MENGEKSPLORASI CATENOID MENGGUNAKAN PERANGKAT LUNAK MAPLE

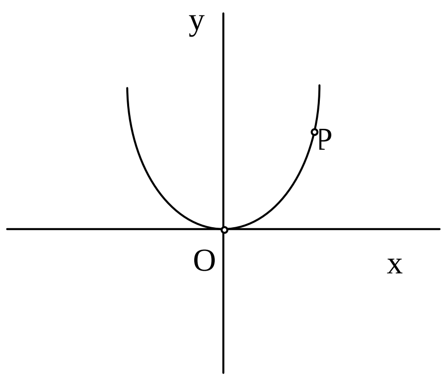
Kartika Yulianti
Jurusan Pendidikan Matematika
FPMIPA - Universitas Pendidikan Indonesia
Jl. Dr. Setyabudhi 229, Bandung 40154
Telp. (022) 2004508, Fax (022) 2004508
e-mail: ykar_tika @ yahoo.com

1. Pengertian

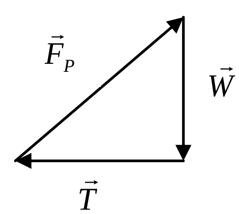
Catenoid adalah permukaan regular yang diperoleh dengan memutar catenary terhadap sumbu-z. Catenary berasal dari bahasa latin "*catena*" yang berarti rantai. Catenary adalah bentuk dari sebuah rantai fleksibel yang menggantung bebas pada kedua ujungnya.

Akan ditunjukkan bahwa kurva catenary memenuhi persamaan $y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$.

Bukti:



Gambar i



Gambar ii

Ambil titik terbawah sebagai titik O(0,0) dan sebarang titik P pada kurva. Dapat dilihat pada gambar (ii), bahwa terdapat tiga gaya yang bekerja pada titik P, yaitu $\vec{T}$ adalah gaya tegang kabel ke arah titik O, $\vec{F}$ adalah gaya kabel ke arah kanan; bersesuaian dengan kemiringan kabel pada titik P, serta $\vec{W}$ adalah berat kabel antara O dan P.

Kemiringan di P = $\dfrac{W}{T}$ ...(1)

$W = \mu s$, dimana μ = berat jenis kabel, dan s = panjang kabel antara titik O dan P. Sehingga (1) menjadi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{W}{T} = \frac{\mu s}{T}$$

$$s = \frac{T}{\mu}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mu}{T}\int_0^x \sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + 1}\; dt$$

Dengan mendiferensialkan kedua sisi terhadap x, maka diperoleh:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\mu}{T}\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1} \qquad \text{...(2)}$$

Persamaan yang memenuhi (2) dan kondisi $y(0) = 0$ adalah

$$y = \frac{T}{\mu}\cosh\left(\frac{\mu}{T}x\right) - \frac{T}{\mu}$$

$\therefore$ Kurva $y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ disebut catenary.

Catenoid dapat diparameterisasi oleh pemetaan $X : U \subseteq R^2 \to S \subseteq R^3$, dimana

$$X := (u, v) \to [\cosh(v)\cos(u), \cosh(v)\sin(u), v]$$

dengan $0 < u < 2\pi$ dan $-\infty < v < \infty$.

Akan dibuktikan bahwa catenoid adalah permukaan reguler.

Ambil sebarang titik $p \in S$, maka terdapat persekitaran $V \subset R^3$ dan pemetaan X yang bersifat:

i. $x(u,v) = \cosh(v)\cos(u), \quad y(u,v) = \cosh(v)\sin(u), \quad z(u,v) = v$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\cosh(v)\sin(u) \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = \sinh(v)\cos(u)$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \cosh(v)\cos(u) \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \sinh(v)\sin(u)$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 0 \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = 1$$

Karena tiap element dari X mempunyai turunan parsial yang kontinu untuk semua order di setiap $(u,v) \in U$, maka X terdiferensialkan.

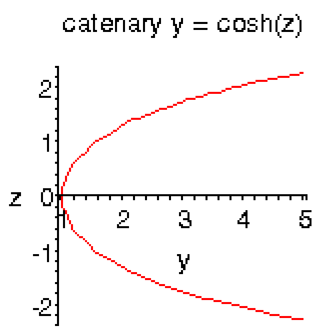
ii. X kontinu dan X^{-1} kontinu, maka X homeomofisma.

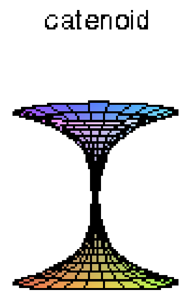
iii. $$dX_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cosh(v)\sin(u) & \sinh(v)\cos(u) \\ \cosh(v)\cos(u) & \sinh(v)\sin(u) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ mempunyai rank 2.

Maka X pemetaan satu-satu.

∴ Catenoid merupakan permukaan reguler.

