KERNEL WAVELET

Fitriani Agustina
Jurusan Pendidikan Matematika FPMIPA
UPI-Bandung

Fungsi Kernel

Ruang Hilbert

Wavelet

Kernel Wavelet

Sifat – Sifat Kernel Wavelet

Fungsi Kernel

Fungsi kernel $K : R \rightarrow R$ adalah fungsi yang simetrik terhadap titik pusat O dan mempunyai sifat :

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = 1$$

Fungsi-fungsi kernel K(.) mempunyai support hingga, yaitu [-1,1] dan memenuhi syarat-syarat berikut :

(1) $\int_{-1}^{1} K(u)\, du = 1$

(2) $$\int_{-1}^{1} u\,K(u)\,du = 0$$

(3) $$\int_{-1}^{1} u^2\,K(u)\,du = \alpha \neq 0$$

(4) $$\int_{-1}^{1} K^2(u)\,du < \infty$$

Dalam estimasi statistik nonparametrik menggunakan kernel K(.), biasa digunakan estimator–estimator kernel dengan pembobotan, yaitu

$$K_b(x) = (1/b)\,K(x/b)$$

Ruang Hilbert

$$L^2(R) = \left\{ f : R \to C : \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) \right|^2 dx < \infty \right\}$$

didefinisikan

Inner product $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} \, dx$

Norm $\| f \|_2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) \right|^2 dx \right]^{1/2}$

disebut Ruang Hilbert

Wavelet

$\Psi \in L^2(R)$ fungsi skala

didelasi & ditranslasi

$\left\{ \Psi_{j,k} : j, k \in Z \right\}$ Basis Ortonormal $L^2(R)$

$\forall\ f \in L^2(R)$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $\Psi_{j,k}$

$$f(x) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{j,k}\, \Psi_{j,k}(x)$$

Kernel Wavelet

$h \in L^2(R)$, Vj adalah subruang tertutup dari L2(R)

Proyeksi dari h pada Vj dapat dituliskan sebagai :

$$h \to E_j(h)(u) = \sum_{k \in Z} c_{j,k}\, \Phi_{j,k}(u)$$

dengan $c_{j,k} = \langle h, \Phi_{j,k} \rangle = \int_R h(v)\, \Phi_{j,k}(v)\, dv$

Diperkenalkan proyektor yang berhubungan dengan integral kernel, yaitu

$$h \to E_j(h)(u) = E_j(u, v) h(v)\, dv$$

diperoleh

$$E_j(u,v) = \sum_{k \in Z} \Phi_{j,k}(u) \cdot \Phi_{j,k}(v)$$

Sifat – Sifat Kernel Wavelet

Sifat 1

$$E_j(u,v) = 2^j E_0(2^j u, 2^j v)$$

Sifat 2

$$E_0(u+k, v+k) = E_0(u,v) \text{ untuk } k \in Z$$

Sifat 3

$$\left| E_0(u, v) \right| \leq K(u - v)$$

Sifat 4

$$\sup_{u,v} = \left| E_j(u\ ,\ v) \right| \leq O(2^j)$$

Sifat 5

Jika fungsi h terletak pada ruang Sobolev $H^v = H^v(R)$ maka :

(a) Barisan $E_j(h) = E_j(.\ ,\ y)h(y)\ dy$ konvergen kuat ke h pada H^v untuk $|v| \leq q$

(b) $\left\| h - E_j(h) \right\|_\upsilon = O(2^{-j\upsilon})$ untuk $0 < v < q$ dengan $\|\cdot\|_\upsilon$ adalah norma yang berasosiasi dengan H^v

Sifat 6

Kernel wavelet adalah transisi invarians diadik, artinya $E_j(t+u, .) = Ej(t,.. - u)$ untuk setiap diadik u berbentuk k/2j

Sifat 7

$E_0(0,-t)$ adalah suatu kernel $K(t)$ yang mempunyai bandwidth 2^{-j}

Sifat 8

Untuk setiap $x \in [0,1]$ berlaku

(a) $\sup_{j \geq 1} \int_0^1 |E_j(x,y)| dy < \infty$

(b) $\int_0^1 E_j(x, y)\, dy \to 1$

(c) $\int_0^1 |E_j(x, y)|\, I\{|x-y| > e\}\, dy \to 0$

untuk setiap $e > 0$

(d) $\mathrm{Sup}_{y \in [0,1]} |E_j(x, y)| = O(2^j)$

Sifat 9

Jika $h : R \to R$ kontinu pada t maka

$$\lim_{j\to\infty} 2^{-j} \int_R E_J^2(t^{(j)}, s)\, h(s)\, ds = w_0^2 \quad \text{dengan}$$

$$w_0^2 = \int_R E_0^2(0, s)\, ds = \sum_{k \in Z} \Phi^2(k)$$