METODE SIMPLEKS

A. Bentuk Standar Model Program Linear

Perlu diingatkan kembali bahwa permasalahan model program linear dapat memiliki pembatas-pembatas linear yang bertanda $(\leq, =, \geq)$, dan peubah-peubah keputusannya dapat merupakan peubah nonnegatif, dapat pula peubah yang tidak terbatas dalam tanda (*unrestricted in sign*).

Dalam menyelesaikan permasalahan program linear dengan metode simpleks, bentuk dasar yang digunakan haruslah merupakan bentuk standar, yaitu bentuk formulasi yang memenuhi ketentuan berikut ini:

1. Seluruh pembatas linear harus berbentuk persamaan dengan ruas kanan yang nonnegatif.
2. Seluruh peubah keputusan harus merupakan peubah nonnegatif.
3. Fungsi tujuannya dapat berupa maksimasi atau minimasi.

Beberapa hal yang dapat dilakukan untuk mengubah bentuk permasalahan program linear yang belum standar ke dalam bentuk standar permasalahan program linear sesuai dengan 3 ketentuan di atas adalah:

1). **Pembatas linear (*linear constraint*)**

a) Pembatas linear bertanda ”≤” dapat dijadikan suatu persamaan ”=” dengan cara menambahkan ruas kiri dari pembatas linear itu dengan *slack variable* (peubah penambah). *Slack variable* pada umumnya digunakan untuk mewakili jumlah kelebihan ruas kanan pembatas linear dibandingkan dengan ruas kirinya. Pada pembatas linear bertanda ”≤”, ruas kanan umumnya mewakili batas ketersediaan sumber daya sedangkan ruas kiri umumnya mewakili penggunaan sumber daya tersebut yang dibatasi oleh berbagai kegiatan yang berbeda (peubah) dari suatu model program linear sehingga *slack variable* dapat diartikan untuk mewakili jumlah sumber daya yang tidak dipergunakan.

b) Pembatas linear bertanda ”≥” dapat dijadikan suatu persamaan ”=” dengan cara mengurangkan ruas kiri dari pembatas linear itu dengan *surplus variable* (peubah penambah negatif). Pada pembatas linear bertanda ”≥”, ruas kanan umumnya mewakili penetapan persyaratan spesifikasi minimum, sehingga *surplus variable* dapat diartikan untuk mewakili jumlah kelebihan sesuatu dibandingkan spesifikasi minimumnya.

c) Ruas kanan dari suatu persamaan dapat dijadikan bilangan nonnegatif dengan cara mengalikan kedua ruas dengan -1.

d) Arah pertidaksamaan berubah apabila kedua ruas dikalikan dengan -1.

e) Pembatas linear dengan pertidaksamaan yang ruas kirinya berada dalam tanda mutlak dapat diubah menjadi dua pertidaksamaan.

2). Peubah keputusan

Suatu peubah keputusan x_i yang tidak terbatas dalam tanda dapat dinyatakan sebagai dua peubah keputusan nonnegatif dengan menggunakan substitusi:

$$x_i = x_i^1 - x_i^2 \qquad 2.1$$

dimana $x_i^1 \geq 0$ dan $x_i^2 \geq 0$. Selanjutnya substitusi ini harus dilakukan pada seluruh pembatas linear dan fungsi tujuannya.

3). Fungsi tujuan

Walaupun permasalahan model program linear dapat berupa maksimasi atau minimasi, kadang-kadang diperlukan perubahan dari satu bentuk ke bentuk lainnya. Dalam hal ini, maksimasi dari suatu fungsi adalah sama dengan minimasi dari negatif fungsi yang sama. Secara matematis dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\text{maksimumkan} \quad z$$

sama artinya dengan:

$$\text{minimumkan} \quad (-z)$$

B. Metode Simpleks

1. Pendahuluan

Metode simpleks merupakan prosedur aljabar yang bersifat iteratif, yang bergerak *step by step*, dimulai dari suatu titik ekstrim pada daerah fisibel menuju ke titik ekstrim yang optimum. Untuk lebih memahami uraian selanjutnya, berikut ini diberikan pengertian dari beberapa terminologi dasar yang banyak digunakan dalam membicarakan metode simpleks. Untuk itu, perhatikan kembali permasalahan model program linear dengan m pembatas linear dan n peubah keputusan berikut ini:

Maksimumkan $\quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \qquad 2.2$

berdasarkan pembatas linear:

$$\begin{array}{c} \beta_{11}x_1 + \beta_{12}x_2 + \cdots + \beta_{1n}x_n \quad (\le, \ =, \ \ge) \ b_1 \\ \beta_{21}x_1 + \beta_{22}x_2 + \cdots + \beta_{2n}x_n \quad (\le, \ =, \ \ge) \ b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \beta_{m1}x_1 + \beta_{m2}x_2 + \cdots + \beta_{mn}x_n \quad (\le, \ =, \ \ge) \ b_m \end{array} \qquad 2.3$$

dan pembatas tanda

$$x_j \ge 0, \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \qquad 2.4$$

Apabila didefinisikan:

$$A_0 = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \cdots & \beta_{mn} \end{bmatrix}; \quad c_0 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}; \quad x_0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

maka pembatas linear dari permasalahan model program linear pada persamaan (2.3) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks:

$$A_0 x_0 \ (\le, \ =, \ \ge) \ b \qquad 2.5$$

Vektor **b** dinamakan vektor prasyarat dan tanpa meninggalkan generalisasi boleh saja diasumsikan terdapat elemen bernilai nonnegatif, karena suatu pembatas linear pada persamaan (2.3) dapat dikalikan dengan -1 apabila diperlukan. Vektor **c** dinamakan vektor harga dan komponen ke-*r* atau c_r dinamakan sebagai nilai peubah x_r.

Seperti telah dikemukakan sebelumnya bahwa dalam menyelesaikan permasalahan program linear dengan metode simpleks, bentuk dasar yang digunakan haruslah merupakan bentuk standar program linear, dan langkah pertama yang dilakukan untuk memperoleh bentuk standar tersebut adalah dengan mengubah pembatas linear bertanda ”≤” dan ”≥” menjadi suatu persamaan ”=” dengan cara menambahkan ruas kiri pembatas linear dengan *slack variable* atau mengurangi ruas kiri dari pembatas linear dengan *surplus variable*.

Dengan demikian apabila terdapat *m* pembatas linear dimana sebanyak *g* pembatas linear dengan tanda "≤", dan sebanyak *h* pembatas linear dengan tanda "≥", maka dapat dinyatakan bahwa terdapat $(n - g - h)$ pembatas linear dengan tanda "=".

- Apabila pembatas linear ke-*p* adalah bertanda "≤" maka akan diperoleh bentuk standar:

$$\beta_{p1}x_1 + \beta_{p2}x_2 + \cdots + \beta_{pn}x_n + x_{n+p} = b_p \qquad 2.6$$

- Apabila pembatas linear ke-*q* adalah bertanda "≥" maka akan diperoleh bentuk standar:

$$\beta_{q1}x_1 + \beta_{q2}x_2 + \cdots + \beta_{qn}x_n + x_{n+q} = b_q \qquad 2.7$$

Pada persamaan (2.6) terdapat *slack variable* yaitu x_{n+p} dan pada persamaan (2.6) terdapat *surplus variable* yaitu x_{n+q}. *Slack variable* dan *surplus variable* dapat dinyatakan dalam bentuk vektor kolom berikut: $x_s = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+g} \\ \vdots \\ x_{n+g+h} \end{bmatrix}$ 2.8

dimana $\lfloor x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+g} \rfloor$ adalah *slack variables* dan $\lfloor x_{n+g+1}, x_{n+g+2}, \cdots, x_{n+g+h} \rfloor$ adalah *surplus variables*, sehingga dengan adanya *slack variable* dan *surplus variable* persamaan (2.5) dapat dinyatakan sebagai:

$$A_0 x_0 + \begin{bmatrix} I_g & O \\ O & I_h \\ O & O \end{bmatrix} x_s = b \qquad 2.9$$

dimana x_0 adalah vektor peubah pokok (*main variable*) dan I_g, I_h merupakan matriks satuan (matriks identitas) dengan orde *g* dan *h*. Pembatas tanda nonnegatif yang dikenakan pada tiap peubah adalah

$$x_0 \geq 0,\ \ x_s \geq 0 \qquad 2.10$$

Karena adanya penambahan *slack variable* dan *surplus variable* maka fungsi tujuan pada persamaan (2.2) akan menjadi

$$z = c_0^t x_0 + c_s^t x_s \qquad 2.11$$

dimana $c_s^t = \left[c_{n+1}, \cdots, c_{n+g}, c_{n+g+1}, \cdots, c_{n+g+h} \right]$ (vektor baris dengan $g+h$ komponen yang berasal dari *g* komponen dari *slack variable* dan *h* komponen dari *surplus variable*).

Dengan adanya *slack variable* dan *surplus variable* maka persamaan (2.2), (2.3), dan (2.4) dengan notasi matriks dapat dinyatakan:

Memaksimumkan: $z = c_0^t x_0 + c_s^t x_s$ 2.12

dengan pembatas linear $Ax = b$ dan $x \geq 0$ 2.13

dimana $A = \left[A_0 \left| \begin{matrix} I_g & O \\ O & I_h \\ O & O \end{matrix} \right. \right]$; $x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_s \end{bmatrix}$ (x_0 dan x_s telah dijelaskan sebelumnya).

Setelah permasalahan program linear terbentuk dalam bentuk standar maka yang harus dilakukan adalah:

1. Penyelesaian persamaan simultan $Ax = b$
2. Selama mengerjakan tahap 1, syarat restriksi nonnegatif $x \geq 0$ dipenuhi
3. Memperbaiki nilai fungsi tujuan z pada tiap iterasi.

Contoh 1:

Diketahui pembatas linear suatu permasalahan program linear: $\begin{array}{l} x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 8x_4 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 1 \end{array}$.

Ubahlah pembatas linear tersebut di atas sehingga menjadi bentuk standar program linear.

Jawab:

Karena pembatas linearnya bertanda "≤" maka untuk pembatas linear permasalahan program linear di atas akan ditambahkan *slack variable* sehingga diperoleh bentuk standar:

$$\begin{array}{l} x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 8x_4 + 1x_5 + 0x_6 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 0x_5 + 1x_6 = 1 \end{array}$$

dimana $x_i \geq 0,\ (i = 5, 6)$

2. Penyelesaian Dasar (Basic Solution/Solusi Basis)

Perhatikan suatu sistem persamaan $Ax = b$ pada persamaan (2.13). Persamaan tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk berikut ini:

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_N a_N = b \qquad 2.14$$

dimana $a_1, a_2, \cdots, a_N$ adalah vektor-vektor aktivitas yang merupakan vektor kolom pada matriks **A** dengan order $(m \times N)$ dimana $N = n + g + h$. Pada pembahasan ini diasumsikan bahwa persamaan (2.14) konsisten.

- Apabila jumlah pembatas linear adalah *m* sama dengan jumlah peubah yaitu *N*, dan $Rank(A) = m$, maka persamaan (2.14) mempunyai penyelesaian tunggal yaitu $A^{-1}b$. Apabila hal ini terjadi maka permasalahan program linear tersebut tidak mempunyai solusi optimal karena daerah fisibel (*feasible region*) berupa satu titik.
- Apabila $m > N$ dan $Rank(A) = N$ maka terdapat $(m - N)$ persamaan pembatas linear berlebihan (*redundant*) yang pada prinsipnya dapat diabaikan, sehingga diperoleh kondisi dimana persamaan (2.14) mempunyai penyelesaian tunggal.
- Apabila untuk persamaan (2.14) diasumsikan bahwa $m < N$ dan $Rank(A) = m$ serta tiap peubah x_j secara tetap diasosiasikan berkoresponden dengan vektor kolom a_j.

Selanjutnya apabila dipilih m vektor kolom yang membentuk matriks **A** adalah bebas linear dan $(N-m)$ peubah lain yang berkoresponden dengan vektor-vektor yang tersisa pada matriks **A** mempunyai nilai nol, maka himpunan m persamaan simultan itu mempunyai penyelesaian tunggal yang dinamakan penyelesaian dasar (solusi basis/*basic solution*).

