AKSIOMA: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika
Vol. 11, No. 1 Juli 2020
e-ISSN 2579-7646

Dampak Perkuliahan Geometri Pada Penalaran Deduktif Mahasiswa: Kasus Pembelajaran Teorema Ceva

[1]Al Jupri, [2]Siti Fatimah, [3]Dian Usdiyana

[1,2,3] Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Pendidikan Indonesia
email: aljupri@upi.edu

Abstrak

Geometri merupakan salah satu cabang matematika yang dapat mengembangkan kemampuan berpikir deduktif bagi siapapun, termasuk mahasiswa calon guru matematika, yang mempelajarinya. Kemampuan ini diperlukan oleh calon guru matematika untuk tugas mereka sebagai pendidik matematika di kemudian hari. Oleh karena itu, tujuan dari penelitian ini adalah untuk menginvestigasi dampak proses perkuliahan geometri pada kemampuan penalaran deduktif mahasiswa calon guru matematika. Untuk mencapai tujuan ini, penelitian kualitatif ini dilakukan dalam bentuk observasi proses pembelajaran dan observasi hasil evaluasi pada perkuliahan geometri yang melibatkan 56 mahasiswa calon guru matematika pada salah satu program studi pendidikan matematika, di salah satu universitas negeri di kota Bandung. Topik perkuliahan geometri yang diobservasi adalah teorema Ceva, sedangkan evaluasi yang dilakukan adalah dalam bentuk tes tertulis individu tentang penerapan teorema Ceva dalam pembuktian. Hasil penelitian menunjukkan bahwa proses perkuliahan geometri yang diamati menekankan kepada proses pembuktian teorema dan penerapannya dalam pembuktian pernyataan matematis. Selain itu, hasil tes menunjukkan bahwa dari sepuluh mahasiswa yang mampu menerapkan teorema Ceva dalam proses pembuktian dengan benar, ditemukan beberapa cara pembuktian berbeda yang meliputi penggunaan konsep kesebangunan dan konsep trigonometri. Hal ini menunjukkan kreativitas berpikir deduktif mahasiswa dalam upaya melakukan pembuktian matematis. Dapat disimpulkan bahwa proses perkuliahan geometri yang menekankan kepada pembuktian teorema dan pernyataan matematis berdampak kepada keluwesan berpikir deduktif mahasiswa dalam proses pembuktian.

Kata kunci: *berpikir deduktif; pembuktian dalam geometri; pendidikan geometri; teorema Ceva; teori Van Hiele*

Abstract

Geometry is one of branches of mathematics that can develop deductive thinking ability for anyone, including students of prospective mathematics teachers, who learning it. This deductive thinking ability is needed by prospective mathematics teachers for their future careers as mathematics educators. This research therefore aims to investigate the influence of the learning process of a geometry course toward deductive reasoning ability of students of prospective mathematics teachers. To do so, this qualitative research was carried out through an observation of the learning process and assessment of the geometry course, involving 56 students of prospective mathematics teachers, in one of mathematics education program, in one of state universities in Bandung. A geometry topic observed in the learning process was the Ceva's theorem, and the assessment was in the form of an individual written test on the application of the Ceva's theorem in a proving process. The results showed that the learning process emphasizes on proving of theorems and mathematical statements. In *addition, the test revealed that ten students are able to use the Ceva's theorem in a proving process and different strategies of proving are found, including the use of properties of similarity between triangles and of the concept of trigonometry. This indicates a creativity of student deductive thinking in proving process. In conclusion, the geometry course that emphasizes on proving of theorems and mathematical statements has influenced on filexibility of student deductive thinking in proving processes.*

Keywords: *Ceva's theorem; deductive thinking; geometry education; proof in geometry, Van Hiele theory*

A. Pendahuluan

Geometri merupakan salah satu topik matematika yang berperan penting dalam pengembangan kemampuan penalaran siswa di tingkat sekolah (Kemdikbud, 2013). Agar hal tersebut bisa dicapai, maka diperlukan guru-guru matematika yang memiliki bekal dan kemampuan yang memadai. Bekal dan kemampuan ini, dalam proses pendidikan guru matematika, dikembangkan dalam perkuliahan-perkuliahan yang memuat konten geometri, seperti mata kuliah Geometri Analitik, Geometri Transformasi, dan Geometri (Jupri & Herman, 2017).

