KARTIKA YULIANTI
Jurusan Pendidikan Matematika
FPMIPA - Universitas Pendidikan Indonesia
Jl. Dr. Setyabudhi 229, Bandung 40154
Telp. (022) 2004508, Fax (022) 2004508
e-mail: ykar_tika @ yahoo.com

DINAMIKA FLUIDA

EXERCISE 40

2. Take as initial spectrum a block function (nonzero for ½ ≤ *k* ≤ 2). Animate the initial profile and the evolution. (Approximate the fourier integral by a Riemann sum).

Jawab:

- Masalah nilai awal :

  $$\partial_t u = -3\partial_x u$$

  Dengan *initial spectrum* :

  $$F(k) = \begin{cases} 1, & 0 \le k \le 2 \\ 0, & k \text{ lainnya} \end{cases}$$

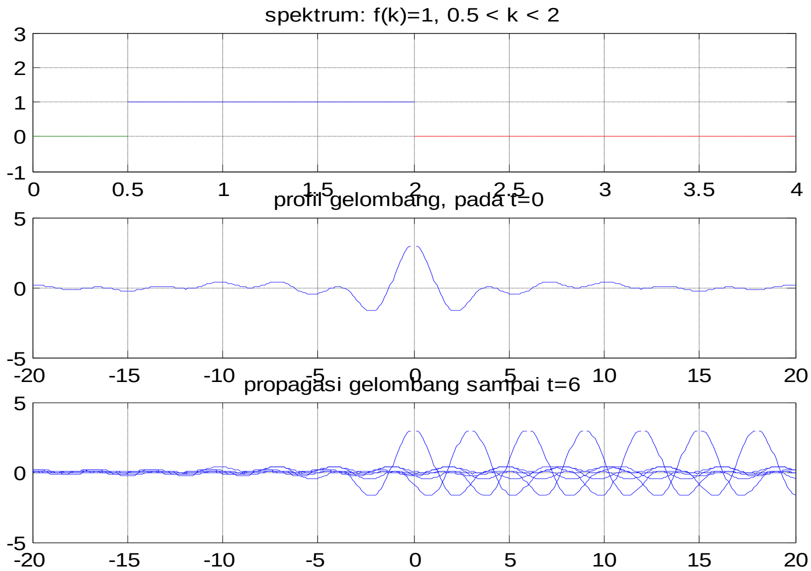
  Solusi umum masalah tersebut adalah: $u(x,t) = e^{ik(x-3t)} + cc$

  Solusi khusus dari masalah nilai awal tersebut dapat ditulis dalam bentuk integral Fourier, yaitu:

  $$u(x,t) = \int_{1/2}^{2} e^{i(kx-3kt)}dk + cc$$

  $$= \int_{1/2}^{2} 2\cos(kx-3kt)dk$$

  Dengan program Matlab, diperoleh bentuk gelombang awal (pada t = 0) dan propagasi dari gelombang tersebut.