Untuk itu m peubah dari solusi basis yang berasosiasi dengan m vektor kolom yang bebas linear dinamakan peubah dasar (*basic variable*/BV), sedangkan $(N-m)$ peubah sisanya dinamakan peubah nondasar (*nonbasic variable*/NBV) yang umumnya ditetapkan bernilai nol.

- Apabila terdapat satu/lebih BV yang bernilai nol maka permasalahan program linear tersebut dinamakan degenerasi (merosot) dan BV yang bernilai nol dinamakan peubah degenerasi.

Untuk lebih jelasnya mengenai solusi basis perhatikan definisi berikut.

Definisi (Solusi Basis)

”Solusi basis untuk $Ax=b$ adalah solusi dimana terdapat maksimal m peubah bukan nol (peubah dasar/BV). Untuk memperoleh solusi basis dari $Ax=b$ maka sebanyak $(N-m)$ peubah harus dibuat bernilai nol. Peubah-peubah yang dinolkan (dibuat bernilai nol) ini dinamakan peubah non dasar (NBV). Selanjutnya, dapatkan nilai dari $N-(N-m)=m$ peubah lainnya yang memenuhi $Ax=b$.”

Definisi (Solusi Basis Fisibel)

”Jika seluruh peubah pada suatu solusi basis bernilai nonnegatif, maka solusi itu dinamakan solusi basis fisibel (BFS).”

Sebelum lebih dalam membahas metode simplex, terlebih dahulu perhatikan ilustrasi berikut ini.

Contoh 2:

Tentukan semua solusi basis dari persamaan simultan $\begin{aligned} 4x_1+5x_2+8x_3+7x_4&=10 \\ 3x_1+2x_2+6x_3+9x_4&=11 \end{aligned}$

Jawab:

Untuk persamaan di atas terdapat banyaknya persamaan yaitu $m=2$ dan banyaknya peubah yaitu $n=4$ sehingga banyaknya penyelesaian basis yang mungkin ada sebanyak 6. Karena akan dicari solusi basisnya maka terdapat $m=2$ (BV) dan $(n-m=4-2=2)$ NBV.

- Pertama-tama kita melakukan OBE maka diperoleh:

x_1	x_2	x_3	x_4	C
4	5	8	7	10
3	2	6	9	11

x_1	x_2	x_3	x_4	C
1	$5/4$	2	$7/4$	$5/2$
3	2	6	9	11

x_1	x_2	x_3	x_4	C
1	$5/4$	2	$7/4$	$5/2$
0	$-7/4$	0	$15/4$	$7/2$

x_1	x_2	x_3	x_4	C
1	$5/4$	2	$7/4$	$5/2$
0	1	0	$-7/15$	-2

x_1	x_2	x_3	x_4	C
1	0	2	$7/3$	5
0	1	0	$-7/15$	-2

solusi dasarnya yaitu $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (5, -2, 0, 0)$ artinya NBV adalah x_1 dan x_2, sedangkan BV adalah x_3 dan x_4.

- Pertama-tama kita melakukan OBE maka diperoleh:

x_1	x_2	x_3	x_4	C
4	5	8	7	10
3	2	6	9	11

x_1	x_2	x_3	x_4	C
1	$5/4$	2	$7/4$	$5/2$
3	2	6	9	11

x_1	x_2	x_3	x_4	C
1	$5/4$	2	$7/4$	$5/2$
0	$-7/4$	0	$15/4$	$7/2$

x_1	x_2	x_3	x_4	C
1	$5/4$	2	$7/4$	$5/2$
0	$-7/15$	0	1	$14/15$

x_1	x_2	x_3	x_4	C
1	$14\,19/60$	2	0	$13/15$
0	$-7/15$	0	1	$14/15$

solusi dasarnya yaitu $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\tfrac{13}{15}, 0, 0, \tfrac{14}{15}\right)$ artinya NBV adalah x_1 dan x_4, sedangkan BV adalah x_2 dan x_3.

- Solusi basisnya diperoleh $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(0, \tfrac{13}{31}, 0, \tfrac{35}{31}\right)$ artinya NBV adalah x_2 dan x_4, sedangkan BV adalah x_1 dan x_3.
- Solusi basisnya diperoleh $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(0, 0, \tfrac{13}{30}, \tfrac{14}{15}\right)$ artinya NBV adalah x_3 dan x_4, sedangkan BV adalah x_1 dan x_2.
- Solusi basisnya diperoleh $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(0, -2, \tfrac{5}{2}, 0\right)$ artinya NBV adalah x_2 dan x_3, sedangkan BV adalah x_1 dan x_4.
- Pada saat memisalkan NBV adalah x_1 dan x_3, yang artinya BV adalah x_2 dan x_4 maka tidak akan diperoleh solusi basis, hal ini dikarenakan vektor kolom $x_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ dan vektor kolom $x_3 = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$ tidak bebas linear.

Oleh karena itu hanya terdapat 5 solusi basis dari 6 solusi basis yang mungkin.

Untuk memperlancar pemahaman mengenai solusi basis maka kerjakan soal-soal berikut ini.

1. Tentukan solusi basis dari sistem persamaan berikut ini dengan menggunakan operasi baris elementer (Gauss-Jordan)

   a) $$\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 5 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 8 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 10 \end{aligned}$$

   b) $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= -2 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 \qquad\qquad\quad - x_4 &= -3 \end{aligned}$$

2. Tentukan semua solusi basis dari masalah PL yang ada pada **contoh 1**.
3. Tentukan semua solusi basis dari pembatas linear masalah PL yang diberikan dengan terlebih dahulu mengubah masalah PL ke dalam bentuk standar PL.

a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 12 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &\le 6 \\ -x_1 + 3x_3 &\le 9 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 &\le 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &\le 12 \\ x_1 + x_3 + x_4 &\le 4 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &\ge -3 \\ 2x_1 + x_2 &\ge -2 \\ 2x_1 + x_2 &\le 8 \\ 4x_1 - x_2 &\le 16 \end{aligned}$$

Sebelum kita melanjutkan pembahasan mengenai metode simpleks, berikut ini adalah teorema yang cukup penting digunakan untuk memahami penerapan metode simpleks.

Teorema 1

Misalkan $Ax = b$ merupakan himpunan dari m persamaan dengan N peubah dimana $m < N$ dan $Rank(A) = m$. Apabila persamaan tersebut mempunyai solusi basis dimana $x \geq 0$ maka persamaan tersebut mempunyai **solusi basis fisibel**.

Teorema 1 memberikan kesan bahwa solusi masalah program linear hanya dilakukan melalui pengujian terhadap solusi basis fisibel yang merupakan pengerjaan dalam metode simpleks. Dalam hal ini secara iteratif dilakukan pengujian dari satu solusi basis fisibel ke solusi basis fisibel lainnya sampai fungsi tujuan mencapai nilai optimal. Namun, kita tidak dapat menyatakan bahwa **teorema 1** dapat digunakan untuk memperoleh solusi masalah program linear secara umum.

Definisi (Solusi Fisibel Titik Ekstrem)

"Solusi fisibel titik ekstrem (titik sudut) adalah solusi fisibel yang tidak terletak pada suatu segmen garis yang menghubungkan dua solusi fisibel lainnya. Apabila ada sejumlah $n\,(n < 3)$ buah peubah keputusan, maka definisi di atas tidak cocok lagi untuk mengidentifikasi solusi fisibel titik sudut (titik ekstrem) sehingga pembuktiannya harus dengan cara aljabar.

Ada tiga sifat pokok titik ekstrem ini, yaitu:

1. Jika hanya ada satu solusi optimum, maka pasti ada satu titik ekstrem.
2. Jika solusi optimumnya banyak, maka paling sedikit ada dua titik ekstrem yang berdekatan. (Dua titik ekstrem dikatakan berdekatan jika segmen garis yang menghubungkan keduanya itu terletak pada sudut dari batas daerah fisibel).
3. Hanya ada sejumlah terbatas titik ekstrem pada setiap persoalan.
4. Jika suatu titik ekstrem memberikan nilai z yang lebih baik dari yang lainnya, maka pasti solusi itu merupakan solusi optimum.

Sifat 4 ini menjadi dasar dari metode simpleks yang prosedurnya meliputi 3 langkah sebagai berikut:

1. Langkah inisialisasi: mulai dari suatu titik ekstrem (0,0)
2. Langkah iteratif: Bergerak menuju titik ekstrem berdekatan yang lebih baik. Langkah ini diulangi sebanyak diperlukan.

3. Aturan penghentian: Memberhentikan langkah ke-2 apabila telah sampai pada titik ekstrem yang terbaik (titik optimum).

Terdapat dua aturan yang berlaku dalam memilih titik ekstrem yang berikutnya setelah mencapai suatu titik ekstrem tertentu, yaitu:

1. Titik ekstrem yang berikutnya harus merupakan titik ekstrem yang berdekatan dengan titik ekstrem yang sudah dicapai.

2. Solusi ini tidak akan pernah kembali ke titik ekstrem yang telah dicapai sebelumnya.

Ide dari metode simpleks dapat dikemukakan secara ringkas yaitu bahwa metode ini selalu dimulai pada suatu titik sudut fisibel, dan selalu bergerak melalui titik sudut fisibel yang berdekatan, menguji masing-masing titik mengenai optimalisasinya sebelum bergerak pada titik lainnya. Untuk mengekspresikan ide di atas dalam konteks metode simpleks, diperlukan suatu korespondensi antara metode grafik dan metode simpleks mengenai ruang solusi dan titik-titik sudut (titik-titik ekstrem) sebagai berikut:

Definis geometris (metode grafik)	Definisi aljabar (metode simpleks)
Ruang solusi	Pembatas-pembatas dalam bentuk standar
Titik-titik sudut/ekstrem	Solusi-solusi basis dari bentuk standar

Jumlah iterasi maksimum dalam metode simpleks adalah sama dengan jumlah maksimum solusi basis dalam bentuk standar, sehingga jumlah iterasi simpleks ini tidak akan lebih dari:

$$C_m^n = \frac{n!}{(n-m)!\ n!}$$

3. Memperbaiki nilai fungsi tujuan

Pada bagian ini akan membahas mengenai **iterasi tunggal** pada metode simpleks. Dalam metode simpleks, dimulai dari solusi basis awal pada permasalahan program linear secara umum. Misalkan diberikan z tertentu sebagai solusi basis awal, maka pada iterasi berikutnya akan dicoba untuk memperoleh solusi basis fisibel yang baru dengan nilai fungsi tujuan yang berubah.

Apabila memaksimumkan $z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ maka nilai z akan ditingkatkan dengan cara memperoleh solusi basis fisibel yang baru sampai mencapai nilai maksimum (optimal), sebaliknya apabila meminimumkan $z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ maka nilai z akan diturunkan dengan cara memperoleh solusi basis fisibel yang baru sampai mencapai nilai minimum (optimal). Dengan demikian memperbaiki nilai fungsi tujuan menjadi basis dalam penerapan metode simpleks ini setara dengan penggunaan garis selidik pada metode grafik.

Perhatikan bentuk permasalahan program linear yang dinyatakan dalam bentuk standar program linear pada persamaan (2.12) dan (2.13). Misalkan diketahui solusi basis fisibel dan **B** merupakan matriks dengan orde $(m \times m)$ dimana kolom-kolom dari matriks **B** merupakan vektor basis, sehingga **B** dinamakan matriks basis yaitu suatu sub matriks dari matriks **A** yang non singular.

Diambil sembarang vektor basis x_B dan c_B merupakan vektor harga dari peubah basis, kemudian dari $Ax = b$ diidentifikasi beberapa (sejumlah) NBV dan BV dari persamaan

$$B x_B = b \qquad 2.15$$

dan fungsi tujuannya adalah

$$z = c_B^t x_B \qquad 2.16$$

Perlu diingat bahwa **B** merupakan matriks berorde $(m \times m)$ dan $Rank(A) = m = Rank(B)$ hal ini berarti bahwa tiap kolom a_j dari matriks **A** merupakan kombinasi linear dari kolom b_i pada matriks **B**. Hubungan tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\begin{aligned} a_j &= \beta_{1j} b_1 + \cdots + \beta_{mj} b_m \\ a_j &= \sum_{i=1}^{m} b_i \beta_{ij} \end{aligned} \qquad 2.17$$

atau dinyatakan

$$a_j = B \beta_j \qquad 2.18$$

dimana β_j merupakan vektor $\begin{bmatrix} \beta_{1j} \\ \vdots \\ \beta_{mj} \end{bmatrix}$. Selanjutnya, diasumsikan bahwa semua koefisien β_{ij} $(i = 1, 2, \cdots, m)$ dan $(j = 1, 2, \cdots, N)$ diketahui untuk solusi basis fisibel.