Secara khusus, mata kuliah Geometri membekali mahasiswa calon guru matematika tidak hanya berupa pengetahuan faktual dan konseptual tentang geometri, melainkan juga kecakapan berpikir secara logis, kritis, dan kreatif yang diperlukan dalam berbagai aspek kehidupan (Hershkowitz, 1998; Howse & Howse, 2015; Jupri & Syaodih, 2016). Kecakapan-kecakapan ini, salah satunya, dapat dilatih melalui materi pembuktian teorema-teorema dalam geometri (Jupri, 2017a, 2017b). Pertanyaannya adalah bagaimanakah proses pembelajaran dalam perkuliahan geometri untuk mahasiswa calon guru matematika yang dapat menumbuhkembangkan kemampuan berpikir deduktif, yang meliputi kecakapan berpikir logis, kritis, dan kreatif tersebut? Apa dampak dari proses pembelajaran geometri tersebut terhadap kemampuan penalaran deduktif mahasiswa?

Untuk menjawab dua pertanyaan di atas, artikel ini menyajikan hasil penelitian melalui observasi proses pembelajaran dan observasi hasil evaluasi perkuliahan geometri untuk mahasiswa program studi pendidikan matematika. Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan untuk menginvestigasi dampak proses perkuliahan geometri pada kemampuan penalaran deduktif mahasiswa calon guru matematika, terutama dalam melakukan pembuktian dalam geometri. Sebagai kasus, topik geometri yang dikaji dalam observasi tersebut adalah pembelajaran teorema Ceva. Teorema Ceva, sebagai salah satu teorema penting dalam geometri, berbunyi bahwa: *Tiga garis yang ditarik dari titik-titik sudut A, B, dan C pada* $\triangle ABC$ *dan masing-masing memotong sisi di hadapan titik sudut segitiga pada titik L, M, dan N adalah konkuren (berpotongan di satu titik)* *jika dan hanya jika memenuhi* $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$. (Jupri, 2019; Posamentier, 2002).

Kerangka teori yang digunakan dalam penelitian ini adalah karakteristik penalaran deduktif dalam matematika dan teori Van Hiele tentang berpikir geometri, khususnya tingkat berpikir deduksi formal (Burger & Shaugnessy, 1986; Jupri & Syaodih, 2016).

1. Penalaran dalam Pembelajaran Matematika

Penalaran adalah proses berpikir dalam upaya menghubung-hubungkan antara dua hal atau lebih yang diketahui dengan menggunakan aturan-aturan tertentu untuk memperoleh suatu kesimpulan (Kusumah, 1986; Soedjadi, 2000). Secara umum, baik dalam matematika ataupun bidang-bidang lain, penalaran dapat dikelompokkan menjadi dua macam: penalaran induktif dan penalaran deduktif (Heit & Rotello, 2010; Ruseffendi, 1991; Soedjadi, 2000).

Penalaran induktif adalah proses berpikir dalam membuat kesimpulan yang bersifat umum berdasarkan informasi atau data-data yang bersifat khusus (Heit & Rotello, 2010; Ruseffendi, 1991; Soedjadi, 2000). Ciri-ciri dari bernalar secara induktif, di antaranya, adalah: menarik kesimpulan berdasarkan keserupaan data atau proses; penarikan kesimpulan berdasarkan beberapa kasus atau contoh yang teramati; dan melihat pola hubungan berdasarkan fakta-fakta yang ada.

Penalaran deduktif adalah adalah proses berpikir dalam membuat kesimpulan yang bersifat umum berdasarkan aturan-aturan tertentu yang disepakati (Heit & Rotello, 2010; Kusumah, 1986; Ruseffendi, 1991; Soedjadi, 2000). Ciri-ciri dari bernalar secara deduktif, di antaranya, adalah: melakukan perhitungan berdasarkan aturan atau rumus tertentu; menarik kesimpulan berdasarkan aturan logika; dan menyusun pembuktian matematis baik pembuktian langsung ataupun tidak langsung. Dalam penelitian ini, kecakapan penalaran deduktif akan menjadi hal utama yang ditelaah berdasarkan proses pembelajaran geometri. Hal ini terkait dengan teori Van Hiele, khususnya tingkat berpikir deduktif formal.

2. Teori Van Hiele

Menurut Van Hiele, kemampuan berpikir dalam geometri dapat dikelompokkan ke dalam lima tingkatan (Burger & Shaugnessy, 1986; Jupri & Syaodih, 2016). Kelima tingkatan tersebut berjenjang dari yang sederhana hingga paling kompleks. Pada level 0 (visualisasi), berpikir geometri memiliki ciri bahwa konsep atau obyek geometri baru sebatas dikenal bentuk dan namanya tanpa memperhatikan sifat-sifatnya. Pada level 1 (analisis), berpikir geometri bercirikan kepada kemampuan mengidentifikasi sifat-sifat dari obyek atau konsep geometri secara terpisah-pisah. Pada level 2 (abstraksi), berpikir geometri bercirikan pada kemampuan menemukan hubungan antar sifat-sifat dari konsep atau obyek geometri secara terintegrasi. Pada level 3 (deduksi), berpikir geometri bercirikan pada kemampuan dalam membuktikan sifat-sifat obyek atau konsep geometri yang sudah dikenal. Akhirnya, pada level 4 (rigor), berpikir geometri bercirikan kepada kemampuan untuk membandingkan berbagai sistem geometri tanpa menggunakan model-model yang bersifat konkret. Pada penelitian ini yang digunakan dalam proses analisis adalah karakteristik berpikir geometri level 3 (deduksi) sebab menyangkut kemampuan berpikir deduktif dalam melakukan pembuktian.