Berikut adalah gambar catenary dan catenoid:





Untuk perhitungan property-property dari catenoid diperlukan persamaan-persamaan berikut:

```
> with(linalg):
> xu  := diff(u1(u,v),u);
```
$xu := [-\cosh(v\sim)\sin(u\sim), \cosh(v\sim)\cos(u\sim), 0]$

```
> xuu:=diff(u1(u,v),u$2);
```
$xuu := [-\cosh(v\sim)\cos(u\sim), -\cosh(v\sim)\sin(u\sim), 0]$

```
> xuv:=diff(diff(u1(u,v),u),v);
```
$xuv := [-\sinh(v\sim)\sin(u\sim), \sinh(v\sim)\cos(u\sim), 0]$

```
> xv  := diff(u1(u,v),v);
```
$xv := [\sinh(v\sim)\cos(u\sim), \sinh(v\sim)\sin(u\sim), 1]$

```
> xvv:=diff(u1(u,v),v$2);
```
$xvv := [\cosh(v\sim)\cos(u\sim), \cosh(v\sim)\sin(u\sim), 0]$

2. Koefisien Bentuk Fundamental Pertama

```
> E:=simplify(dotprod(xu,xu));
```
$E := \cosh(v\sim)^2$

```
> F:=simplify(dotprod(xu,xv));
```
$F := 0$

```
> G:=simplify(dotprod(xv,xv));
```
$G := \cosh(v\sim)^2$

3. Koefisien Bentuk Fundamental Kedua

```
> e:=simplify((1/N1)*dotprod(N,xuu));
```

$$e := -1$$

```
> f:=(1/N1)*dotprod(N,xuv);
```

$$f := 0$$

```
> g:=simplify((1/N1)*dotprod(N,xvv));
```

$$g := 1$$

4. Vector Normal

```
> N:=simplify(crossprod(xu,xv));
```

$$N := [\cosh(v\sim)\cos(u\sim), \cosh(v\sim)\sin(u\sim), -\cosh(v\sim)\sinh(v\sim)]$$

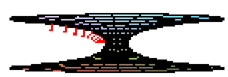
```
> N1:=simplify(sqrt(dotprod(N,N)));
```

$$N1 := \cosh(v\sim)^2$$

Maka vector normal dari catenoid adalah:

$$N = \left[\frac{\cos u}{\cosh v}, \frac{\sin u}{\cosh v}, \frac{-\sinh u}{\cosh v}\right]$$

Gambar beberapa vector normal di catenoid



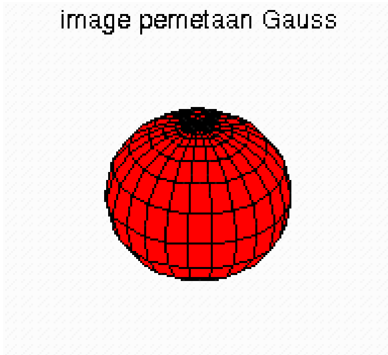
5. Gauss Map

Gauss map adalah sebuah pemetaan yang memetakan vector normal satuan di permukaan S, ke R^3 dalam bola satuan. Berikut adalah peta dari pemetaan Gauss dengan domain permukaan catenoid.

```
> N:=(u,v)->([cosh(v)*cos(u)/(cosh(v)^2), cosh(v)*sin(u)/(cosh(v)^2), -
cosh(v)*sinh(v)/(cosh(v)^2)]);
```

$$N := (u, v) \to \left[\frac{\cosh(v)\cos(u)}{\cosh(v)^2}, \frac{\cosh(v)\sin(u)}{\cosh(v)^2}, -\frac{\cosh(v)\sinh(v)}{\cosh(v)^2}\right]$$

```
> with(plots):
> ga:=plot3d(N(u,v), u=0..2*Pi, v=-5..5,color=red):
> display({ga},title="image pemetaan Gauss");
```



Secara analisis, komponen i dan j pada vektor normal tidak pernah bersama-sama nol (karena $\sin(u)^2 + \cos(u)^2 = 1$) sehingga tidak akan pernah dicapai vector (0,0,1) dan (0,0,-1). Sedangkan untuk nilai yang lainnya terdefinisi dengan baik. Seingga image pemetaan Gauss dengan domain catenoid adalah seluruh permukaan kulit bola, tanpa sumbu z.

6. Kelengkungan Gaussian

Nilai Kelengkungan Gauss (*Gauss Curvature*) yang dihitung dengan formula Gauss :

```
> K1:=(e*g-f^2)/(E*G-F^2);
```

$$K1 := -\frac{1}{\cosh(v\sim)^4}$$

7. Rata-Rata Kelengkungan Gaussian

```
> H:=(e*G+g*E)/(2*E*G);
```

$$H := 0$$

8. Minimal Surface

Parameterisasi sebuah permukaan reguler dikatakan minimal jika kelengkungan rata-ratanya bernilai nol di setiap titik permukaan tersebut. Sebuah permukaan reguler $S \subseteq R^3$ adalah minimal jika setiap parameterisasinya minimal.

Catenoid mempunyai $E = G = \cosh^2 v$, $F = 0$, dan $x_{uu} + x_{vv} = 0$ sehingga catenoid merupakan permukaan minimal. Dapat dibuktikan bahwa catenoid merupakan satu-satunya permukaan hasil perputaran yang minimal.