Solusi basis fisibel yang baru diperoleh dari solusi basis fisibel awal yang diberikan dengan cara sederhana yaitu dengan hanya mengganti satu kolom matriks **B**. Untuk matriks basis baru yang non singular dinotasikan dengan $\overline{B}$. Perlu diingat bahwa matriks **B** yang terdiri dari *m* kolom merupakan submatriks dari matriks **A** yang terdiri dari *N* kolom.

Misalkan **B** dibentuk dengan melalui perubahan kolom b_r dari matriks **B** dan penempatan kembali kolom a_k ($a_k \neq 0$) dari matriks **A**. Dalam hal ini a_k dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $b_1, \cdots, b_m$:

$$a_k = \beta_{1k} b_1 + \cdots + \beta_{rk} b_r + \cdots + \beta_{mk} b_m \qquad 2.19$$

Lemma berikut ini diperlukan sebagai landasan teori dalam penerapan metode simpleks.

Lemma 1:

"Apabila vektor-vektor $b_1, \cdots, b_r, \cdots, b_m$ adalah bebas linear dan apabila $a = \sum_{i=1}^{m} \beta_i b_i$, maka vektor-vektor $b_1, \cdots, b_{r-1}, a, b_{r+1} \cdots, b_m$ bebas linear jika dan hanya jika $\beta_r \neq 0$."

Vektor a pada **lemma 1** dapat diidentifikasi sebagai vektor a_k pada persamaan (2.19) sementara kolom-kolom pada matriks basis baru $\bar{B}$ bebas linear ($\bar{B}$ non singular jika dan hanya jika $\beta_{rk} \neq 0$). Berdasarkan **teorema 1**, solusi basis fisibel yang diberikan adalah

$$\begin{gathered} x_{B1} b_1 + \cdots + x_{Br} b_r + x_{Br+1} b_{r+1} + \cdots + x_{Bm} b_m = b \\ \sum_{i=1}^{m} x_{Bi} b_i = b \end{gathered} \qquad 2.20$$

merupakan bentuk lain dari persamaan (2.15), yaitu

$$B x_B = b \qquad 2.21$$

Selanjutnya apabila solusi persamaan (2.19) untuk b_r disubstitusi ke persamaan (2.20) akan diperoleh solusi basis baru yaitu:

$$\sum_{\substack{i=1; \\ i \neq r}}^{m} \left(x_{Bi} - \frac{\beta_{ik}}{\beta_{rk}} x_{Br} \right) b_i + \frac{x_{Br}}{\beta_{rk}} a_k = b \qquad 2.22$$

Solusinya harus basis fisibel, yaitu

$$\bar{x}_{Bi} = \left(x_{Bi} - \frac{\beta_{ik}}{\beta_{rk}} x_{Br} \right) \geq 0 \text{ untuk } \left(i = 1, \cdots, m \quad \text{dan} \quad i \neq r \right) \qquad 2.23$$

$$\bar{x}_{Br} = \frac{x_{Br}}{\beta_{rk}} \geq 0 \qquad 2.24$$

Perlu diperhatikan bahwa $$\frac{x_{Br}}{\beta_{rk}} = \min_{i=1,\cdots,m} \left\{ \frac{x_{Bi}}{\beta_{ik}}; \quad \beta_{ik} \geq 0 \right\} = \theta \geq 0 \qquad 2.25$$

Nilai fungsi tujuan dapat ditentukan oleh $\bar{z} > z$, dan untuk permasalahan memaksimumkan *z*, diperoleh

$$z = \sum_{i=1}^{m} c_{Bi}\ x_{Bi} \quad \text{dan} \quad \bar{z} = \sum_{i=1}^{m} \bar{c}_{Bi}\ \bar{x}_{Bi} \qquad 2.26$$

Namun karena $\bar{c}_{Bi} = c_{Bi}\ \ (i \neq r)$ dan $\bar{c}_{Br} = c_k$ serta dengan memeperhatikan persamaan (2.23) dan (2.24), maka diperoleh

$$\bar{z} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} c_{Bi} \left(x_{Bi} - \frac{\beta_{ik}}{\beta_{rk}} x_{Br} \right) + c_k\ \frac{x_{Br}}{\beta_{rk}}$$

$$\bar{z} = z - \frac{x_{Br}}{\beta_{rk}} (z_k - c_k) = z - \theta (z_k - c_k) \qquad 2.27$$

dimana $z_k = \sum_{i=1}^{m} c_{Bi}\ \beta_{ik} = c_B^t \beta_i$ dan z_k adalah solusi basis fisibel untuk suatu *k* yang diberikan karena c_B dan β_k diketahui. Karena $\frac{x_{Br}}{\beta_{rk}} = \theta \geq 0$ maka persamaan (2.27) menunjukkan bahwa $\bar{z} > z$ jika dan hanya jika $z_k - c_k < 0$ dan $\theta > 0$.

Penyataan $\bar{z} > z$ jika dan hanya jika $z_k - c_k < 0$ dan $\theta > 0$ menunjukkan bahwa dapat dipilih vektor a_k dari matriks **A** untuk masuk dalam matriks basis. Pada kenyataannya apabila terdapat lebih dari satu *k* yang menunjukkan bahwa $z_k - c_k < 0$ maka nilai *k* yang dipilih adalah nilai *k* yang menunjukkan $z_k - c_k < 0$ yang paling minimum. Hal yang pelu diperhatikan adalah ”Apabila permasalahan program linearnya merupakan permasalahan memaksimumkan z maka nilai fungsi tujuan dapat ditingkatkan jika dan hanya jika $z_k - c_k < 0$ dan $\theta > 0$ dengan nilai θ ditentukan pada persamaan (2.25).”

Secara garis besar pada tiap iterasi metode simpleks, terdapat tiga aspek yang perlu diperhatikan, yaitu:

1. Vektor a_k (berkorespondensi dengan peubah x_k) adalah calon untuk menjadi peubah masuk (entering variable/EV) pada matriks basis apabila *k* memenuhi syarat:

$$z_k - c_k = \min_{j=1,\cdots,N} \{ z_j - c_j;\ z_j - c_j < 0 \} \qquad 2.27a$$

2. Vektor b_r (berkorespondensi dengan peubah x_{Br}) akan menjadi peubah keluar (leaving variable/LV) meninggalkan matriks basis apabila r memenuhi syarat:

$$\frac{x_{Br}}{\beta_{rk}} = \min_{i=1,\cdots,m} \left\{ \frac{x_{Bi}}{\beta_{ik}};\ \beta_{ik} > 0 \right\} = \theta \geq 0$$

3. Fungsi tujuan dapat diperbaiki (ditingkatkan apabila memaksimumkan) jika dan hanya jika $z_k - c_k < 0$ dan $\theta > 0$ dimana θ diperoleh pada aspek ke-2.

Contoh 3:

Diberikan suatu model permasalahan program linear, berikut ini:

Memaksimumkan: $z = 5x_1 + 4x_2$

dengan pembatas linear : $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ -2x_1 + x_2 &\leq 4 \\ 5x_1 + 3x_2 &\leq 15 \end{aligned}$ dan dengan pembatas tanda $x_1, x_2 \geq 0$

a. Nyatakan permasalahan program linear di atas ke dalam bentuk baku
b. Tentukan matriks basis **B** awalnya
c. Tentukan vektor a_k yang akan masuk ke dalam matriks basis
d. Tentukan vektor b_r yang akan meninggalkan matriks basis

Jawab:

a. Karena pembatas linearnya bertanda "≤" maka untuk pembatas linear permasalahan program linear di atas akan ditambahkan *slack variable* sehingga diperoleh bentuk standar:

   Memaksimumkan: $z = 5x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$ dengan pembatas linear:

   $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 &= 6 \\ -2x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 &= 4 \\ 5x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 &= 15 \end{aligned}$ dengan pembatas tanda $x_1, x_2\ x_3, x_4, x_5 \geq 0$

b. Matriks basis awalnya dibentuk berasal dari penambahan *slack variable* (x_3, x_4, x_5),

   diperoleh: $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c. Vektor a_k (berkorespondensi dengan peubah x_k) adalah calon untuk menjadi peubah masuk (entering variable/EV) pada matriks basis apabila *k* memenuhi syarat:

$$z_k - c_k = \min_{j=1,\cdots,5} \{z_j - c_j;\ z_j - c_j < 0\}$$
$$z_k - c_k = \min\{(0-5), (0-4), (0-0), (0-0), (0-0)\}$$
$$z_k - c_k = \min\{-5, -4, 0, 0, 0\} = -5 \quad \text{untuk k} = 1$$

sehingga vektor yang akan menjadi peubah masuk (EV) adalah vektor a_1 yang berkorespondensi dengan peubah x_1. Jadi yang menjadi EV adalah $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$.

d. Vektor b_r (berkorespondensi dengan peubah x_{Br}) akan menjadi peubah keluar (leaving variable/LV) meninggalkan matriks basis apabila r memenuhi syarat:

$$\frac{x_{Br}}{\beta_{r1}} = \min_{i=1,2,3} \left\{ \frac{x_{Bi}}{\beta_{ik}};\ \beta_{ik} > 0 \right\} = \theta \geq 0$$
$$\frac{x_{Br}}{\beta_{r1}} = \min \left\{ \frac{x_{B1}}{\beta_{11}}; \frac{x_{B3}}{\beta_{31}} \right\} = \left\{ \frac{6}{1}; \frac{15}{5} \right\}$$
$$\frac{x_{Br}}{\beta_{r1}} = \min\{6, 3\} = 3$$

sehingga vektor yang akan menjadi peubah keluar (LV) adalah vektor b_3 yang berkorespondensi dengan peubah x_{B3}. Jadi yang menjadi LV adalah $x_{B3} = [5\ \ 3\ \ 0\ \ 0\ \ 1]$.

4. Mengakhiri Perhitungan Simpleks

Andaikan diketahui bahwa suatu permasalahan program linear mempunyai solusi basis fisibel yang terbatas jumlahnya, maka yang menjadi pemikiran adalah bagaimana perubahan dari satu solusi basis fisibel ke solusi basis fisibel berikutnya dapat diidentifikasikan dengan menggunakan perhitungan simpleks untuk mencapai suatu nilai fungsi tujuan yang bernilai optimal. Oleh karena jumlah solusi basis fisibel yang terbatas maka jumlah iterasi dalam perhitungan simpleks pun terbatas. ”Sementara itu pada jumlah iterasi yang terbatas pada perhitungan simpleks tersebut dapat diperoleh solusi tak terbatas, adanya kasus siklik, dan kasus degenerasi, hal ini dikarenakan suatu solusi yang tidak degenerasi dan tidak optimal selalu dapat ditunjukkan oleh solusi basis fisibel dengan meningkatkan nilai fungsi tujuan.” Untuk menghindari suatu permasalahan program linear mempunyai solusi tak terbatas, degenerasi, dan ......, terdapat dua kasus penting untuk diperhatikan yang terkait dengan θ pada persamaan (2.25) sehingga akan diperoleh fungsi tujuan yang berkorespondensi dengan solusi basis fisibel yang tidak degenerasi, yaitu

1. Terdapat paling sedikit satu nilai k yang menunjukkan $z_k - c_k < 0$ tetapi θ tidak ada karena $\beta_{ik} \leq 0$ untuk tiap nilai k dan semua i $i = 1, 2, \cdots, m$.
2. Tidak ada k yang menunjukkan $z_k - c_k < 0$. Dengan kata lain terdapat nilai $z_k - c_k \geq 0$ untuk tiap kolom vektor a_j pada matriks **A**.