B. Metode Penelitian

Penelitian kualitatif ini dilakukan melalui observasi terhadap proses pembelajaran pada mata kuliah Geometri, yang melibatkan 56 mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika yang merupakan mahasiswa calon guru matematika, di salah satu universitas negeri di kota Bandung. Observasi yang dilakukan meliputi dua tahap. Tahap pertama, observasi pembelajaran dilakukan pada perkuliahan materi teorema Ceva yang berlangsung selama 150 menit. Materi yang dibahas pada perkuliahan ini meliputi teorema Ceva, pembuktian teorema Ceva, contoh penerapan teorema Ceva, dan latihan soal. Dari observasi tahap pertama ini peneliti mencatat alur proses pembelajaran, mengumpulkan dokumen materi pembelajaran, menyalin catatan perkuliahan mahasiswa, dan melakukan dokumentasi.

Tahap kedua, observasi dilakukan terhadap proses evaluasi pembelajaran dalam bentuk tes individu kepada mahasiswa peserta perkuliahan. Pada tes individu ini, mahasiswa diminta untuk menyelesaikan satu soal pembuktian sifat geometri yang melibatkan penggunaan teorema Ceva. Soal tes yang digunakan disajikan pada Gambar 1. Tes ini dilakukan selama 30 menit setelah mahasiswa dipandang telah memahami teorema Ceva dan penerapannya. Selama proses tes individu ini, mahasiswa diminta menuliskan seluruh proses pembuktian yang dilakukan, termasuk coretan-coretannya. Seluruh lembar jawaban mahasiswa dari hasil tes ini dikumpulkan untuk proses analisis data.

Buktikan bahwa ketiga garis tinggi dari suatu segitiga berpotongan di satu titik (konkuren).

Gambar 1. Soal tes penerapan teorema Ceva

Dari dua tahap observasi tersebut, seluruh data yang terkumpul dianalisis dengan menggunakan kerangka teori Van Hiele dan karakteristik penalaran deduktif. Hasil analisis meliputi alur proses pembelajaran pada perkuliahan materi teorema Ceva, dan hasil tes terkait penerapan teorema Ceva. Hasil tes ini meliputi temuan strategi pembuktian yang digunakan mahasiswa dalam menerapkan teorema Ceva; dan temuan terhadap kesulitan mahasiswa dalam menerapkan teorema Ceva pada saat yang tepat. Hasil-hasil analisis ini kemudian diringkas, diinterpretasikan, dan disajikan dalam artikel ini.

C. Hasil dan Pembahasan

Berdasarkan hasil analisis data observasi dan tes, maka bagian ini menguraikan dua hal. Uraian pertama berisi hasil analisis proses pembelajaran teorema Ceva; dan uraian kedua berisi hasil analisis tes tertulis tentang penerapan teorema Ceva pada proses pembuktian.

1. Proses Pembelajaran Teorema Ceva

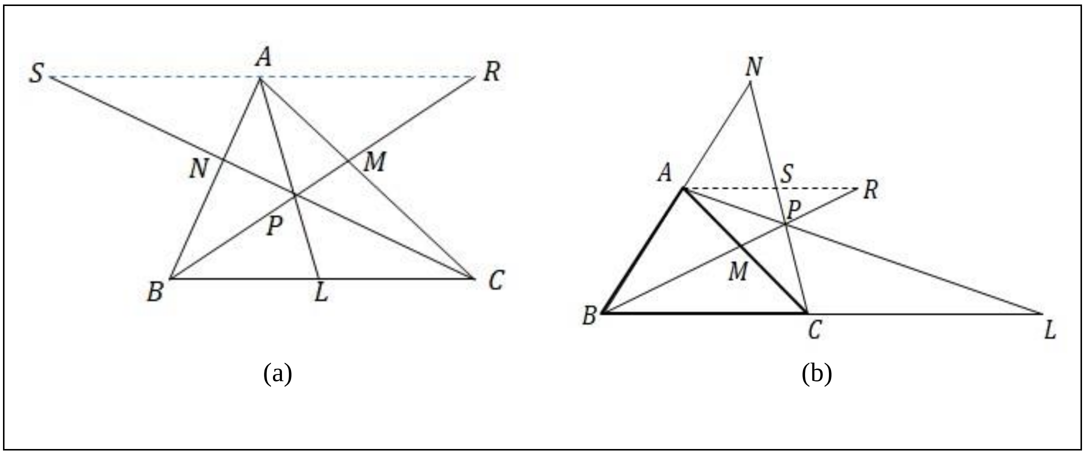
Secara umum proses pembelajaran topik teorema Ceva pada perkuliahan geometri yang diamati dapat dibagi ke dalam tiga tahapan: penjelasan dan pembuktian teorema; contoh penerapan teorema pada pembuktian; serta latihan soal. Proses berurutan ketiga tahapan ini adalah sebagai berikut. Pertama, dosen menjelaskan bahwa teorema Ceva—yang berbunyi:

> *Tiga garis yang ditarik dari titik-titik sudut A, B, dan C pada* $\triangle ABC$ *dan masing-masing memotong sisi di hadapan titik sudut segitiga pada titik L, M, dan N adalah konkuren (berpotongan di satu titik) jika dan hanya jika memenuhi* $\frac{AN}{NB}.\frac{BL}{LC}.\frac{CM}{MA}=1.$ (Jupri, 2019; Posamentier, 2002).

merupakan suatu pernyataan matematis yang bersifat biimplikatif yang perlu dibuktikan. Artinya adalah bahwa ada dua pernyataan implikasi yang perlu dibuktikan. Pernyataan pertama yang perlu dibuktikan adalah: *Pada* $\triangle ABC$*, jika tiga segmen garis* $\overline{AL},\overline{BM}$*, dan* $\overline{CN}$ *berpotongan di satu titik (konkuren), maka berlaku hubungan* $\frac{AN}{NB}.\frac{BL}{LC}.\frac{CM}{MA}=1.$ Pernyataan kedua yang perlu dibuktikan adalah: *Jika tiga garis yang ditarik dari titik-titik sudut* A, B*, dan* C *pada* $\triangle ABC$ *dan masing-masing memotong sisi di hadapan titik sudut pada titik* L, M*, dan* N *demikian sehingga berlaku* $\frac{AN}{NB}.\frac{BL}{LC}.\frac{CM}{MA}=1$*, maka* $\overline{AL},\overline{BM}$*, dan* $\overline{CN}$ *konkuren.*

Untuk membuktikan pernyataan pertama, ada dua kasus yang bisa ditinjau. Kasus ketika titik potong ketiga segmen garis $\overline{AL},\overline{BM}$, dan $\overline{CN}$ berada di dalam daerah segitiga, dan kasus ketika titik potong ketiga segmen garis (disebut pula tiga garis Cevian) berada di luar daerah segitiga. Meski ada dua kasus, proses pembuktian keduanya serupa, seperti uraian berikut.

Titik P adalah titik potong ketiga garis Cevian $\overline{AL},\overline{BM}$ dan $\overline{CN}$. Lalu, dikonstruksi sebuah garis yang sejajar $\overline{BC}$ melalui titik A, berpotongan dengan $\overline{BP}$ di R, dan berpotongan dengan $\overline{CP}$ di S. Gambar 2(a) menggambarkan kasus titik potong tiga garis Cevian di dalam daerah segitiga, dan Gambar 2(b) untuk kasus titik potong di luar daerah segitiga.



Gambar 2. Dua kasus titik potong tiga garis Cevian pada segitiga ABC: (a) Titik potong di dalam; (b) Titik potong di luar

Dengan menunjukkan bahwa $\triangle AMR \sim \triangle CMB$, maka diperoleh $\frac{CM}{AM} = \frac{CB}{AR}$. Dengan menunjukkan bahwa $\triangle BNC \sim \triangle ANS$, maka diperoleh $\frac{AN}{BN} = \frac{SA}{CB}$. Dengan menunjukkan $\triangle CLP \sim \triangle SAP$, maka diperoleh $\frac{CL}{SA} = \frac{LP}{AP}$. Dengan menunjukkan $\triangle BLP \sim \triangle RAP$, maka diperoleh $\frac{BL}{RA} = \frac{LP}{AP}$. Dari dua hasil terakhir, dapat disimpulkan bahwa $\frac{CL}{SA} = \frac{BL}{RA}$ atau $\frac{BL}{CL} = \frac{RA}{SA}$. Akhirnya, dengan mengalikan dua hasil pertama dan hasil paling akhir tersebut, maka diperoleh $\frac{CM}{AM} . \frac{AN}{BN} . \frac{BL}{CL} = \frac{CB}{AR} . \frac{SA}{CB} . \frac{RA}{SA} = 1$ atau $\frac{AN}{NB} . \frac{BL}{LC} . \frac{CM}{MA} = 1$.