<u>Bukti</u>:

Akan dicari kurva $y = f(x)$ sehingga jika diputar terhadap sumbu-x, membentuk permukaan minimal.

Parameterisasi untuk *surface of revolution*:

$$X(u,v) = \left(f(v)\cos u,\ f(v)\sin u,\ g(v)\right)$$

Karena kurva parallel dan meridian dari *surface of revolution* merupakan *lines of curvature*, maka kelengkungan dari kurva $y = f(x)$ adalah negative dari kelengkungan normal dari lingkaran yang dibangun oleh titik $f(x)$. Karena kelengkungan dari $y = f(x)$ adalah

$$\frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}}$$

dan kelengkungan normal dari lingkaran tersebut adalah proyeksi dari kelengkungan biasa sepanjang normal N terhadap permukaan, maka diperoleh

$$\frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}} = \frac{1}{y}\frac{1}{(1+(y')^2)^{1/2}} \qquad \ldots(*)$$

(*) adalah persamaan yang harus dipenuhi oleh kurva $y = f(x)$.

Persamaan (*) kali dengan $2y'$ maka diperoleh

$$\frac{2y''y'}{1+(y')^2} = \frac{2y'}{y}$$

Misal $z = 1+(y')^2$ maka

$$\frac{z'}{z} = \frac{2y'}{y}$$

Dengan mengintegralkan persamaan terakhir maka diperoleh

$$\log z = \log y^2 + \log k^2 = \log(yk)^2$$

Dengan menggunakan sifat logaritma, maka diperoleh

$$(1+(y')^2) = z = (yk)^2$$

$$\frac{k\,dy}{\sqrt{(yk)^2-1}} = k\,dx$$

Dengan mengintegralkan kedua ruas, diperoleh

$$\cosh^{-1}(yk) = kx + c$$

Yang ekuivalen dengan

$$y = \frac{1}{k}\cosh(kx + c)$$

$\therefore$ *Surface of revolution* yang minimal hanyalah catenoid.

9. Principal Curvature

```
> k1:=e/E;
```

$$k_1 = -\frac{1}{\cosh^2(v)}$$

```
> k2:=g/G;
```

$$k_2 = \frac{1}{\cosh^2(v)}$$

10. Kurva Asimtotic

Kurva terhubung reguler C pada koordinat persekitaran X adalah sebuah kurva asimtotic, jika dan hanya jika untuk setiap parameterisasi $\alpha(t) = x(u(t), v(t)), t \in I$ dari C, $\prod(\alpha`(t)) = 0$, untuk setiap $t \in I$, yaitu jika dan hanya jika u dan v memenuhi :

$$e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 = 0, \quad t \in I$$

Maka persamaan diferensial kurva asimtotic dari catenoid adalah:

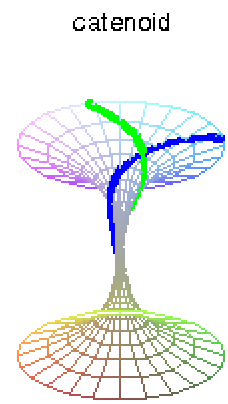
```
> PD:=e*(diff(u(t),t))^2+g*(diff(v(t),t))^2=0;
```

$$PD := -\left(\frac{d}{dt}u\sim(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}v\sim(t)\right)^2 = 0$$

Solusi dari persamaan diferensial tersebut adalah $u - v = c_1$ atau $u - v = c_2$.

Sehingga kurva asimtotic dari catenoid dengan parameterisasi di atas adalah $u - v = c_1$ atau $u - v = c_2$. Berikut adalah gambar kurva asimtotik pada permukaan catenoid.

```
> with(plots):as1:=spacecurve(u1((5-t),t),t=0..4,color=green,
thickness=3):
> as2:=spacecurve(u1((t+5),t),t=0..4,color=blue, thickness=3):
> display({ctn,as1,as2});
```



11. Vector Singgung

Akan dibuat vector singgung sepanjang kurva $X(0, v(t))$.

```
> xv1:=[sinh(v)*cos(0), sinh(v)*sin(0), 1];
> Ni:=simplify(sqrt(dotprod(xv1,xv1)));
```

$$Ni := \cosh(v\sim)$$

```
> xv:=(v)->([sinh(v)/cosh(v), 0, 1/cosh(v)]);
```

$$xv := v \rightarrow \left[\frac{\sinh(v)}{\cosh(v)}, 0, \frac{1}{\cosh(v)}\right]$$

Vector singgung pada kurva $X(u(t), 1)$.

```
> xu1 := [-cosh(1)*sin(u), cosh(1)*cos(u), 0];
> N2:=simplify(sqrt(dotprod(xu1,xu1)));
```