Kedua kasus tersebut di atas menunjukkan bahwa apabila ada kondisi yang demikian tersebut di atas maka perhitungan simpleks tidak perlu dilanjutkan karena tidak akan diperoleh satu solusi basis fisibel yang tidak degenerasi, ataupun terdapat solusi yang tidak terbatas.

Teorema 2

”Untuk masalah program linear dengan memaksimumkan $z = c^t x$ dengan pembatas linear $Ax = b$ dan pembatas tanda $x \geq 0$. Misalkan solusi basis fisibel ada dan paling sedikit untuk satu nilai k $z_k - c_k < 0$ dan $\beta_{ik} \leq 0$ untuk semua $i = 1, 2, \cdots, m$, maka masalah program linear tersebut mempunyai nilai tak tebatas untuk fungsi tujuannya.”

Teorema 3

”Untuk masalah program linear dengan memaksimumkan $z = c^t x$ dengan pembatas linear dan pembatas tanda $x \geq 0$. Apabila pada solusi basis fisibel yang diperoleh terdapat $z_j - c_j \geq 0$ untuk tiap kolom a_j dari matriks **A** yang tidak terdapat pada matriks **B** maka solusi basis fisibelnya adalah optimal.”

Contoh 4:

Diberikan suatu model permasalahan program linear, berikut ini:

Memaksimumkan: $z = 3x_1 + 3x_2$ (dalam ribuan)

dengan pembatas linear : $\begin{aligned} 2x_1 + \ \ x_2 &\leq 30 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 60 \\ 4x_1 + 3x_2 &\leq 72 \end{aligned}$ dan dengan pembatas tanda $x_1, x_2 \geq 0$

a. Nyatakan permasalahan program linear di atas ke dalam bentuk baku
b. Tentukan matriks basis **B** awalnya
c. Tentukan nilai dari $z_j - c_j$ untuk semua j
d. Tentukan vektor a_k yang akan masuk ke dalam matriks basis (NBV yang akan jadi BV)
e. Tentukan vektor b_r yang akan meninggalkan matriks basis (BV yang akan jadi NBV)

f. Tentukan matriks basis **B** yang baru

g. Tentukan nilai fungsi tujuan pada iterasi 1

h. Tentukan vektor a_k yang akan masuk ke dalam matriks basis (NBV yang akan jadi BV) pada iterasi 1

i. Tentukan nilai fungsi tujuan pada akhir iterasi 2

j. Apakah pada akhir iterasi 2 nilai fungsi tujuan telah mencapai optimal?

Jawab:

a. Karena pembatas linearnya bertanda "≤" maka untuk pembatas linear permasalahan program linear di atas akan ditambahkan *slack variable* sehingga diperoleh bentuk standar:

Memaksimumkan: $z = 3x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$ dengan pembatas linear:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 &= 30 \\ 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 &= 60 \\ 4x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 &= 72 \end{aligned}$$ dengan pembatas tanda $x_1, x_2\ x_3, x_4, x_5 \geq 0$

b. Matriks basis awalnya dibentuk berasal dari penambahan *slack variable* (x_3, x_4, x_5), diperoleh: $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Sedangkan matriks A diperoleh $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

$z_k - c_k = \min\limits_{j=1,\cdots,5} \{z_j - c_j;\ z_j - c_j < 0\}$

c. $z_k - c_k = \min\{(0-3), (0-3), (0-0), (0-0), (0-0)\}$

$z_k - c_k = \min\{-3, -3, 0, 0, 0\} = -3$

d. Karena nilai untuk *k = 1* dan *k = 2* mempunyai nilai $z_k - c_k$ yang sama maka kita boleh memilih nilai *k* yang manapun. Misalkan terlebih vektor yang akan menjadi peubah masuk (EV) adalah vektor a_1 yang berkorespondensi dengan peubah x_1. Jadi yang menjadi EV adalah $x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

e. Vektor b_r (berkorespondensi dengan peubah x_{Br}) akan menjadi peubah keluar (leaving variable/LV) meninggalkan matriks basis apabila r memenuhi syarat:

$$\frac{x_{Br}}{\beta_{r1}} = \min_{i=1,2,3}\left\{\frac{x_{Bi}}{\beta_{ik}};\ \beta_{ik} > 0\right\} = \theta \geq 0$$

$$\frac{x_{Br}}{\beta_{r1}} = \min\left\{\frac{x_{B1}}{\beta_{11}}; \frac{x_{B3}}{\beta_{31}}\right\} = \left\{\frac{30}{2}; \frac{60}{2}; \frac{72}{4}\right\}$$

$$\frac{x_{Br}}{\beta_{r1}} = \min\{15, 30, 18\} = 15$$

sehingga vektor yang akan menjadi peubah keluar (LV) adalah vektor b_1 yang berkorespondensi dengan peubah x_{B1}. Jadi yang menjadi LV adalah $x_{B1} = [2\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0]$.

f. Matriks basis awalnya dibentuk berasal dari penambahan *slack variable* (x_3, x_4, x_5),

diperoleh: $\overline{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} 15 \\ 30 \\ 12 \end{bmatrix} =$

g. Pada iterasi pertama nilai fungsi tujuan yang tadinya $z = 0$ menjadi $\overline{z} = z - \frac{x_{Br}}{\beta_{rk}}(z_k - c_k) = z - \theta(z_k - c_k) = 0 - 15(-3) = 0 + 45 = 45$

h. Pada iterasi 1 diperoleh nilai untuk $\overline{z}_j - c_j = (z_j - c_j) - \frac{\beta_{rj}}{\beta_{rk}}(z_k - c_k)$ adalah

- $\overline{z}_1 - c_1 = (z_1 - c_1) - \frac{\beta_{r1}}{\beta_{r1}}(z_1 - c_1) = -3 - \frac{2}{2}(-3) = -3 + 3 = 0$
- $\overline{z}_2 - c_2 = (z_2 - c_2) - \frac{\beta_{r2}}{\beta_{r1}}(z_1 - c_1) = -3 - \frac{1}{2}(-3) = -3 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$
- $\overline{z}_3 - c_3 = (z_3 - c_3) - \frac{\beta_{r3}}{\beta_{r1}}(z_1 - c_1) = 0 - \frac{1}{2}(-3) = 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$
- $\overline{z}_4 - c_4 = (z_4 - c_4) - \frac{\beta_{r4}}{\beta_{r1}}(z_1 - c_1) = 0 - \frac{0}{2}(-3) = 0 + 0 = 0$
- $\overline{z}_5 - c_5 = (z_5 - c_5) - \frac{\beta_{r5}}{\beta_{r1}}(z_1 - c_1) = 0 - \frac{0}{2}(-3) = 0 + 0 = 0$

sehingga $\bar{z}_k - c_k = \min\left\{0, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0, 0\right\} = -\frac{3}{2}$ untuk nilai *k=2*. Oleh karena itu pada iterasi 1 vektor yang akan menjadi peubah masuk (EV) adalah vektor a_2 yang berkorespondensi dengan peubah x_2. Jadi yang menjadi EV adalah $x_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Sedangkan vektor b_r (berkorespondensi dengan peubah x_{Br}) akan menjadi peubah keluar (leaving variable/LV) meninggalkan matriks basis apabila r memenuhi syarat:

$$\frac{\bar{x}_{Br}}{\beta_{r1}} = \min_{i=1,2,3}\left\{\frac{\bar{x}_{Bi}}{\beta_{ik}};\ \beta_{ik} > 0\right\} = \theta \geq 0$$

$$\frac{\bar{x}_{Br}}{\beta_{r1}} = \min\left\{\frac{\bar{x}_{B1}}{\beta_{11}}; \frac{x_{B2}}{\beta_{31}}; \frac{x_{B3}}{\beta_{31}}\right\} = \left\{\frac{15}{1/2}; \frac{30}{2}; \frac{12}{1}\right\}$$

$$\frac{\bar{x}_{Br}}{\beta_{r1}} = \min\{30, 15, 12\} = 12$$

sehingga vektor yang akan menjadi peubah keluar (LV) adalah vektor b_3 yang berkorespondensi dengan peubah x_{B3}. Jadi yang menjadi LV adalah $x_{B3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, sehingga matriks basis baru B ke-2 dan matriks A baru ke-2 diperoleh: $\bar{B} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ -2 & -1/2 & -1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{2} \\ 15 \\ -3 \end{bmatrix} =$

Pada iterasi kedua nilai fungsi tujuan yang tadinya $z = 45$ menjadi $\bar{z} = z - \frac{x_{Br}}{\beta_{rk}}(z_k - c_k) = z - \theta(z_k - c_k) = 45 - 12\left(-\frac{3}{2}\right) = 45 + 18 = 63$.

Pada iterasi 2 diperoleh nilai untuk $\bar{z}_j - c_j = (z_j - c_j) - \frac{\beta_{rj}}{\beta_{rk}}(z_k - c_k)$ adalah

- $\bar{z}_1 - c_1 = (z_1 - c_1) - \frac{\beta_{r1}}{\beta_{r3}}(z_3 - c_3) = 0 - \frac{0}{1}\left(-\frac{3}{2}\right) = 0 + 0 = 0$
- $\bar{z}_2 - c_2 = (z_2 - c_2) - \frac{\beta_{r2}}{\beta_{r3}}(z_3 - c_3) = -\frac{3}{2} - \frac{1}{1}\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$

- $\bar{z}_3 - c_3 = (z_3 - c_3) - \frac{\beta_{r3}}{\beta_{r3}}(z_3 - c_3) = \frac{3}{2} - \frac{-2}{1}\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{2}$
- $\bar{z}_4 - c_4 = (z_4 - c_4) - \frac{\beta_{r4}}{\beta_{r3}}(z_3 - c_3) = 0 - \frac{0}{1}\left(-\frac{3}{2}\right) = 0 + 0 = 0$
- $\bar{z}_5 - c_5 = (z_5 - c_5) - \frac{\beta_{r5}}{\beta_{r3}}(z_1 - c_1) = 0 - \frac{1}{1}\left(-\frac{3}{2}\right) = 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

Pada akhir iterasi 2 nilai fungsi tujuan belum mencapai optimal hal ini dikarenakan masih terdapat nilai $z_j - c_j < 0$, sedangkan syarat suatu solusi basis fisibel mempunyai nilai fungsi yang optimal adalah $z_j - c_j \geq 0$.

5. Aturan Simpleks

Pada subbahasan ini akan membahas mengenai proses perhitungan simpleks untuk mendapatkan nilai baru untuk β_{ij} dan $z_j - c_j$ serta lebih memperjelas mengenai langkah-langkah yang harus dilakukan pada tiap iterasi simpleks untuk permasalahan program linear memaksimumkan dan meminimumkan fungsi tujuan. Untuk mempermudah dalam perhitungan simpleks, koefisien peubah pembatas linear pada setiap iterasinya dinotasikan dengan $\bar{\beta}_{ij}$. Selain itu, perlu diasumsikan bahwa vektor a_k yang ditempatkan kembali sebagai vektor b_r yang baru pada matriks basis **B** dapat dinyatakan dengan menggunakan tanda ”bar”, $\bar{b}_r = a_k$.