Pembuktian pernyatan kedua, atau konvers dari teorema Ceva, adalah seperti berikut. Andaikan $\overline{AL}$ dan $\overline{BM}$ berpotongan di titik P. Lalu, dikonstruksi garis $\overleftrightarrow{PC}$ sehingga berpotongan dengan $\overline{AB}$ di N'. Karena $\overline{AL}, \overline{BM}$ dan $\overline{CN'}$ berpotongan di P, maka menurut teorema Ceva berlaku $\frac{AN'}{N'B} . \frac{BL}{LC} . \frac{CM}{MA} = 1$. Tetapi kita memiliki hubungan $\frac{AN}{NB} . \frac{BL}{LC} . \frac{CM}{MA} = 1$. Akibatnya diperoleh $\frac{AN'}{N'B} . \frac{BL}{LC} . \frac{CM}{MA} = \frac{AN}{NB} . \frac{BL}{LC} . \frac{CM}{MA}$ atau $\frac{AN'}{N'B} = \frac{AN}{NB}$. Dengan demikian N dan N' berimpit. Jadi, dapat disimpulkan bahwa $\overline{AL}, \overline{BM}$, dan $\overline{CN}$ konkuren.

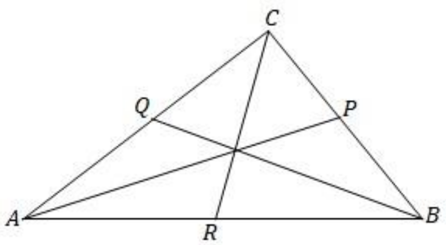
Saat proses pembuktian teorema tersebut, dosen sesekali bertanya kepada mahasiswa untuk mengecek apakah mahasiswa dapat mengikuti proses pembuktian atau tidak. Akhirnya, setelah memberi kesempatan kepada mahasiswa bertanya dan mencatat proses pembuktian di atas, dosen menyediakan dan menuliskan dua soal pembuktian sebagai latihan soal seperti pada Gambar 3.

(1) Buktikan bahwa garis-garis berat dari suatu segitiga adalah konkuren (berpotongan di satu titik)!
(2) Buktikan bahwa garis-garis yang masing-masing melalui titik sudut segitiga dan titik singgung lingkaran dalam di hadapan titik sudut tersebut adalah konkuren!

Gambar 3. Soal-soal latihan saat pembelajaran

Soal (1) dijadikan sebagai contoh soal oleh dosen, dan soal (2) sebagai latihan bagi mahasiswa. Penyelesaian soal (1) dapat dilihat pada Gambar 4. Saat menjelaskan penyelesaian soal (1) tersebut, dosen selalu menanyakan kepada mahasiswa pada tiap langkah proses pembuktian. Bila mahasiswa tidak bisa langsung menjawab, dosen membimbing agar mahasiswa bisa menjawab pertanyaannya.

Misalkan diketahui $\triangle ABC$, dengan $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$, dan $\overline{CR}$ adalah garis-garis berat.



Karena $\overline{AP}$ garis berat, maka $BP = PC \Leftrightarrow \frac{BP}{PC} = 1$.

Karena $\overline{BQ}$ garis berat, maka $AQ = QC \Leftrightarrow \frac{CQ}{QA} = 1$.

Karena $\overline{CR}$ garis berat, maka $AR = RB \Leftrightarrow \frac{AR}{RB} = 1$.

Oleh karena itu, diperoleh $\frac{AR}{RB} . \frac{BP}{PC} . \frac{CQ}{QA} = 1.1.1 = 1$.

Menurut konvers teorema Ceva $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$, dan $\overline{CR}$ konkuren.

Gambar 4. Penyelesaian soal latihan (1)

Untuk soal (2), dosen memberi kesempatan kepada mahasiswa untuk mengerjakan terlebih dahulu. Selama proses mengerjakan soal tersebut, beberapa mahasiswa bertanya materi prasyarat untuk menjawab soal tersebut, seperti sifat lingkaran dalam suatu segitiga dan sifat panjang garis singgung segitiga terhadap lingkaran. Namun, mengingat waktu perkuliahan yang sudah habis, soal tersebut tidak dibahas di kelas, tetapi dijadikan latihan mandiri di rumah.