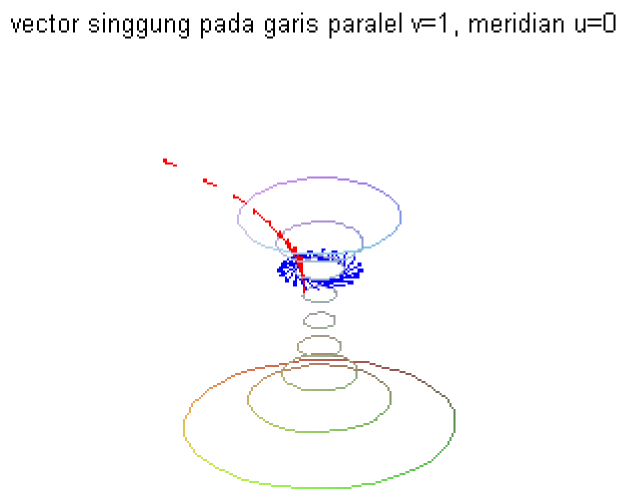
$$N2 := \cosh(1)$$

```
> xu :=(u)->([-1.5*cosh(1)*sin(u), 1.5*cosh(1)*cos(u), 0]);
```

$xu := u$ ® $[-1.5 \cosh(1) \sin(u), 1.5 \cosh(1) \cos(u), 0]$

```
>with(plots):ctn:=plot3d(u2(u,v), u=0..2*Pi, v=-3..3,title="vector
singgung pada garis paralel v=1 dan meridian u=0"):
>t:=9:
>g:=array(0..t):
> for i from 0 to t do
> g[i]:=arrow(<u2(0,i/3)[1],u2(0,i/3)[2],u2(0,i/3)[3]>,
<xv(i/3)[1],xv(i/3)[2],xv(i/3)[3]>,shape=arrow,color=red)
> end do:
```

```
> w:=36:
> h:=array(0..w):
> for i from 0 to w do
> h[i]:=arrow(<u2(Pi*i/10,1)[1],u2(Pi*i/10,1)[2],u2(Pi*i/10,1)[3]>,
<xu(Pi*i/10)[1],xu(Pi*i/10)[2],xu(Pi*i/10)[3]>,shape=arrow,color=blue)
> end do:
> display({ctn,seq(h[i],i=1..w),seq(g[i],i=1..t)});
```



12. Tangent Plane

Pada titik $u = u_0, v = v_0$, tangent plane dari permukaan catenoid adalah:

$$Y = X(u_0, v_0) + hX_u(u_0, v_0) + kX_v(u_0, v_0), \qquad h, k : \text{konstan}$$

Karena

$$X(u_0, v_0) = (\cosh v_0 \cos u_0, \cosh v_0 \sin u_0, v_0)$$
$$X_u(u_0, v_0) = (-\cosh v_0 \sin u_0, \cosh v_0 \cos u_0, 0)$$
$$X_v(u_0, v_0) = (\sinh v_0 \cos u_0, \sinh v_0 \sin u_0, 1)$$

Maka tangent plane dari catenoid pada titik $u = u_0, v = v_0$ dapat diparameterisasi oleh:

$$Y(h,k) = (x(h,k), y(h,k), z(h,k))$$

Dengan
$$x(h,k) = (\cosh v_0 (\cos u_0 - h \sin u_0) + k \cos u_0 \sinh v_0)$$
$$y(h,k) = (\cosh v_0 (h \cos u_0 + \sin u_0) + k \sin u_0 \sinh v_0)$$
$$z(h,k) = (k + v_0)$$

13. Isometri

Akan ditunjukkan catenoid isometric dengan helicoid.

Parameterisasi untuk catenoid:

```
> u1 := (u,v)->([cosh(v)*cos(u),cosh(v)*sin(u),v]);
```

Maka diperoleh $E := \cosh(v\sim)^2$, $F := 0$, $G := \cosh(v\sim)^2$

Sedangkan parameterisasi untuk helicoid adalah

```
> u2 := (x,y)->([y*cos(x),y*sin(x),x]);
```

$$u2 := (x, y) ® [y \cos(x), y \sin(x), x]$$

Diperoleh:

```
> E2:=simplify(dotprod(xx2,xx2));
```

$$E2 := 1 + y\sim^2$$

```
> F2:=simplify(dotprod(xx2,xy2));
```

$$F2 := 0$$

```
> G2:=simplify(dotprod(xy2,xy2));
```

$$G2 := 1$$

Parameterisasi untuk helicoid diubah, yaitu dengan mengambil $x = u$ dan $y = \sinh(v)$:

```
> u3 := (u,v)->([sinh(v)*cos(u),sinh(v)*sin(u),u]);
```

$$u3 := (u, v) ® [\sinh(v) \cos(u), \sinh(v) \sin(u), u]$$

```
> E2:=simplify(dotprod(xu3,xu3));
```