Vektor koefisien peubah x_j yang merupakan vektor kolom a_j pada matriks **A** dapat dinyatakan dalam bentuk hubungan dengan vektor peubah basis sebagai berikut:

$$a_j = \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij} b_i + \beta_{rj} b_r; \quad i \neq r \qquad 2.28$$

dan

$$a_k = \sum_{i=1}^{m} \beta_{ik} b_i + \beta_{rk} b_r; \quad i \neq r \qquad 2.29$$

Berdasarkan persamaan (2.28) dan (2.29) vektor b_r dapat dieliminasi sehingga diperoleh

$$a_j = \sum_{i=1}^{m} \left(\beta_{ij} - \frac{\beta_{ik} \beta_{rj}}{\beta_{rk}} \right) b_i + \frac{\beta_{rj}}{\beta_{rk}} a_k; \qquad 2.30$$

Persamaan (2.30) pada dasarnya menunjukkan aplikasi prinsip operasi baris elementer (OBE). Oleh karena itu, vektor kolom a_j yang dinyatakan pada persamaan (2.28) dapat dinyatakan dengan menggunakan tanda ”bar” dimana hal ini menunjukkan elemen atau vektor yang diperoleh setelah melakukan perhitungan simpleks pada setiap iterasi, yaitu

$$a_j = \sum_{i=1}^{m} \overline{\beta}_{ij}\, \overline{b}_i + \overline{\beta}_{rj}\, \overline{b}_r; \qquad i \neq r \tag{2.31}$$

dengan

$$\overline{\beta}_{ij} = \beta_{ij} - \frac{\beta_{ik}\, \beta_{rj}}{\beta_{rk}}; \quad i \neq k \text{ dan } \overline{\beta}_{rj} = \frac{\beta_{rj}}{\beta_{rk}} \tag{2.32}$$

Langkah selanjutnya dalam melakukan perhitungan simpleks adalah menghitung nilai $\overline{z}_j - c_j$ yang dapat dilakukan dengan menggunakan persamaan di bawah ini:

$$\overline{z}_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} \overline{c}_{Bi}\, \overline{\beta}_{ij} - c_j \tag{2.33}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.32) dan persamaan (2.33) ke persamaan (2.31) maka akan diperoleh

$$\overline{z}_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_{Bi} \left(\beta_{ij} - \frac{\beta_{ik}\, \beta_{rj}}{\beta_{rk}} \right) + \left(\frac{c_k\, \beta_{ri}}{\beta_{rk}} \right) - c_j$$

$$\overline{z}_j - c_j = \left(z_j - c_j \right) - \frac{\beta_{rj}}{\beta_{rk}} \left(z_k - c_k \right) \tag{2.34}$$

Pada umumnya permasalahan optimasi fungsi tujuan $z = f\left(x_1, \cdots, x_n\right)$ adalah memaksimumkan atau meminimumkan maka tahapan pada iterasi simpleks yang perlu diperhatikan antara lain:

(1). Permasalahan memaksimumkan $z = f\left(x_1, \cdots, x_n\right)$

Misalkan permasalahan program linear yang diberikan adalah

Memaksimumkan: $z = c^t x$ dengan pembatas linear $Ax = b$ dan $x \geq 0$, mempunyai solusi basis fisibel x_B, selain itu dikatahui pula nilai $z,\ \beta_{ij},\ z_j - c_j$ untuk semua i dan j. Pada setiap tahap iterasi perhitungan simpleks ada tiga aspek yang harus dilakukan dan diperhatikan sehingga dapat diputuskan bahwa nilai maksimum fungsi tujuan $z = f\left(x_1, \cdots, x_n\right)$ telah diperoleh.

1.a. Pengujian untuk solusi optimal

Apabila $z_j - c_j \geq 0$ untuk semua j, dimana $j = 1, 2, \cdots, N$ maka solusi yang diperoleh merupakan solusi yang optimal.

1.b. Pengujian untuk solusi tanpa batas (*unbounded solution*)

Apabila terdapat satu atau lebih j (misalnya $j = k$) untuk $z_j - c_j < 0$ dan $\beta_{ij} \leq 0$ untuk semua i, yaitu $i = 1, 2, \cdots, m$, maka terdapat suatu solusi tanpa batas dengan satu nilai tanpa batas pada fungsi tujuan.

1.c. Apabila permasalahan program linear bukan merupakan kasus **1a** maupun kasus **1b,** maka terdapat paling sedikit satu j dimana $z_j - c_j < 0$ dan $\beta_{ij} \geq 0$ untuk paling sedikit satu i untuk tiap j. Peubah x_k akan menjadi BV apabila *k* dipilih berdasarkan aturan:

$$z_j - c_j = \min_{j=1,\cdots,N} \{z_j - c_j;\ z_j - c_j < 0,\ \ \beta_{ij} > 0,\ \ \text{untuk minimal satu } i = 1, 2, \cdots, m\} \qquad 2.34$$

Apabila dengan perumusan ini tidak dapat ditentukan r yang tunggal maka salah satu nilai r sembarang dapat dipilih.

2. Apabila point **1c** terpenuhi, maka peubah x_{Br} akan menjadi NBV dimana *r* dipilih berdasarkan aturan:

$$\frac{x_{Br}}{\beta_{rk}} = \min_{i=1,\cdots,m} \left\{ \frac{x_{Bi}}{\beta_{ik}};\ \beta_{ik} > 0 \right\} = \theta \geq 0 \qquad 2.35$$

Apabila dengan aturan ini tidak dapat ditentukan satu *r* maka dapat dipilih satu nilai *r* sembarang.

3. Selanjutnya menghitung $\bar{x}_{Bi},\ \bar{z},\ \bar{\beta}_{ij},\ \bar{z}_j - c_j$ untuk semua *i* dan *j*.

Secara teknik ketentuaan ataupun aturan yang tersebut di atas dapat dinyatakan dalam bentuk tabel simpleks dengan tujuan untuk memperhitungan simpleks. Semua ketentuan yang berlaku dalam menyelesaikan permasalahan program linear dengan fungsi tujuan memaksimumkan $z = f(x_1, \cdots, x_n)$ dapat diringkas dalam penjelasan berikut ini.

Metode Simpleks Kasus Memaksimumkan $z = f(x_1, \cdots, x_n)$

Berikut ini merupakan langkah-langkah untuk menentukan solusi permasalahan program linear fungsi tujuan memaksimumkan dengan menggunakan metode simpleks.

1. Mengubah semua pembatas linear ke bentuk standar dengan menambahkan *slack variable* atau mengurangi *surplus variable* pada pembatas linear tersebut. Slack variables yang ada dimasukkan (ditambahkan) ke fungsi tujuan dan diberi koefisien 0.

2. Apakah dalam matriks $A = \{a_{ij}\}$ sudah terbentuk matriks identitas (I_n)?

   a. Apabila dalam matriks A sudah terbentuk matriks identitas maka disusun tabel awal simpleks sebagai berikut:

BV	z	x_1	...	x_n	x_{n+1}	...	x_N	Solusi (RK)	R_i
$z_j - c_j$	1	$z_1 - c_1$	...	$z_n - c_n$	$z_{n+1} - c_{n+1}$	...	$z_N - c_N$	0	
x_{n+1}	0	β_{11}	...	β_{1n}	$\beta_{1(n+1)}$	...	β_{1N}	x_{B1}	R_1
$\vdots$	0	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_N	0	β_{m1}	...	β_{mn}	$\beta_{m(n+1)}$	...	β_{mN}	x_{Bm}	R_m

   b. Apabila belum terbentuk matriks identitas, maka matriks identitas dimunculkan dengan menambahkan peubah semu (*artificial variable*). Peubah semu yang ada dimasukkan di fungsi tujuan, sedangkan koefisien dari peubah semu pada fungsi tujuan diberi nilai $(-M)$, dengan M adalah bilangan yang cukup besar. Untuk lebih jelasnya biasanya perubah semu (artificial variable) ditambahkan pada pembatas linear dengan batasan bertanda "$\geq$" dan "$=$". Selanjutnya ke langkah (2.a).

3. Penelitian terhadap nilai $z_j - c_j$ (tabel simpleks sudah maksimum apabila semua $z_j - c_j \geq 0$).

   a. Apabila untuk semua *j* diperoleh $z_j - c_j \geq 0$, maka dilanjutkan ke langkah ke-4

   b. Apabila ada satu atau lebih $z_j - c_j < 0$ maka akan dibuat tabel simpleks baru dengan cara berikut ini:

      (i). Menentukan kolom kunci yaitu dengan memilih nilai $z_j - c_j$ yang terkecil sesuai dengan aturan pada persamaan (2.27a) dan misalkan diperoleh $z_k - c_k$, maka kolom ke-*k* dinamakan **kolom kunci/kolom masuk** (***entering colomn***/EC)

      (ii). Pada EC dilakukan pemeriksaan terhadap nilai β_{ik}

      - Apabila untuk semua β_{ik} nilainya negatif maka diperoleh solusi tak terbatas (*unbounded solution*)
      - Apabila terdapat β_{ik} yang nilainya positif maka hitunglah nilai dari R_i (ingat! hanya untuk β_{ik} yang positif saja), kemudian dilanjutkan ke langkah 3.b.(iii).

(iii). Menentukan baris kunci, yaitu dengan memilih nilai R_i yang terkecil (diantara yang positif) sesuai dengan aturan pada persamaan (2.25) dan misalkan diperoleh b_r, maka baris ke-*r* dinamakan **baris kunci/persamaan pivot** (pivot equation/PE).

Prosedur untuk memilih peubah masuk (EV) dan peubah keluar (LV) dinamakan sebagai kondisi optimalisasi dan kondisi kelayakan. Kondisi optimalisasi: EV dalam maksimasi (minimasi) adalah NBV dengan koefisien yang paling negatif (positif) dalam persamaan z tujuan. Koefisien dengan nilai yang sama dapat dipilih secara sembarang. Nilai optimum dicapai ketika semua koefisien non-dasar dalam persamaan z adalah nonnegatif(nonpositif). Kondisi kelayakan: Baik untuk masalah maksimasi (minimasi), LV adalah BV yang memiliki titik potong terkecil (rasio minimum dengan penyebut yang positif secara ketat) dalam arah EV. Nilai yang sama dapat dipilih secara sembarang.

(iv). Selanjutnya menyusun tabel simpleks baru atau perhitungan simpleks dengan iterasi-iterasi yaitu dengan cara:

- Sebelum menentukan elemen-elemen baris ke-*r* yang baru perlu diketahui bahwa elemen titik potong antara EC dan PE dinamakan **elemen pivot** (β_{rk}).
- Untuk elemen baris ke-*r* (b_r) biasanya dinamakan persamaan pivot baru (*new*PE) ditentukan dengan perumusan:

$$\text{newPE} = PE \div \beta_{rk} \qquad 2.36$$

- Untuk elemen baris ke-*i* yang lainnya ditentukan dengan perumusan:

$$\text{Persamaan baru} = \text{persamaan lama} - (\beta_{ik}) \times (\text{newPE}) \qquad 2.37$$

4. Apabila untuk semua *j* nilai dari $z_j - c_j$ adalah $z_j - c_j \geq 0$, maka fungsi tujuannya telah mencapai optimal.

Contoh 5:

Diberikan suatu model permasalahan program linear, berikut ini:

Memaksimumkan: $z = 3x_1 + 3x_2$ (dalam ribuan)

dengan pembatas linear : $\begin{aligned} 2x_1 + \ \ x_2 &\leq 30 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 60 \\ 4x_1 + 3x_2 &\leq 72 \end{aligned}$ dan dengan pembatas tanda $x_1, x_2 \geq 0$

Jawab:

1. Karena pembatas linearnya bertanda "≤" maka untuk pembatas linear permasalahan program linear di atas akan ditambahkan *slack variable* sehingga diperoleh bentuk standar:

   Memaksimumkan: $z = 3x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$ dengan pembatas linear:

   $2x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 30$
   $2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 = 60$ dengan pembatas tanda $x_1, x_2\ x_3, x_4, x_5 \geq 0$
   $4x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 = 72$

2. Membentuk tabel simpleks awal

BV	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Solusi (RK)	R_i
$z_j - c_j$	1	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	$z_3 - c_3$	$z_4 - c_4$	$z_5 - c_5$	0	
x_3	0	β_{11}	β_{12}	β_{13}	β_{14}	β_{15}	x_{B1}	R_1
x_4	0	β_{21}	β_{22}	β_{23}	β_{24}	β_{25}	x_{B2}	R_2
x_5	0	β_{31}	β_{23}	β_{33}	β_{34}	β_{35}	x_{B3}	R_3

Berdasarkan permasalahan di atas maka diperoleh tabel simpleks awal berikut:

BV	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Solusi (RK)	R_i
$z_j - c_j$	1	-3	-3	0	0	0	0	
x_3	0	2	1	1	0	0	30	
x_4	0	2	3	0	1	0	60	
x_5	0	4	3	0	0	1	72	

3. Perhitungan simpleks

❖ Iterasi ke-1

- Menentukan kolom kunci/kolom masuk (EC), berdasarkan tabel awal diketahui bahwa terdapat dua nilai minimum $z_j - c_j$ yang sama yaitu $z_1 - c_1 = -3$ pada kolom ke-*1* dan $z_2 - c_2 = -3$ pada kolom ke-*2*. Misalkan dipilih kolom ke-*1* sebagai kolom kunci/kolom masuk (EC), sehingga diperoleh *k=1*.
- Selanjutnya akan pada EC dilakukan pemeriksaan terhadap nilai β_{i1}, karena $\beta_{11} = 2, \beta_{21} = 2, \beta_{31} = 4$, karena semua β_{i1} bernilai positif, maka akan dihitung nilai dari R_i, dan diperoleh $R_1 = \frac{x_{B1}}{\beta_{11}} = \frac{30}{2} = 15,\ R_2 = \frac{x_{B2}}{\beta_{21}} = \frac{60}{2} = 30,\ R_3 = \frac{x_{B3}}{\beta_{31}} = \frac{72}{4} = 18$.
- Menentukan baris kunci, berdasarkan perhitungan R_i diperoleh bahwa $\min R_i = (15, 30, 18) = 15$ dan diperoleh b_1, oleh karena itu, baris ke-*1* dinamakan **baris kunci/persamaan pivot** (pivot equation/PE).