Dari uraian proses pembelajaran di atas, dapat dikatakan bahwa proses pembelajaran menekankan kepada aspek pembuktian teorema atau pernyataan-pernyataan matematis. Proses dosen dalam menjelaskan makna teorema dan pembuktiannya sejalan dengan apa yang disampaikan oleh Mulyati (2000) dan Hudojo (2005), di mana mahasiswa dibimbing untuk memahami bagian-bagian teorema secara terperinci. Ditinjau dari aspek penalaran, maka proses ini mengembangkan penalaran yang bersifat deduktif, sebab dalam proses pembuktian digunakan pernyataan-pernyataan benar yang dapat dihubung-hubungkan untuk sampai kepada kesimpulan (Heit & Rotello, 2010; Kusumah, 1986; Soedjadi, 2000). Menurut tinjauan teori Van Hiele, dengan melihat konten dan proses sepanjang pembelajaran berlangsung, tampak bahwa mahasiswa dilatih untuk berpikir pada level berpikir deduksi (Burger & Shaugnessy, 1986; Jupri & Syaodih, 2016), di mana proses melakukan dan menemukan pembuktian merupakan aktivitas utama sepanjang proses pembelajaran.

2. Analisis Hasil Tes Penerapan Teorema Ceva

Tabel 1 menyajikan hasil analisis terhadap hasil tes uraian tertulis mengenai penerapan teorema Ceva dalam proses pembuktian. Soal tes yang digunakan, seperti disajikan pada Gambar 1, adalah mengenai pembuktian bahwa garis-garis tinggi dari suatu segitiga adalah konkuren.

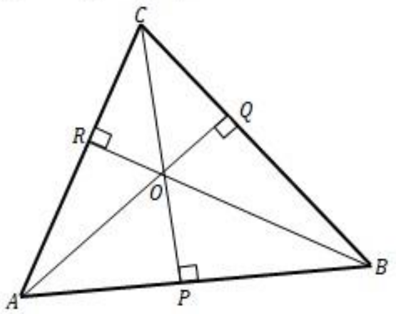
Tabel 1. Hasil tes penggunaan teorema Ceva pada pembuktian (N = 56)

#Benar	#Salah	Strategi Pembuktian			
		Penggunaan Kesebangunan		Penggunaan Trigonometri	
		#Benar	#Salah	#Benar	#Salah
10	46	6	43	4	3

Dari Tabel 1 tampak bahwa dari 56 mahasiswa yang mengikuti tes, hanya 10 mahasiswa (17,8%) yang dapat melakukan pembuktian dengan benar, khususnya dalam menerapkan teorema Ceva pada proses pembuktian perpotongan garis-garis tinggi suatu segitiga. Hasil ini menunjukkan bahwa meskipun proses pembelajaran pada perkuliahan geometri menekankan pada aktivitas pembuktian, secara umum tidak memberi dampak yang kuat pada kemampuan mahasiswa calon guru matematika dalam melakukan pembuktian. Hal ini berarti bahwa hanya sebagian kecil mahasiswa (17,8%) yang mencapai kemampuan penalaran deduktif yang diharapkan.

Ditinjau dari strategi pembuktian yang digunakan, kami menemukan dua strategi pembuktian berbeda yang digunakan mahasiswa calon guru matematika: pertama, pembuktian dengan menggunakan bantuan konsep kesebangunan; dan kedua, pembuktian dengan menggunakan bantuan konsep trigonometri. Pembuktian dengan bantuan konsep kesebangunan yang dilakukan mahasiswa, setelah ditulis ulang, dapat dilihat pada Gambar 5; sedangkan pembuktian dengan bantuan konsep trigonometri dapat dilihat pada Gambar 6.

Misalkan diketahui $\triangle ABC$, dengan $\overline{AQ}, \overline{BR}$, dan $\overline{CP}$ adalah garis-garis tinggi segitiga tersebut.



Dengan menunjukkan $\triangle APO \sim \triangle CQO$, maka diperoleh $\frac{AP}{CQ} = \frac{AO}{CO}$.

Dengan menunjukkan $\triangle BPO \sim \triangle CRO$, maka diperoleh $\frac{RC}{PB} = \frac{CO}{BO}$.

Dengan menunjukkan $\triangle ARO \sim \triangle BQO$, maka diperoleh $\frac{BQ}{AR} = \frac{BO}{AO}$.

Dengan mengalikan hasil-hasil di atas, diperoleh

$\frac{AP}{CQ}.\frac{RC}{PB}.\frac{BQ}{AR} = \frac{AO}{CO}.\frac{CO}{BO}.\frac{BO}{AO} = 1$ atau $\frac{AP}{PB}.\frac{BQ}{QC}.\frac{CR}{RA} = 1$.

Menurut konvers teorema Ceva, $\overline{AQ}, \overline{BR}$, dan $\overline{CP}$ konkuren.

