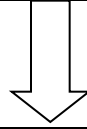


KERNEL WAVELET

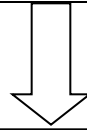
Fitriani Agustina

Jurusan Pendidikan Matematika FPMIPA
UPI-Bandung

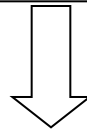
Fungsi Kernel



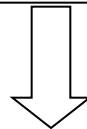
Ruang Hilbert



Wavelet



Kernel Wavelet



Sifat – Sifat Kernel Wavelet

Fungsi Kernel

Fungsi kernel $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ adalah fungsi yang simetrik terhadap titik pusat 0 dan mempunyai sifat :

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x) dx = 1$$

Fungsi-fungsi kernel $K(\cdot)$ mempunyai support hingga, yaitu $[-1, 1]$ dan memenuhi syarat-syarat berikut :

$$(1) \int_{-1}^1 K(u) du = 1$$

$$(2) \int_{-1}^1 u K(u) du = 0$$

$$(3) \int_{-1}^1 u^2 K(u) du = a \neq 0$$

$$(4) \int_{-1}^1 K^2(u) du < \infty$$

Dalam estimasi statistik nonparametrik menggunakan kernel $K(\cdot)$, biasa digunakan estimator–estimator kernel dengan pembobotan, yaitu

$$K_b(x) = (1/b) K(x/b)$$

Ruang Hilbert

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

didefinisikan

Inner product $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx$

Norm $\|f\|_2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right]^{1/2}$

disebut

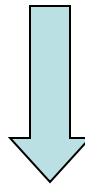
Ruang Hilbert

Wavelet

$\Psi \in L^2(\mathbb{R})$  fungsi skala

didelasi & ditranslasi

$\{\Psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ Basis Ortonormal $L^2(\mathbb{R})$



$\forall f \in L^2(\mathbb{R})$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $\Psi_{j,k}$

$$f(x) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} \Psi_{j,k}(x)$$

Kernel Wavelet

$h \in L^2(\mathbb{R})$, V_j adalah subruang tertutup dari $L^2(\mathbb{R})$
Proyeksi dari h pada V_j dapat dituliskan sebagai :

$$h \rightarrow E_j(h)(u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \Phi_{j,k}(u)$$

$$\text{dengan } c_{j,k} = \langle h, \Phi_{j,k} \rangle = \int_{\mathbb{R}} h(v) \Phi_{j,k}(v) dv$$

Diperkenalkan proyektor yang berhubungan dengan integral kernel, yaitu

$$h \rightarrow E_j(h)(u) = \int E_j(u, v) h(v) dv$$

diperoleh

$$E_j(u, v) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Phi_{j,k}(u) \cdot \Phi_{j,k}(v)$$

Sifat – Sifat Kernel Wavelet

Sifat 1

$$E_j(u, v) = 2^j E_0(2^j u, 2^j v)$$

Sifat 2

$$E_0(u+k, v+k) = E_0(u, v) \text{ untuk } k \in \mathbb{Z}$$

Sifat 3

$$|E_0(u, v)| \leq K(u - v)$$

Sifat 4

$$\sup_{u,v} |E_j(u, v)| \leq O(2^j)$$

Sifat 5

Jika fungsi h terletak pada ruang Sobolev

$H^v = H^v(\mathbb{R})$ maka :

(a) Barisan $E_j(h) = \int E_j(\cdot, y)h(y) dy$ konvergen kuat ke h pada H^v untuk $|v| \leq q$

(b) $\|h - E_j(h)\|_v = O(2^{-jv})$ untuk $0 < v < q$ dengan $\|\cdot\|_v$

adalah norma yang berasosiasi dengan H^v

Sifat 6

Kernel wavelet adalah transisi invarians diadik, artinya $E_j(t+u, \cdot) = E_j(t, \cdot - u)$ untuk setiap diadik u berbentuk $k/2^j$

Sifat 7

$E_0(0, -t)$ adalah suatu kernel $K(t)$ yang mempunyai bandwidth 2^{-j}

Sifat 8

Untuk setiap $x \in [0, 1]$ berlaku

$$(a) \sup_{j \geq 1} \int_0^1 |E_j(x, y)| dy < \infty$$

$$(b) \int_0^1 E_j(x, y) dy \rightarrow 1$$

$$(c) \int_0^1 |E_j(x, y)| I\{|x-y| > e\} dy \rightarrow 0$$

untuk setiap $e > 0$

$$(d) \sup_{y \in [0,1]} |E_j(x, y)| = O(2^{-j})$$

Sifat 9

Jika $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu pada t maka

$$\lim_{j \rightarrow \infty} 2^{-j} \int_{\mathbb{R}} E_j^2(t^{(j)}, s) h(s) ds = w_0^2 \quad \text{dengan}$$

$$w_0^2 = \int_{\mathbb{R}} E_0^2(0, s) ds = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Phi^2(k)$$