Penentuan Harga Opsi dengan Rumus *Black-Scholes*

A. Pendahuluan

Sejarah mengenai penentuan harga opsi dimulai pada tahun 1900 ketika *Louis Bachelier* memodelkan pergerakan dari harga aset sebagai gerak *Brown* dengan drift $\mu = 0$.

Pada tahun 1973, *Fischer Black* dan *Myron Scholes* mempublikasikan "*The Pricing of Option and Corporate Liabilities*", suatu paper yang mengubah secara cepat teori dari perhitungan harga opsi. Dalam paper seminal-nya, *Black-Scholes* membuat asumsi-asumsi berikut ini pada pasar :

ABS1. Harga saham mengikuti gerak *Brown* geometrik (GBG), dengan konstanta drift μ dan volatility σ, seperti yang dituliskan pada persamaan

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW(t) \\ S_{t_0} = S_0 \end{cases} \text{ dimana } dW(t) = \sqrt{dt}Y, \text{ dan } Y \sim N(0,1).$$

ABS2. Perdagangan saham berlangsung dalam selang waktu kontinu.

ABS3. *Risk-free interest rate r* diketahui dan konstan atas waktu.

ABS4. Tidak ada *dividend* yang dibayarkan selama masa hidup opsi.

ABS5. Tidak ada biaya transaksi dalam pembelian atau penjualan aset atau opsi, dan tanpa pajak.

ABS6. Aset dapat dibagi sempurna.

ABS7. Dimungkinkan adanya *short selling* terhadap aset (saham)

ABS8. Tidak ada kemungkinan *arbitrage*.

B. Penurunan Rumus *Black-Scholes*

Misalkan *V* menyatakan harga opsi *put* atau harga opsi *call* pada saat *t* apabila harga sahamnya adalah S_t. Diasumsikan bahwa *V* tergantung secara diferensial pada dua variabel bebas *S* dan *t*, dimana *S* bergerak secara acak sesuai dengan persamaan

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)}$$

Fitriani Agustina
Jurusan Pendidikan Matematika
UPI

Berdasarkan Lemma *Ito*, *V* berubah atas interval waktu *dt* yang sangat kecil, akan diperoleh

$$dV = \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right] dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} \partial W \qquad (1)$$

Selanjutnya dibentuk portfolio yang mereplikasi opsi dengan pengertian bahwa portfolio tersebut memiliki resiko sama besar dengan resiko pada opsinya. Nilai dari Portfolio suatu opsi seharga *V(S,t)* dan *A* saham adalah sebagai berikut:

$$\pi = V(S,t) + AS \qquad (2)$$

Dalam interval waktu *dt*, keuntungan (*gain*, dalam harga) dari portfolio:

$$d\pi = dV(S,t) + AdS \qquad (3)$$

yaitu

$$d\pi = \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right] dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} \partial W + A\left[\mu S\, dt + \sigma S\, dW\right]$$

Agar portfolio tidak beresiko maka haruslah

$$d\pi = r\,\pi\, dt = r\left(V - \frac{\partial V}{\partial S} S \right) dt$$

sehingga diperoleh

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt + r\,S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \qquad (4)$$

Persamaan (4) ini dikenal sebagai persamaan diferensial parsial *Black-Scholes* untuk harga suatu opsi Eropa.

Persamaan diferensial parsial *Black-Scholes* dapat diselesaikan secara analitik untuk opsi standar Eropa seperti opsi *call* Eropa dan opsi *put* Eropa akan dibahas pada lampiran B.

C. *Put-Call Parity*

Selain menggunakan perumusan

$$P_E(S_t) = K \exp\left[-r(T-t)\right] N(-d_2) - S_t\, N(-d_1)$$

untuk menghitung harga opsi *put*, kita bisa juga menentukan harga opsi *put* tersebut dengan melalui hubungannya dengan harga opsi *call*. Hubungan tersebut diperoleh

Fitriani Agustina
Jurusan Pendidikan Matematika
UPI

dengan mengaplikasikan *put-call parity* yang pertama kali diidentifikasi oleh *Stoll* [69]. Ini merupakan hubungan antara harga opsi *call* Eropa dengan harga opsi *put* Eropa dimana *strike price* K dan *excercise date* $t = T$ untuk kedua opsi adalah sama. Diperhatikan dua portofolio berikut:

A: 1 opsi call + K e^{-rT} tunai (disimpan di bank);

B: 1 opsi put + 1 aset.

Pada saat $t = T$ diketahui nilai dari kedua portofolio yaitu

A: $\max(S_T - K, 0) + K = \max(S_T, K)$

B: $\max(K - S_T) + S_T = \max(S_T, K)$

Karena kedua portofolio memberikan *payoff* yang sama besar pada saat $t = T$, maka pada saat $t = 0$ haruslah

$$C_E + Ke^{-rT} = P_E + S_0 \tag{5}$$

yang dikenal sebagai hubungan *put-call parity*. Jadi perumusan (5) dapat ditulis kembali dalam bentuk lain yaitu:

$$P_E = C_E + Ke^{-rT} - S_0 \tag{6}$$

Berdasarkan rumus harga opsi dapat diketahui bahwa terdapat lima parameter yang mempengaruhi harga opsi, yaitu *K, S, T, σ,* dan *r*.