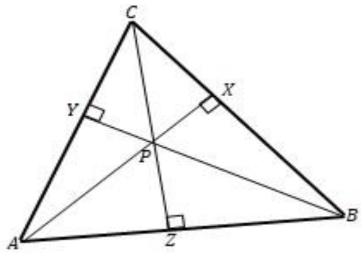
Gambar 5. Pembuktian konkurensi garis-garis tinggi segitiga dengan konsep kesebangunan

Dari 49 mahasiswa yang menggunakan bantuan konsep kesebangunan dalam pembuktian, hanya 6 mahasiswa yang benar melakukannya. Kekeliruan yang dilakukan sebagian besar mahasiswa yang lain adalah mereka tidak menemukan pasangan segitiga-segitiga yang sebangun dengan tepat. Penggunaan konsep kesebangunan dalam proses

AKSIOMA: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika
Vol. 11, No. 1 Juli 2020
e-ISSN 2579-7646

pembuktian, untuk kemudian menerapkan teorema Ceva, dapat diduga merupakan dampak langsung dari penggunaan konsep kesebangunan yang dicontohkan oleh dosen dalam proses pembelajaran. Hal ini menunjukkan bahwa mahasiswa secara adaptif dan fleksibel dapat menerapkan penalaran deduktif, yang mereka pelajari saat pembelajaran, ke dalam konteks berbeda saat tes. Keluwesan berpikir deduktif seperti ini merupakan hal yang perlu dicapai oleh mahasiswa calon guru matematika sebagai bekal untuk mereka di masa depan (Jupri & Herman, 2017).

Misalkan diketahui $\triangle ABC$, dengan $\overline{AX}, \overline{BY}$, dan $\overline{CZ}$ adalah garis-garis tinggi segitiga tersebut.



Perhatikanbahwa

$\tan A = \frac{CZ}{AZ} \Leftrightarrow CZ = AZ \tan A.$

$\tan A = \frac{BY}{AY} \Leftrightarrow BY = AY \tan A.$

$\tan B = \frac{CZ}{BZ} \Leftrightarrow CZ = BZ \tan B.$

$\tan B = \frac{AX}{XB} \Leftrightarrow AX = XB \tan B.$

$\tan C = \frac{AX}{CX} \Leftrightarrow AX = CX \tan C.$

$\tan C = \frac{BY}{CY} \Leftrightarrow BY = CY \tan C.$

Dari hubungan-hubungan tersebut, diperoleh

$\frac{AZ}{AY} = \frac{CZ}{BY}; \frac{ZB}{XB} = \frac{CZ}{AX};$ dan $\frac{CX}{CY} = \frac{AX}{BY}$

Oleh karena itu,

$\frac{AZ}{AY} \cdot \frac{XB}{ZB} \cdot \frac{CY}{CX} = \frac{CZ}{BY} \cdot \frac{AX}{CZ} \cdot \frac{BY}{AX} = 1.$

$\Leftrightarrow \frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1.$

Jadi, $\overline{AX}, \overline{BY}$, dan $\overline{CZ}$ konkuren.

Gambar 6. Pembuktian konkurensi garis-garis tinggi segitiga dengan trigonometri

Beberapa mahasiswa, yang gagal menerapkan konsep kesebangunan, menggunakan konsep perbandingan trigonometri untuk membuktikan konkurensi garis-garis tinggi suatu segitiga. Gambar 6 menyajikan contoh jawaban menggunakan konsep trigonometri dalam pembuktian (ditulis ulang dari salah satu pekerjaan mahasiswa). Penggunaan konsep trigonometri dalam pembuktian, meski bukan dampak langsung dari proses pembelajaran, menunjukkan bahwa mahasiswa secara luwes menggunakan aneka kecakapan matematika yang dikuasainya dalam pembuktian yang menuntut kemampuan penalaran deduktif. Kemampuan seperti ini, selain menunjukkan kematangan bernalar secara deduktif juga memperlihatkan kemampuan kreatif dan berpikir tingkat tinggi dalam pemecahan masalah (Kusumah, 1986; Soedjadi, 2000).