$$E3 := \cosh(v\sim)^2$$

```
> F2:=simplify(dotprod(xu3,xv3));
```

$$F3 := 0$$

```
> G2:=simplify(dotprod(xv3,xv3));
```

$$G3 := \cosh(v\sim)^2$$

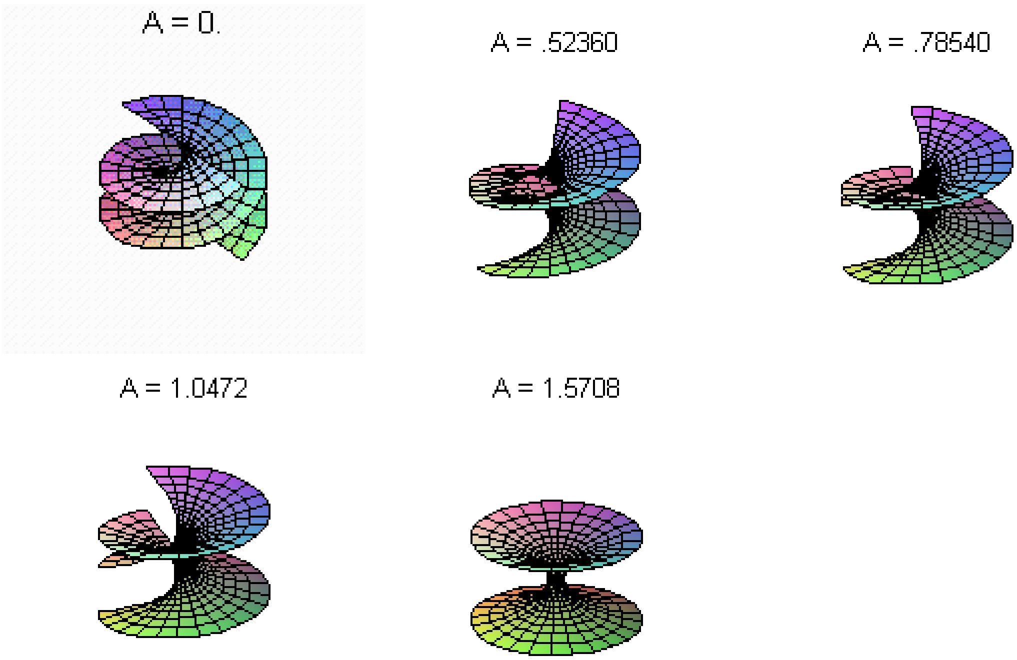
Setelah mengubah parameterisasi untuk helicoid diperoleh E=E3 , F=F3, dan G=G3. Maka helicoid dan catenoid adalah isometri**.**

Helicoid dapat dideformasi secara kontinu dan isometrik menjadi catenoid, menurut transformasi:

```
X(u,v)=cos(A)*sinh(v)*sin(u)+sin(A)*cosh(v)*cos(u)
Y(u,v)=-cos(A)*sinh(v)*cos(u)+sin(A)*cosh(v)*sin(u)
Z(u,v)=u*cos(A)+v*sin(A)
```

Untuk `A` =0 permukaan berupa helicoid, sedangkan untuk `A=Pi/2` permukaan yang diperoleh berupa catenoid.

```
> with(plots):
> animate( plot3d, [[cos(A)*sinh(v)*sin(u)+sin(A)*cosh(v)*cos(u),-
cos(A)*sinh(v)*cos(u)+sin(A)*cosh(v)*sin(u),u*cos(A)+v*sin(A)],
u=0..2*Pi, v=-3..3], A=0..Pi/2 );
```



14. Christoffel Symbols

Untuk menghitung Christoffel symbols, diperlukan nilai-nilai berikut ini:

```
> Eu:=diff(E,u);
```

$$Eu := 0$$

```
> Ev:=diff(E,v);
```

$$Ev := 2\cosh(v\sim)\sinh(v\sim)$$

```
> Fu:=diff(F,u);
```

$$Fu := 0$$

```
> Fv:=diff(F,v);
```

$$Fv := 0$$

```
> Gu:=diff(G,u);
```

$$Gu := 0$$

```
> Gv:=diff(G,v);
```

$$Gv := 2\cosh(v\sim)\sinh(v\sim)$$

```
> ds:=E*G-F^2;
```

$$ds := \cosh(v\sim)^4$$

Christofell symbols dari catenoid:

```
> a111:=((1/2*Eu*G)-(F*(Fu-(1/2)*Ev)))/ds;
```

$$a111 := 0$$

```
> a211:=(E*(Fu-(1/2)*Ev)-(F*(1/2)*Eu))/ds;
```

$$a211 := -\frac{\sinh(v\sim)}{\cosh(v\sim)}$$

```
> a112:=((1/2*G*Ev)-(1/2*Gu*F))/ds;
```

$$a112 := \frac{\sinh(v\sim)}{\cosh(v\sim)}$$

```
> a212:=((1/2*Gu*E)-(1/2*Ev*F))/ds;
```

$$a212 := 0$$

```
> a122:=(((Fv-1/2*Gu)*G)-(1/2*Gv*F))/ds;
```

$$a122 := 0$$

```
> a222:=((1/2*Gv*E)-((Fv-1/2*Gu)*F))/ds;
```

$$a222 := \frac{\sinh(v\sim)}{\cosh(v\sim)}$$

```
> a212u:=diff(a212,u);
```

$$a212u := 0$$

```
> a211v:=simplify(diff(a211,v));
```

$$a211v := -\frac{1}{\cosh(v\sim)^2}$$

Kelengkungan Gauss dihitung dengan Christoffel symbols:

```
> K:=-(a212u-a211v+(a112*a211)+(a212*a212)-(a211*a222)-(a111*a212))/E;
```

$$K := -\frac{1}{\cosh(v\sim)^4}$$

15. Geodesic

Misal $\gamma : I \to S$ adalah kurva pada catenoid, dan misal $X(u,v)$ adalah parameterisasi untuk catenoid, maka $\gamma : I \to S$ adalah geodesic jika dan hanya γ memenuhi system persamaan