- Sebelum menentukan elemen-elemen baris ke-*1* yang baru perlu diketahui bahwa elemen titik potong antara EC dan PE dinamakan **elemen pivot** yaitu $(\beta_{11} = 2)$.
- Untuk elemen baris ke-*1* (b_1) biasanya dinamakan persamaan pivot baru (*new*PE) ditentukan dengan perumusan:

  Persamaan pivot dari tabel awal adalah $b_1 = x_3 = [2 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 30]$, maka

  $$\text{newPE} = \bar{\text{b}}_1 = x_1 = [2 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 30] \div 2 = \left[1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 15\right]$$

- Menentukan elemen-elemen pada baris ke-*i* yang lainnya, diperoleh:
  - Persamaan *z* lama pada tabel awal adalah $[-3 \quad -3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$. Diketahui bahwa $\beta_{01} = -3$.

    $$\text{Persamaan } z \text{ baru } = [-3 \quad -3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] - (-3) \times \left[1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 15\right]$$

    $$= [-3 \quad -3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] - \left[-3 \quad -\frac{3}{2} \quad -\frac{3}{2} \quad 0 \quad 0 \quad -45\right]$$

    $$\text{Persamaan } z \text{ baru } = \left[0 \quad -\frac{3}{2} \quad \frac{3}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 45\right]$$

  - Persamaan x_4 lama pada tabel awal adalah $[2 \quad 3 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 60]$. Diketahui bahwa $\beta_{21} = 2$.

    $$\text{Persamaan } x_4 \text{ baru } = [2 \quad 3 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 60] - (2) \times \left[1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 15\right]$$

    $$= [2 \quad 3 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 60] - [2 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 30]$$

    $$\text{Persamaan } x_4 \text{ baru } = [0 \quad 2 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \quad 30]$$

  - Persamaan x_5 lama pada tabel awal adalah $[4 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 72]$. Diketahui bahwa $\beta_{31} = 4$.

    $$\text{Persamaan } x_5 \text{ baru } = [4 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 72] - (4) \times \left[1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 15\right]$$

    $$= [4 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 72] - [4 \quad 2 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 60]$$

    $$\text{Persamaan } x_5 \text{ baru } = [0 \quad 1 \quad -2 \quad 0 \quad 1 \quad 12]$$

Berdasarkan semua perhitungan di atas, maka diperoleh tabel simpleks baru pada iterasi 1 dengan EV adalah x_1 dan LV adalah x_3.

BV	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Solusi	R_i

							(RK)	
$z_j - c_j$	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	45	
x_1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	15	
x_4	0	0	2	-1	1	0	30	
x_5	0	0	1	-2	0	1	12	

Karena ada satu nilai dari $z_j - c_j$ untuk $j = 1, 2, \cdots, 5$ yang $z_j - c_j < 0$, maka fungsi tujuan belum mencapai optimal, sehingga perlu dilakukan perhitungan simpleks ulang untuk iterasi ke-*2*.

❖ Iterasi ke-2

- Menentukan kolom kunci/kolom masuk (EC), berdasarkan tabel pada iterasi ke-*1* diketahui bahwa terdapat satu nilai minimum yaitu $z_2 - c_2 = -\frac{3}{2}$ pada kolom ke-*2*. Oleh karena itu, kolom ke-*2* merupakan kolom kunci/kolom masuk (EC), sehingga diperoleh *k=2*.
- Selanjutnya akan pada EC dilakukan pemeriksaan terhadap nilai β_{i2}, karena $\beta_{12} = \frac{1}{2}, \beta_{22} = 2, \beta_{32} = 1$, karena semua β_{i1} bernilai positif, maka akan dihitung nilai dari R_i, dan diperoleh $R_1 = \frac{x_{B1}}{\beta_{12}} = \frac{30}{\frac{1}{2}} = 60,\ R_2 = \frac{x_{B2}}{\beta_{22}} = \frac{30}{2} = 15,\ R_3 = \frac{x_{B3}}{\beta_{32}} = \frac{12}{1} = 12$.
- Menentukan baris kunci, berdasarkan perhitungan R_i diperoleh bahwa $\min R_i = (60, 15, 12) = 12$ dan diperoleh b_3, oleh karena itu, baris ke-*3* dinamakan **baris kunci/persamaan pivot** (pivot equation/PE).
- Sebelum menentukan elemen-elemen baris ke-*3* yang baru perlu diketahui bahwa elemen titik potong antara EC dan PE dinamakan **elemen pivot** yaitu $(\beta_{32} = 1)$**.**
- Untuk elemen baris ke-*3* (b_3) biasanya dinamakan persamaan pivot baru (*new*PE) ditentukan dengan perumusan:

  Persamaan pivot dari tabel simpleks iterasi ke-*1* adalah $b_3 = x_5 = [0 \quad 1 \quad -2 \quad 0 \quad 1 \quad 12]$, maka

  $\text{newPE} = \bar{\text{b}}_3 = x_2 = [0 \quad 1 \quad -2 \quad 0 \quad 1 \quad 12] \div 1 = [0 \quad 1 \quad -2 \quad 0 \quad 1 \quad 12]$
- Menentukan elemen-elemen pada baris ke-*i* yang lainnya, diperoleh:

- Persamaan z lama pada iterasi ke-*1* adalah $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 45 \end{bmatrix}$.

  Diketahui bahwa $\beta_{02} = -\frac{3}{2}$.

  $$\text{Persamaan } z \text{ baru } = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 45 \end{bmatrix} - \left(-\frac{3}{2}\right) \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

  $$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 45 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & 3 & 0 & -\frac{3}{2} & -18 \end{bmatrix}$$

  $$\text{Persamaan } z \text{ baru } = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 63 \end{bmatrix}$$

- Persamaan x_1 lama pada iterasi ke-*1* adalah $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$. Diketahui bahwa $\beta_{12} = \frac{1}{2}$.

  $$\text{Persamaan } x_1 \text{ baru } = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} - \left(\frac{1}{2}\right) \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

  $$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 6 \end{bmatrix}$$

  $$\text{Persamaan } x_1 \text{ baru } = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 9 \end{bmatrix}$$

- Persamaan x_4 lama pada iterasi ke-*1* adalah $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 30 \end{bmatrix}$. Diketahui bahwa $\beta_{22} = 2$.

  $$\text{Persamaan } x_4 \text{ baru } = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 30 \end{bmatrix} - (2) \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

  $$= \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 30 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 & 0 & 2 & 24 \end{bmatrix}$$

  $$\text{Persamaan } x_4 \text{ baru } = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan semua perhitungan di atas, maka diperoleh tabel simpleks baru pada iterasi 2 dengan EV adalah x_2 dan LV adalah x_5.

BV	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Solusi (RK)	R_i
$z_j - c_j$	1	0	0	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	63	
x_1	0	1	0	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	9	
x_4	0	0	0	3	1	-2	6	

x_2	0	0	1	-2	0	1	12	

Karena masih ada satu nilai dari $z_j - c_j$ untuk $j = 1, 2, \cdots, 5$ yang $z_j - c_j < 0$, maka fungsi tujuan belum mencapai optimal, sehingga perlu dilakukan perhitungan simpleks ulang untuk iterasi ke-*3*.

- Iterasi ke-*3*
  - Menentukan kolom kunci/kolom masuk (EC), berdasarkan tabel pada iterasi ke-*2* diketahui bahwa terdapat satu nilai minimum yaitu $z_3 - c_3 = -\frac{3}{2}$ pada kolom ke-*3*. Oleh karena itu, kolom ke-*3* merupakan kolom kunci/kolom masuk (EC), sehingga diperoleh *k=3*.
  - Selanjutnya akan pada EC dilakukan pemeriksaan terhadap nilai β_{i3}, karena $\beta_{13} = \frac{3}{2}, \beta_{23} = 3, \beta_{33} = -2$, karena tidak semua β_{i1} bernilai positif, maka hanya akan dihitung nilai dari R_i untuk $i = 1$ dan $i = 2$, sehingga diperoleh $R_1 = \frac{x_{B1}}{\beta_{13}} = \frac{9}{\frac{3}{2}} = 6,\ R_2 = \frac{x_{B2}}{\beta_{23}} = \frac{6}{2} = 3$.
  - Menentukan baris kunci, berdasarkan perhitungan R_i diperoleh bahwa $\min R_{i=1,2} = (6, 3,) = 3$ dan diperoleh b_2, oleh karena itu, baris ke-*2* dinamakan **baris kunci/persamaan pivot** (pivot equation/PE).
  - Sebelum menentukan elemen-elemen baris ke-*2* yang baru perlu diketahui bahwa elemen titik potong antara EC dan PE dinamakan **elemen pivot** yaitu $(\beta_{23} = 3)$**.**
  - Untuk elemen baris ke-*2* (b_2) biasanya dinamakan persamaan pivot baru (*new*PE) ditentukan dengan perumusan:

    Persamaan pivot dari tabel simpleks iterasi ke-*2* adalah $b_2 = x_4 = [0 \quad 0 \quad 3 \quad 1 \quad -2 \quad 6]$, maka

    $$\text{newPE} = \bar{\text{b}}_2 = x_3 = [0 \quad 0 \quad 3 \quad 1 \quad -2 \quad 6] \div 3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 2 \end{bmatrix}$$
  - Menentukan elemen-elemen pada baris ke-*i* yang lainnya, diperoleh:
    - Persamaan *z* lama pada iterasi ke-*2* adalah $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 63 \end{bmatrix}$. Diketahui bahwa $\beta_{02} = -\frac{3}{2}$.

$$\text{Persamaan } z \text{ baru } = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 63 \end{bmatrix} - \left(-\frac{3}{2}\right) \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 63 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Persamaan } z \text{ baru } = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 66 \end{bmatrix}$$

- Persamaan x_1 lama pada iterasi ke-*2* adalah $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 9 \end{bmatrix}$. Diketahui bahwa $\beta_{13} = \frac{3}{2}$.

$$\text{Persamaan } x_1 \text{ baru } = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 9 \end{bmatrix} - \left(\frac{3}{2}\right) \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Persamaan } x_1 \text{ baru } = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 6 \end{bmatrix}$$

- Persamaan x_2 lama pada iterasi ke-*2* adalah $[0 \quad 1 \quad -2 \quad 0 \quad 1 \quad 12]$. Diketahui bahwa $\beta_{33} = -2$.

$$\text{Persamaan } x_2 \text{ baru } = [0 \quad 1 \quad -2 \quad 0 \quad 1 \quad 12] - (-2) \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 2 \end{bmatrix}$$

$$= [0 \quad 1 \quad -2 \quad 0 \quad 1 \quad 12] - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Persamaan } x_2 \text{ baru } = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 16 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan semua perhitungan di atas, maka diperoleh tabel simpleks baru pada iterasi 3 dengan EV adalah x_3 dan LV adalah x_4.