D. Simpulan

Dari uraian pada bagian sebelumnya, tentang hasil observasi proses pembelajaran dan analisis terhadap hasil tes perkuliahan geometri untuk calon guru matematika, maka dapat ditarik paling sedikit dua simpulan berikut. Pertama, proses pembelajaran geometri yang diamati, secara struktur terdiri atas tiga tahapan: penjelasan dan pembuktian teorema, contoh penerapan teorema pada pembuktian, serta latihan soal; sedangkan secara substantif, proses pembelajaran pada pokok bahasan teorema Ceva yang diamati dapat dikatakan menekankan kepada proses pembuktian teorema dan penerapannya dalam pembuktian. Implementasi dari proses pembelajaran geometri seperti itu, menurut kami, dapat dipandang sebagai upaya untuk mengembangkan penalaran deduktif mahasiswa. Kemampuan bernalar secara deduktif menunjukkan kematangan bermatematika dan merupakan ciri dari kemampuan berpikir tingkat tinggi. Dalam pandangan kami, meski proses pembelajaran geometri yang telah dilaksanakan sudah cukup baik, namun proses pembelajaran tersebut tampaknya masih dapat ditingkatkan. Upaya peningkatan mutu proses pembelajaran ini dapat dilakukan, misalnya, dengan mengembangkan aktivitas eksploratif yang bersifat induktif untuk menghantarkan mahasiswa kepada tahap proses berpikir deduktif secara lebih bermakna. Saran ini, tampaknya, dapat diinvestigasi lebih lanjut pada penelitian mendatang.

Kedua, dari analisis hasil tes penerapan teorema Ceva dalam proses pembuktian ditemukan beberapa strategi pembuktian berbeda. Strategi pembuktian dengan menggunakan konsep kesebangunan tampaknya merupakan dampak langsung dari proses pembelajaran, sebab penggunaan konsep tersebut telah dicontohkan oleh dosen dalam pembelajaran di kelas. Hal ini bermakna bahwa mahasiswa secara luwes menggunakan wawasan dan pengalaman yang telah diperoleh saat pembelajaran untuk melakukan pembuktian pada konteks berbeda saat tes. Sementara itu, strategi pembuktian dengan konsep trigonometri menunjukkan kematangan berpikir deduktif mahasiswa yang secara fleksibel menggunakan aneka kecakapan matematis yang dimiliki untuk melakukan pembuktian dalam konteks yang dibutuhkan. Untuk penelitian lebih lanjut, tampaknya perlu diselidiki apakah para mahasiswa akan menggunakan strategi-strategi pembuktian yang berbeda jika dosen memberi contoh penggunaan strategi pembuktian berbeda untuk suatu teorema saat pembelajaran.

E. Daftar Pustaka

Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 17*(1), 31–48.

Heit, E., & Rotello, C. M. (2010). Relations between inductive reasoning and deductive reasoning. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 36*(3), 805–812.

Hershkowitz, R. (1998). About reasoning in geometry. In C. Mammana (Ed.), *Perspective on the teaching of geometry for the 21th century* (pp. 29-36). Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

Howse, T. D., & Howse, M. E. (2015). Linking the Van Hiele theory to instruction. *Teaching Children Mathematics, 21* (5), 305–313.

Hudojo, H. (2005). *Pengembangan kurikulum dan pembelajaran matematika*. Malang: UM Press.

Jupri, A., & Syaodih, E. (2016). Between formal and informal thinking: The use of algebra for solving geometry problems from the perspective of Van Hiele theory. *Jurnal Pengajaran Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, 21*(2), 1-7.

Jupri, A., & Herman, T. (2017). Theory and practice of mathematics teacher education: An explorative study at the department of mathematics education, Indonesia University of Education. In *Proceedings of International Conference on Mathematics and Science Education.* Atlantis Press.

Jupri, A. (2017a). From geometry to algebra and vice versa: Realistic mathematics education principles for analyzing geometry tasks. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 1830, No. 1, pp. 050001-1-05001-5). AIP Publishing.

Jupri, A. (2017b). Investigating primary school mathematics teachers' deductive reasoning ability through Varignon's theorem. In *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series* 895 (2017) 012080.

Jupri, A. (2019). *Geometri dengan pembuktian dan pemecahan masalah*. Jakarta: Bumi Aksara

Kemdikbud (2013). *Kurikulum 2013. Kompetensi Dasar: Sekolah Menengah Pertama (SMP)/Madrasah Tsanawiyah (MTs)*. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.

Kusumah, Y. S. (1986). *Logika matematika elementer*. Bandung: Tarsito.

Mulyati, S. (2000). Cara menguasai konsep, definisi, dan teorema dalam geometri. *Matematika: Jurnal Matematika atau Pembelajarannya, 6*(2), 79-89.

Posamentier, A. S. (2002). *Advanced Euclidean Geometry: Excursions for Secondary Teachers and Students*. New York: Key College Publishing.

Ruseffendi, E.T. (1991). *Pengantar kepada membantu guru mengembangkan kompetensinya dalam pengajaran matematika untuk meningkatkan CBSA*. Bandung: Tarsito.

Soedjadi, R. (2000). *Kiat pendidikan matematika di Indonesia. Konstatasi keadaan masa kini menuju harapan masa depan*. Jakarta: Dirjen DIKTI Departemen Pendidikan Nasional.