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -2\frac{\sinh v}{\cosh v}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{\sinh v}{\cosh v}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - \frac{\sinh v}{\cosh v}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

Pandang persamaan diferensial pertama

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -2\frac{\sinh v}{\cosh v}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}$$

Misal $p = \frac{du}{dt}$ maka

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dt} = -2\frac{\sinh v}{\cosh v}\frac{dv}{dt}$$

$$\ln p = -2\ln \cosh v + k$$

$$p = C(\cosh v)^{-2}$$

Sehingga $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{C}{(\cosh v)^2}$ …(3)

Karena t adalah panjang busur, maka

$$1 = \left|\frac{dx}{dt}\right|^2 = E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

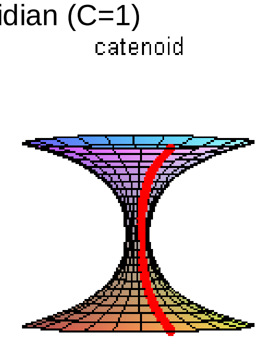
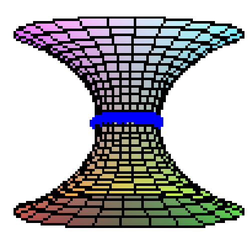
Atau

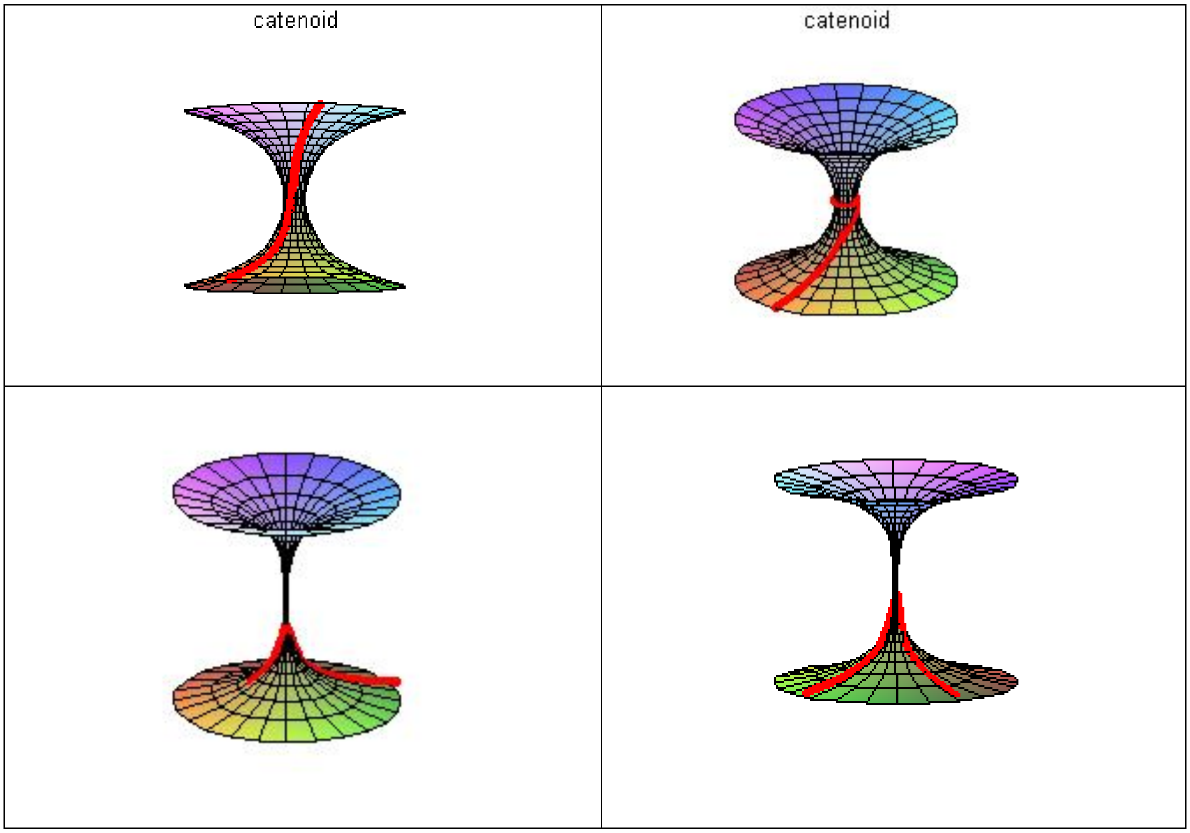
$$1 = (\cosh v)^2\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + (\cosh v)^2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

Dengan mensubstitusi persamaan (3) maka diperoleh

$$\frac{dv}{dt} = \pm\frac{\sqrt{(\cosh v)^2 - C^2}}{(\cosh v)^2}$$

Macam-macam geodesic di catenoid:

- meridian (C=1) 	- parallel 
-	- asimtotic terhadap $v = 0$



Program untuk mendapatkan gabar-gambar tersebut terdapat pada lampiran 1.