BV	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Solusi (RK)	R_i
$z_j - c_j$	1	0	0	0	2	$\frac{1}{2}$	66	
x_1	0	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	6	
x_3	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	2	

x_2	0	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	16	

Karena semua nilai dari $z_j - c_j$ untuk $j = 1, 2, \cdots, 5$ sudah memenuhi $z_j - c_j \geq 0$, maka fungsi tujuan telah mencapai optimal, dan nilai maksimum fungsi tujuannya adalah 66 dengan nilai-nilai $x_1 = 6,\ x_2 = 16\ x_3 = 2,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0$.

Untuk lebih memahami mengenai perhitungan simpleks untuk permasalahan program linear dengan fungsi tujuan memaksimumkan $z = f(x_1, \cdots, x_n)$, kerjakanlah soal-soal latihan berikut ini.

1.

2) Permasalahan meminimumkan $z = f(x_1, \cdots, x_n)$

Misalkan permasalahan program linear yang diberikan adalah

Meminimumkan: $z = c^t x$ dengan pembatas linear $Ax = b$ dan $x \geq 0$, mempunyai solusi basis fisibel x_B, selain itu dikatahui pula nilai $z,\ \beta_{ij},\ z_j - c_j$ untuk semua i dan j. Pada setiap tahap iterasi perhitungan simpleks ada tiga aspek yang harus dilakukan dan diperhatikan sehingga dapat diputuskan bahwa nilai minimum fungsi tujuan $z = f(x_1, \cdots, x_n)$ telah diperoleh.

1.a. Pengujian untuk solusi optimal

Apabila $z_j - c_j \leq 0$ untuk semua j, dimana $j = 1, 2, \cdots, N$ maka solusi yang diperoleh merupakan solusi yang optimal.

1.b. Pengujian untuk solusi tanpa batas (*unbounded solution*)

Apabila terdapat satu atau lebih j (misalnya $j = k$) untuk $z_j - c_j > 0$ dan $\beta_{ij} \leq 0$ untuk semua i, yaitu $i = 1, 2, \cdots, m$, maka terdapat suatu solusi tanpa batas dengan satu nilai tanpa batas pada fungsi tujuan.

1.c. Apabila permasalahan program linear bukan merupakan kasus **1a** maupun kasus **1b,** maka terdapat paling sedikit satu j dimana $z_j - c_j > 0$ dan $\beta_{ij} \geq 0$ untuk paling sedikit satu i untuk tiap j. Peubah x_k akan menjadi BV apabila k dipilih berdasarkan aturan:

$$z_j - c_j = \max_{j = 1, \cdots, N} \{z_j - c_j;\ z_j - c_j > 0,\ \ \beta_{ij} > 0,\ \text{untuk minimal satu}\ i = 1, 2, \cdots, m\} \qquad 2.36$$

Apabila dengan perumusan ini tidak dapat ditentukan r yang tunggal maka salah satu nilai r sembarang dapat dipilih.

2. Apabila point **1c** terpenuhi, maka peubah x_{Br} akan menjadi NBV dimana r dipilih berdasarkan aturan:

$$\frac{x_{Br}}{\beta_{rk}} = \min_{i=1,\cdots,m} \left\{ \frac{x_{Bi}}{\beta_{ik}};\ \beta_{ik} > 0 \right\} = \theta \geq 0 \qquad 2.37$$

Apabila dengan aturan ini tidak dapat ditentukan satu *r* maka dapat dipilih satu nilai *r* sembarang.

3. Selanjutnya menghitung $\bar{x}_{Bi}$, $\bar{z}$, $\bar{\beta}_{ij}$, $\bar{z}_j - c_j$ untuk semua *i* dan *j*.

Alternatif lain untuk menentukan nilai minimum fungsi tujuan $z = f(x_1, \cdots, x_n)$ dapat dilakukan dengan mengubah fungsi tujuan menjadi memaksimumkan $(-z)$ atau mengalikan fungsi tujuan dengan (-1), dimana pembatas linearnya tetap sama, dan iterasi perhitungan simpleks tetap dilakukan dengan menggunakan ketentuan atau aturan memaksimumkan $(-z)$, setelah nilai $(-z)$ maksimum diperoleh maka nilai minimum *z* diperoleh dengan mengalikan nilai maksimum $(-z)$ tersebut dengan (-1).

Secara teknik ketentuaan ataupun aturan yang tersebut di atas dapat dinyatakan dalam bentuk tabel simpleks dengan tujuan untuk memperhitungan simpleks. Semua ketentuan yang berlaku dalam menyelesaikan permasalahan program linear dengan fungsi tujuan memaksimumkan $z = f(x_1, \cdots, x_n)$ dapat diringkas dalam penjelasan berikut ini.

Metode Simpleks Kasus Meminimumkan $z = f(x_1, \cdots, x_n)$

Berikut ini merupakan langkah-langkah untuk menentukan solusi permasalahan program linear fungsi tujuan meminimumkan dengan menggunakan metode simpleks.

1. Mengubah semua pembatas linear ke bentuk standar dengan menambahkan *slack variable* atau mengurangi *surplus variable* pada pembatas linear tersebut. Slack variables (*Surplus variables*) yang ada ditambahkan ke fungsi tujuan dan diberi koefisien 0.

2. Apakah dalam matriks $A = \{a_{ij}\}$ sudah terbentuk matriks identitas (I_n)?

   a. Apabila dalam matriks **A** sudah terbentuk matriks identitas maka disusun tabel awal simpleks sebagai berikut:

BV	z	x_1	...	x_n	x_{n+1}	...	x_N	Solusi (RK)	R_i
$z_j - c_j$	1	$z_1 - c_1$	...	$z_n - c_n$	$z_{n+1} - c_{n+1}$	...	$z_N - c_N$	0	
x_{n+1}	0	β_{11}	...	β_{1n}	$\beta_{1(n+1)}$	...	β_{1N}	x_{B1}	R_1
$\vdots$	0	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_N	0	β_{m1}	...	β_{mn}	$\beta_{m(n+1)}$	...	β_{mN}	x_{Bm}	R_m

   b. Apabila belum terbentuk matriks identitas, maka matriks identitas dimunculkan dengan menambahkan peubah semu (*artificial variable*). Peubah semu yang ada dimasukkan di fungsi tujuan, sedangkan koefisien dari peubah semu pada fungsi tujuan diberi nilai $(+M)$, dengan M adalah bilangan yang cukup besar. Untuk lebih jelasnya biasanya perubah semu (artificial variable) ditambahkan pada pembatas linear dengan batasan bertanda $"\geq"$ dan $"="$. Selanjutnya ke langkah (2.a).

3. Penelitian terhadap nilai $z_j - c_j$ (tabel simpleks sudah minimum apabila semua $z_j - c_j \leq 0$).

   a. Apabila untuk semua *j* diperoleh $z_j - c_j \leq 0$, maka dilanjutkan ke langkah ke-4

   b. Apabila ada satu atau lebih $z_j - c_j > 0$ maka akan dibuat tabel simpleks baru dengan cara berikut ini:

      (iii). Menentukan kolom kunci yaitu dengan memilih nilai $z_j - c_j$ yang terbesar sesuai dengan aturan pada persamaan (2.36) dan misalkan diperoleh $z_k - c_k$, maka kolom ke-*k* dinamakan **kolom kunci/kolom masuk** (***entering colomn***/EC)

      (iv). Pada EC dilakukan pemeriksaan terhadap nilai β_{ik}

      - Apabila untuk semua β_{ik} nilainya negatif maka diperoleh solusi tak terbatas (*unbounded solution*)

- Apabila terdapat β_{ik} yang nilainya positif maka hitunglah nilai dari R_i (ingat! hanya untuk β_{ik} yang positif saja), kemudian dilanjutkan ke langkah 3.b.(iii).

(iii). Menentukan baris kunci, yaitu dengan memilih nilai R_i yang terkecil (diantara yang positif) sesuai dengan aturan pada persamaan (2.25) dan misalkan diperoleh b_r, maka baris ke-*r* dinamakan **baris kunci/persamaan pivot** (pivot equation/PE).

(iv). Selanjutnya menyusun tabel simpleks baru atau perhitungan simpleks dengan iterasi-iterasi yaitu dengan cara:

- Sebelum menentukan elemen-elemen baris ke-*r* yang baru perlu diketahui bahwa elemen titik potong antara EC dan PE dinamakan **elemen pivot** (β_{rk})**.**
- Untuk elemen baris ke-*r* (b_r) biasanya dinamakan persamaan pivot baru (*new*PE) ditentukan dengan perumusan:

$$\text{newPE} = PE \div \beta_{rk} \qquad 2.36$$

- Untuk elemen baris ke-*i* yang lainnya ditentukan dengan perumusan:

$$\text{Persamaan baru} = \text{persamaan lama} - (\beta_{ik}) \times (\text{newPE}) \qquad 2.37$$

4. Apabila untuk semua *j* nilai dari $z_j - c_j$ adalah $z_j - c_j \le 0$, maka fungsi tujuannya telah mencapai optimal.

Contoh 6:

Diberikan suatu model permasalahan program linear, berikut ini:

Meminimumkan: $z = 40x_1 + 80x_2$

dengan pembatas linear : $\begin{aligned} x_1 + \ x_2 &\ge 4 \\ x_1 + 3x_2 &\ge 6 \end{aligned}$ dan dengan pembatas tanda $x_1, x_2 \ge 0$

Jawab:

1. Karena pembatas linearnya bertanda "$\ge$" maka untuk pembatas linear permasalahan program linear di atas akan dikurangkan *surplus variable* sehingga diperoleh bentuk standar:

   Meminimumkan: $z = 40x_1 + 80x_2 + 0x_3 + 0x_4$ dengan pembatas linear:

   $\begin{aligned} x_1 + \ x_2 - \ x_3 + 0x_4 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 + 0x_3 - \ x_4 &= 6 \end{aligned}$ dengan pembatas tanda $x_1, x_2\ x_3, x_4 \ge 0$

Membentuk tabel simpleks awal

BV	z	x_1	x_2	x_3	x_4	Solusi (RK)	R_i
$z_j - c_j$	1	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	$z_3 - c_3$	$z_4 - c_4$	0	
x_3	0	β_{11}	β_{12}	β_{13}	β_{14}	x_{B1}	R_1
x_4	0	β_{21}	β_{22}	β_{23}	β_{24}	x_{B2}	R_2
x_5	0	β_{31}	β_{23}	β_{33}	β_{34}	x_{B3}	R_3

Berdasarkan permasalahan di atas maka diperoleh tabel simpleks awal berikut:

BV	z	x_1	x_2	x_3	x_4	Solusi (RK)	R_i
$z_j - c_j$	1	-40	-80	0	0	0	
x_3	0	1	1	-1	0	4	
x_4	0	1	3	0	-1	6	

Ternyata berdasarkan tabel di atas dapat dilihat bahwa belum terbentuk matriks identitas sehingga pada bentuk standar sebelumnya perlu ditambahkan *artificial variables* sehingga akan terbentuk matriks identitas, dan koefisien *artificial variables* pada fungsi tujuan .diberi nilai $(+M)$, dengan M adalah bilangan yang cukup besar, dan diperoleh bentuk standar yaitu:

Meminimumkan: $z = 40x_1 + 80x_2 + 0x_3 + 0x_4 + Mx_5 + Mx_6$ dengan pembatas linear:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + 0x_4 + x_5 + 0x_6 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 + 0x_3 - x_4 + 0x_5 + x_6 &= 6 \end{aligned}$$ dengan pembatas tanda $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

Perlu diingat bahwa pada akhir perhitungan nilai dari artificial variables sudah pasti nol, oleh karena itu terlebih dahulu substitusikan:

$$x_5 = 4 - x_1 - x_2 + x_3$$

$$x_6 = 6 - x_1 - 3x_2 + x_4$$

ke dalan fungsi tujuan dan diperoleh:

Meminimumkan:

$$z = 40x_1 + 80x_2 + 0x_3 + 0x_4 + M(4 - x_1 - x_2 + x_3) + M(6 - x_1 - 3x_2 + x_4)$$
$$z = (40 - M - M)x_1 + (80 - M - 3M)x_2 + (M)x_3 + (M)x_4 + 4M + 6M$$
$$-10M = (40 - 2M)x_1 + (80 - 4M)x_2 + Mx_3 + Mx_4$$

sehingga tabel simpleksnya menjadi:

BV	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Solusi (RK)	R_i
$z_j - c_j$	1	$2M - 40$	$4M - 80$	$-M$	$-M$	0	10M	
x_5	0	1	1	-1	0	1	4	
x_6	0	1	3	0	-1	0	6	

2. Perhitungan simpleks

❖ Iterasi ke-1

- Menentukan kolom kunci/kolom masuk (EC), berdasarkan tabel awal diketahui bahwa terdapat satu nilai maksimum $z_j - c_j$ yaitu $z_2 - c_2 = 4M - 80$ pada kolom ke-*2*. Misalkan dipilih kolom ke-*2* sebagai kolom kunci/kolom masuk (EC), sehingga diperoleh *k=2*.
- Selanjutnya akan pada EC dilakukan pemeriksaan terhadap nilai β_{i2}, karena $\beta_{12} = 1, \beta_{22} = 3$, karena semua β_{i2} bernilai positif, maka akan dihitung nilai dari R_i, dan diperoleh $R_1 = \frac{x_{B2}}{\beta_{12}} = \frac{4}{1} = 4,\ R_2 = \frac{x_{B2}}{\beta_{22}} = \frac{6}{3} = 2$.
- Menentukan baris kunci, berdasarkan perhitungan R_i diperoleh bahwa $\min R_i = (4, 2,) = 2$ dan diperoleh b_2, oleh karena itu, baris ke-*2* dinamakan **baris kunci/persamaan pivot** (pivot equation/PE).
- Sebelum menentukan elemen-elemen baris ke-*1* yang baru perlu diketahui bahwa elemen titik potong antara EC dan PE dinamakan **elemen pivot** yaitu $(\beta_{22} = 3)$**.**
- Untuk elemen baris ke-*2* (b_2) biasanya dinamakan persamaan pivot baru (*new*PE) ditentukan dengan perumusan:

  Persamaan pivot dari tabel awal adalah $b_2 = x_6 = [1 \quad 3 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 6]$, maka

  $$\text{newPE} = \bar{b}_2 = x_2 = [1 \quad 3 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 6] \div 3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 2 \end{bmatrix}$$
- Menentukan elemen-elemen pada baris ke-*i* yang lainnya, diperoleh:
  - Persamaan *z* lama pada tabel awal adalah

    $[(2M - 40) \quad (4M - 80) \quad -M \quad -M \quad 0 \quad 0 \quad 10M]$.

    Diketahui bahwa $\beta_{02} = (4M - 80)$.

    Persamaan *z* baru adalah

$$=[(2M-40)\quad(4M-80)\quad -M\quad -M\quad 0\quad 0\quad 10M]-(4M-80)\times\left[\frac{1}{3}\quad 1\quad 0\quad -\frac{1}{3}\quad 0\quad \frac{1}{3}\quad 2\right]$$

$$=\begin{bmatrix}(2M-40)\\(4M-80)\\-M\\-M\\0\\0\\10M\end{bmatrix}^t-\begin{bmatrix}\frac{(4M-80)}{3}\\(4M-80)\\0\\-\frac{(4M-80)}{3}\\0\\\frac{(4M-80)}{3}\\(4M-80)2\end{bmatrix}^t$$

$$\text{Persamaan } z \text{ baru } =\left[\frac{2M-40}{3}\quad 0\quad -M\quad \frac{M-80}{3}\quad 0\quad -\frac{4M-80}{3}\quad 2M+160\right]$$

- Persamaan x_5 lama pada tabel awal adalah $[1\quad 1\quad -1\quad 0\quad 1\quad 0\quad 4]$. Diketahui bahwa $\beta_{12}=1$.

$$\text{Persamaan } x_5 \text{ baru } =[1\quad 1\quad -1\quad 0\quad 1\quad 0\quad 4]-(1)\times\left[\frac{1}{3}\quad 1\quad 0\quad -\frac{1}{3}\quad 0\quad \frac{1}{3}\quad 2\right]$$

$$=[1\quad 1\quad -1\quad 0\quad 1\quad 0\quad 4]-\left[\frac{1}{3}\quad 1\quad 0\quad -\frac{1}{3}\quad 0\quad \frac{1}{3}\quad 2\right]$$

$$\text{Persamaan } x_5 \text{ baru } =\left[\frac{2}{3}\quad 0\quad -1\quad \frac{1}{3}\quad 1\quad -\frac{1}{3}\quad 2\right]$$

Berdasarkan semua perhitungan di atas, maka diperoleh tabel simpleks baru pada iterasi 1 dengan EV adalah x_2 dan LV adalah x_6.

BV	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solusi (RK)	R_i
z_j-c_j	1	$\frac{2M-40}{3}$	0	$-M$	$\frac{M-80}{3}$	0	$\frac{80-4M}{3}$	2M+160	
x_5	0	$\frac{2}{3}$	0	-1	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	2	
x_2	0	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	2	

Karena masih ada nilai dari z_j-c_j untuk $j=1,2,\cdots,6$ yang $z_j-c_j>0$, maka fungsi tujuan belum mencapai optimal, sehingga perlu dilakukan perhitungan simpleks ulang untuk iterasi ke-*2*.

❖ Iterasi ke-*2*

- Menentukan kolom kunci/kolom masuk (EC), berdasarkan tabel pada iterasi ke-*1* diketahui bahwa terdapat nilai maksimum yaitu $z_1 - c_1 = \frac{2M - 40}{3}$ pada kolom ke-*1*. Oleh karena itu, kolom ke-*1* merupakan kolom kunci/kolom masuk (EC), sehingga diperoleh *k=1*.
- Selanjutnya akan pada EC dilakukan pemeriksaan terhadap nilai β_{i1}, karena $\beta_{11} = \frac{2}{3}, \beta_{21} = \frac{1}{3},$, karena semua β_{i1} bernilai positif, maka akan dihitung nilai dari R_i, dan diperoleh $R_1 = \frac{x_{B1}}{\beta_{11}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3,\ R_2 = \frac{x_{B2}}{\beta_{21}} = \frac{2}{\frac{1}{3}} = 6$.
- Menentukan baris kunci, berdasarkan perhitungan R_i diperoleh bahwa $\min R_i = (3, 6) = 3$ dan diperoleh b_1, oleh karena itu, baris ke-*1* dinamakan **baris kunci/persamaan pivot** (pivot equation/PE).
- Sebelum menentukan elemen-elemen baris ke-*1* yang baru perlu diketahui bahwa elemen titik potong antara EC dan PE dinamakan **elemen pivot** yaitu $\left(\beta_{11} = \frac{2}{3}\right)$**.**
- Untuk elemen baris ke-*1* (b_1) biasanya dinamakan persamaan pivot baru (*new*PE) ditentukan dengan perumusan:

  Persamaan pivot dari tabel simpleks iterasi ke-*1* adalah $b_1 = x_5 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -1 & \frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 2 \end{bmatrix}$, maka

  $$\text{newPE} = \bar{b}_1 = x_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -1 & \frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 2 \end{bmatrix} \div \frac{2}{3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix}$$
- Menentukan elemen-elemen pada baris ke-*i* yang lainnya, diperoleh:
  - Persamaan *z* lama pada iterasi ke-*1* adalah

    $$\begin{bmatrix} \frac{2M-40}{3} & 0 & -M & \frac{M-80}{3} & 0 & -\frac{4M-80}{3} & 2M+160 \end{bmatrix}$$

    Diketahui bahwa $\beta_{01} = \frac{2M-40}{3}$.

    Persamaan *z* baru $= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -20 & -20 & (20-M) & \frac{100-5M}{3} & 200 \end{bmatrix}$

- Persamaan x_2 lama pada iterasi ke-*1* adalah $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 2 \end{bmatrix}$.

  Diketahui bahwa $\beta_{21} = \frac{1}{3}$.

  Persamaan x_2 baru $= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

Berdasarkan semua perhitungan di atas, maka diperoleh tabel simpleks baru pada iterasi 2 dengan EV adalah x_1 dan LV adalah x_5.

BV	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solusi (RK)	R_i
$z_j - c_j$	1	0	0	-20	-20	$20-M$	$\frac{100-5M}{3}$	200	
x_1	0	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3	
x_2	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	

Karena semua nilai dari $z_j - c_j$ untuk $j = 1, 2, \cdots, 6$ sudah memenuhi $z_j - c_j \leq 0$, maka fungsi tujuan telah mencapai optimal, dan nilai minimum fungsi tujuannya adalah 200 dengan nilai-nilai $x_1 = 3, x_2 = 1\ x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0$.

6. Artificial Variable

Pada permasalahan program linear beberapa kasus dimana pembatas linearnya tidak selalu merupakan batasan bertanda “≤”, tetapi mungkin pembatas linearnya merupakan batasan bertanda ”=” atau ”≥”. Untuk kasus dimana pembatas linearnya bertanda ”=”, daerah fisibelnya hanya berupa segmen garis sehingga kita tidak dapat memperoleh solusi fisibel basis awal karena tidak ada *slack variable* yang dapat digunakan sebagai peubah basis (BV) awalnya. Demikian juga untuk kasus dengan pembatas linearnya bertanda ”≥”, kita tidak akan memiliki solusi fisibel basis awal karena apabila kita merubah tanda persamaan pembatasnya menjadi ”≤”, maka ruas kanan pembatas linearnya kemungkinan dapat berharga negatif.

Untuk menyelesaikan kedua jenis kasus tersebut, kita akan memerlukan adanya peubah dummy (peubah palsu) yang dinamakan *artificial variable* dan dinotasikan dengan R, sehingga basis awal bisa tetap ada. *Artificial variable* ini mempunyai peran yang sama dengan peran *slack variable* hal ini dilakukan karena diperlukan matriks basis pada setiap iterasi perhitungan simpleks. Konsekuensi dari adanya *artificial variable* adalah diperlukannya suatu besaran/konstanta sebagai penalti yang dikenakan sebagai koefisien fungsi tujuan dari *artificial variable*.

Contoh 7:

Memaksimumkan: $z = 3x_1 + 5x_2$

dengan pembatas linear:
$$x_1 \geq 4$$
$$2x_2 \geq 12$$
$$3x_1 + 2x_2 = 18$$
dan pembatas tanda $x_1, x_2 \geq 0$

Jawab:

Berdasarkan contoh pemasalahan di atas, diperoleh bentuk standar untuk permasalahan tersebut adalah:

Memaksimumkan: $z = 3x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0R_1 + 0R_2 + 0R_3$

dengan pembatas linear:
$$x_1 + 0x_2 - x_3 + 0x_4 + R_1 + 0R_2 + 0R_3 = 4$$
$$0x_1 + 2x_2 + 0x_3 - x_4 + 0R_1 + R_2 + 0R_3 = 12$$
$$3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0R_1 + 0R_2 + R_3 = 18$$
dan pembatas tanda $x_1, x_2, x_3, x_4, R_1, R_2, R_3 \geq 0$

Pada akhirnya, dalam tiap iterasi perhitungan simpleks akan secara otomatis menjadikan *artificial variable* ini tidak muncul lagi (dengan arti lain *artificial variable* bernilai nol), yaitu apabila persoalan awal telah terselesaikan. Dengan kata lain, penggunaan *artificial variable* hanya untuk memulai solusi, dan untuk selanjutnya *artificial variable* harus dihilangkan (nilainya =0) pada akhir solusi. Apabila tidak demikian maka solusi yang diperoleh akan tidak fisibel. Oleh karena itu, harus diberikan *penalty* M (M bilangan positif yang sangat besar) pada setiap *artificial variable* dalam fungsi tujuannya. Perlu diingat bahwa penalty akan bertanda (-) apabila fungsi tujuannya merupakan fungsi maksimasi, sedangkan apabila fungsi tujuannya merupakan fungsi minimasi maka penaltynya bertanda (+). Oleh karena itu bentuk standar fungsi tujuan pada contoh 7 akan menjadi:

Memaksimumkan: $z = 3x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 - MR_1 - MR_2 - MR_3$

Ada dua teknik penyelesaian untuk kasus dengan *artificial variable* tersebut, yaitu (1) teknik penalty (M) dan (2) teknik dua fase. Kedua teknik ini saling berkaitan.