{j}\tilde{q}^{2-j}\max\left(u^{j}d^{2-j}S_0 - K, 0\right)\right] \qquad (26)$$

Analog dengan model binomial satu periode dan dua periode, maka untuk model binomial tiga periode diperoleh

$$C = \frac{1}{e^{r}}\left[\tilde{p}C_u + \tilde{q}C_d\right]$$

$$C = \frac{1}{e^{2r}}\left[\tilde{p}^2 C_{uu} + \tilde{p}\tilde{q}C_{du} + \tilde{q}\tilde{p}C_{ud} + \tilde{q}^2 C_{dd}\right]$$

$$= \frac{1}{e^{3r}}\left[\tilde{p}^3 C_{uuu} + 3\tilde{p}^2\tilde{q}C_{uud} + 3\tilde{q}^2\tilde{p}C_{udd} + \tilde{q}^3 C_{ddd}\right]$$

$$C = \frac{1}{e^{3r}}\left[\begin{array}{l}\tilde{p}^3\left(u^3S_0 - K\right)^{+} + 3\tilde{p}^2\tilde{q}\left(u^2 d S_0 - K\right)^{+} \\ + 3\tilde{q}^2\tilde{p}\left(u d^2 S_0 - K\right)^{+} + \tilde{q}^3\left(d^3 S_0 - K\right)^{+}\end{array}\right] \qquad (27)$$

seperti halnya pada model binomial dua periode maka persamaan (27) dapat disederhanakan penulisannya menjadi

$$C = \frac{1}{e^{3r}}\left[\sum_{j=0}^{3}\binom{3}{j}\tilde{p}^{j}\tilde{q}^{3-j}\max\left(u^{j}d^{3-j}S_0 - K, 0\right)\right] \qquad (28)$$