Pertanyaan:

- Diketahui dua buah titik $X(u_0, v_0)$ dan $X(u_1, v_0)$, Apakah benar bahwa kurva tersebut (geodesic) merupakan lintasan yang terpendek?

16. Aksioma "Sejajar"

Pada geometri Euclid, jika diketahui sebuah garis l dan sebuah titik di luar garis l maka terdapat sebuah garis yang melalui titik tersebut dan sejajar dengan garis l. Apakah aksioma tersebut berlaku juga di permukaan catenoid? Jawabannya adalah tidak berlaku.

Diketahui sebuah geodesic m , berupa meridian $X(u_0, v(t))$, dan titik $X(u_1, v_1)$ di luar geodesic m . Akan ditunjukkan terdapat lebih dari satu geodesic yang melalui titik $X(u_1, v_1)$ dan sejajar dengan m .

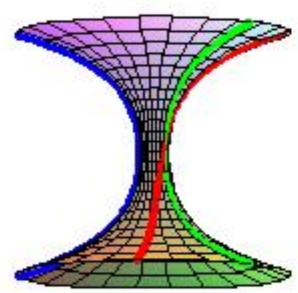
Karena meridian dari catenoid merupakan geodesic maka meridian $X(u_1, v(t))$ adalah geodesic yang melalui titik $X(u_1, v_1)$ dan sejajar geodesic m . Meridian tersebut kita namakan geodesic n .

Misal $\zeta(u(t),v(t))$ adalah geodesic non-meridian yang melalui titik $X(u_1,v_1)$, maka $\zeta(u(t),v(t))$ memenuhi persamaan

$$\frac{dv}{du}=\frac{1}{c}\cosh v\sqrt{\frac{\cosh^2 v-c^2}{\sinh^2 v+1}}$$

$$u=c\int\frac{1}{\sqrt{\cosh^2 v-c^2}}dv+\text{const.}$$

Jika $v\to\infty$ maka $u\to u_{as}$. Berarti geodesic ζ asimtotic terhadap suatu meridian u_{as}. Berarti terdapat sebuah geodesic non-meridian yang melalui $X(u_1,v_1)$ dan asimtotic terhadap meridian u_0.



Karena catenoid mempunyai $K=-\dfrac{1}{\cosh^4 v}<0$, maka terdapat tak hingga buah geodesic yang terletak di antara n dan ζ, yang setelah berpotongan di titik $X(u_1,v_1)$, jaraknya semakin menjauh (tidak akan pernah berpotongan kembali).

$\therefore$ Terdapat tak hingga buah geodesic yang melalui titik $X(u_1,v_1)$ dan sejajar dengan geodesic m.

17. Lingkaran pada Catenoid

Panjang *geodesic circle* yang berpusat di titik p, dengan jari-jari r adalah

$$L=2\pi r-\frac{\pi}{3}r^3K(p)+R_1 \quad \text{dimana} \quad \lim_{r\to 0}\frac{R_1}{r^3}=0.$$

Sedangkan luas *geodesic circle* yang berpusat di titik p, dengan jari-jari r adalah

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^r \int_0^{2\pi} \sqrt{EG - F^2}\, d\theta\, dr \\
&= \int_0^r \int_0^{2\pi} \sqrt{G}\, d\theta\, dr \\
&= \int_0^r \int_0^{2\pi} \left(r - \frac{1}{6} K(p) r^3 + R_1 \right) d\theta\, dr \\
&= \int_0^r 2\pi r - \frac{\pi}{3} K(p) r^3 + R_2\, dr \\
&= \pi r^2 - \frac{\pi}{12} K(p) r^4 + R_3, \quad \text{dimana } R_3 = O(r^4).
\end{aligned}
$$

Karena kelengkungan Gauss pada catenoid, $K < 0$, maka baik keliling ataupun luas lingkaran pada catenoid, mempunyai nilai yang lebih besar dari pada lingkaran pada plane.

Lingkaran pada catenoid yang berpusat di $X(0,0)$ dan $r = 0{,}5$, mempunyai keliling

$$L = 2\pi(0{,}5) - \frac{\pi}{3}(0{,}5)^3(-1) = 1{,}042\pi$$

dan luas

$$A = \pi(0{,}5)^2 - \frac{\pi}{12}(-1)(0{,}5)^4 = 0{,}25\pi + 5{,}2\ 10^{-3}\pi\ .$$

Jika dibandingkan dengan lingkaran pada plane, keliling lingkaran pada catenoid mempunyai perbedaan yang kecil, yaitu sebesar $0{,}042\pi$ sedangkan luasnya hanya berbeda $5{,}2\ 10^{-3}\pi$.

Hal tersebut dikarenakan, selisih keliling lingkaran pada plane dan pada catenoid (juga pada permukaan lain yang mempunyai $K \neq 0$) adalah $\frac{\pi}{3} r^3 K(p)$ dan untuk selisih luas: $\frac{\pi}{12} K(p)(r)^4$. Sehingga keliling dan luas lingkaran pada catenoid yang berjari-jari kecil ($r < 1$), akan mempunyai nilai hampir sama dengan di bidang datar.

Sedangkan untuk lingkaran dengan pusat di $X(0,1)$ dan $r = 0{,}5$, mempunyai keliling semakin mendekati di keliling lingkaran di plane, yaitu $1{,}027\pi$. Hal tersebut sangat masuk akal, mengingat permukaan catenoid yang semakin ke atas semakin datar (K minimum di kurva $X(u(t),0)$).

18. Segitiga pada Catenoid

Akan dibuat segitiga pada catenoid yang titik-titik sudutnya adalah

$X(0,0),\ X(Pi/2,0),\ X(0,Pi/2)$

```
> g1:=spacecurve(u1(t,0),t=0..Pi/2,color=blue, thickness=3): # garis paralel
> g2:=spacecurve(u1(0,t),t=0..1,color=blue, thickness=3,title="segitiga di catenoid"): # garis meridian
```

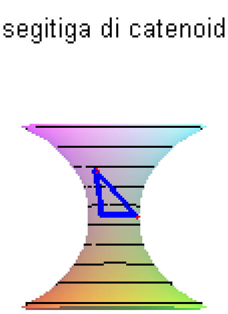
Untuk membuat segitiga:

jika diketahui dua titik $X(0,1)$ dan $X(Pi/2,0)$ maka dicari terlebih dahulu geodesic yang menghubungkan dua titik tersebut, dengan metode *shooting*. Dengan nilai c=-0.93, diperoleh geodesic yang menghubungkan dua titik tersebut.

```
> t1:=pointplot3d(u1(0,1), color=red, thickness=7):
> t2:=pointplot3d(u1(Pi/2,0),color=red, thickness=7):
> c:=-0.93:
> numsol:=dsolve({diff(u(t),t)=c/(cosh(v(t)))^2,diff(v(t),t)=sqrt(cosh(v(t))^2-(c)^2)/cosh(v(t))^2,u(0)=Pi/2,v(0)=0},{u(t),v(t)},type=numeric);
```

$$numsol := \mathbf{proc}(x\_rkf45)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc};$$

```
> temp:=seq([(cosh(v[i]))*cos(u[i]),(cosh(v[i]))*sin(u[i]),(v[i])],i=1..22):
> grs := PLOT3D(CURVES([temp]),  COLOR(RGB, 0, 0, 1), THICKNESS(2)):
> display({grs,ctn,g1,g2,t1,t2});
```

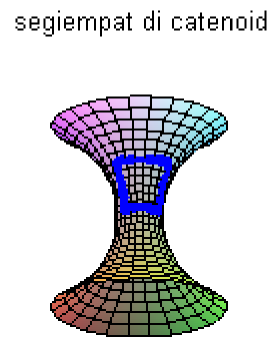


19. Segiempat pada Catenoid

Berikut adalah gambar segiempat di catenoid yang dibatasi oleh kurva

$X(u(t),0),\ X(u(t),1),\ X(0,v(t)),\ X(Pi/2,v(t))$

```
> g3:=spacecurve(u1(t,1),t=0..Pi/2,color=blue,
thickness=3,title="segiempat di catenoid"): # grs paralel di v=1
> g4:=spacecurve(u1(Pi/2,t),t=0..1,color=blue, thickness=3):
> display({ctn,g1,g2,g3,g4});
```



Segiempat tersebut mempunyai luas:

$$A = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

```
> A:=int( Pi/2*((cosh(x))^2), x=0..1 );
```

$$A := -\frac{1}{16}\pi e^{(-2)} + \frac{1}{16}\pi e^{2} + \frac{1}{4}\pi$$

yaitu $A \approx 0{,}7\pi$ satuan luas. Jika di bidang datar, segiempat dengan ukuran yang sama, akan mempunyai luas sebesar $0{,}5\pi$ satuan luas.

Segiempat di atas mempunyai sisi-sisi dengan panjang:

- untuk sisi $X(u(t),0)$ yaitu $\alpha(t) = (\cosh 0 \cos t, \cosh 0 \sin t, 0)$, mempunyai panjang

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{E(u')^2}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cosh 0\, dt = \frac{\pi}{2}$$

- kurva untuk sisi $X(u(t),1)$ yaitu $\alpha(t) = (\cosh 1 \cos t, \cosh 1 \sin t, 1)$, memiliki panjang

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{E(u')^2}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cosh 1\, dt = \cosh(1)\frac{\pi}{2}$$

- kurva sisi $X(0, v(t))$ yaitu $\alpha(t) = (\cosh t \cos 0, \cosh t \sin 0, t)$,memiliki panjang

$$I_3 = \int_0^1 \sqrt{G(v')^2}\, dt = \int_0^1 \cosh t\, dt = \sinh(1)$$

Sedangkan sisi $X(\pi/2, v(t))$ memiliki panjang yang sama dengan sisi $X(0, v(t))$, yaitu $\sinh(1)$.

Karena segempat tersebut mempunyai dua sisi yang sama panjang dan dua sisi lainnya berbeda panjang, maka segiempat tersebut adalah sebuah trapesium.