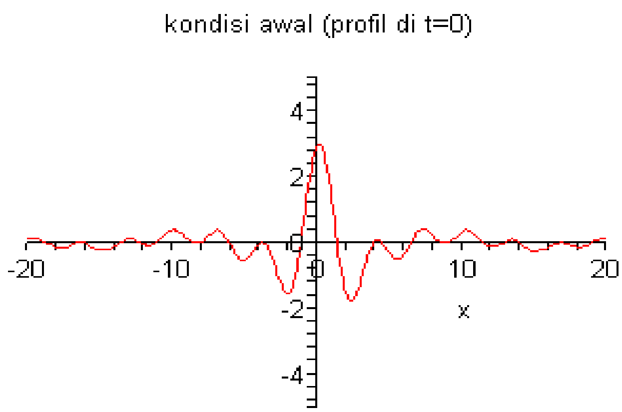


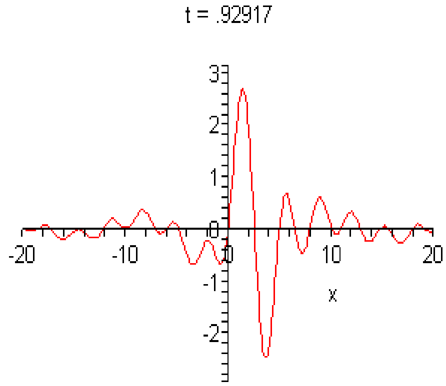
Propagasi gelombang yang diperoleh dari program Matlab sesuai dengan model yang dibuat. Gelombang hanya bertranslasi dengan kecepatan 3 satuan kecepatan.

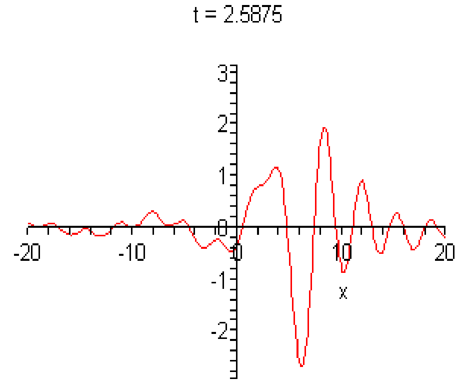
- Masalah nilai awal dengan model : $\partial_t u = i\partial_{xx} u$ dan *initial spectrum* :

$$F(k) = \begin{cases} 1, & 0 \le k \le 2 \\ 0, & k \text{ lainnya} \end{cases}$$

Bentuk awal dan evolusi dari gelombang tersebut adalah sebagai berikut:







Pada t=0, baik untuk model translasi ataupun dispersi mempunyai bentuk gelombang yang sama. Untuk model translasi, sejalan dengan waktu, bentuk gelombang tidak mengalami perubahan. Sedangkan untuk model dispersi, sejalan dengan waktu, amplitudo gelombang semakin lama semakin kecil.

EXERCISE 43

A typical example of a spectral function is a Gaussian, with standard deviation σ :

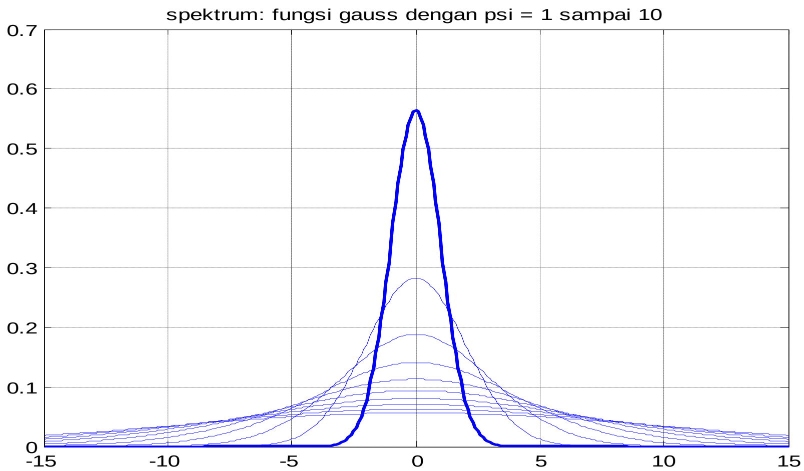
$$\widehat{G}(k) = \frac{1}{\sigma\sqrt{(\pi)}} e^{\frac{-(k-k_o)^2}{2\sigma^2}}$$

Determine the corresponding spatial profil G. Investigate for $k_o = 0$ how the value of σ determines the width of $\widehat{G}$ and the spatial extension of G. Investigate the effect of $k_o \neq 0$.

<u>Jawab</u>:

Fungsi spectrum Gaussian: $\widehat{G}(k) = \frac{1}{\sigma\sqrt{(\pi)}} e^{\frac{-(k-k_o)^2}{2\sigma^2}}$

Berikut adalah gambar fungsi spektrum dengan σ =1 sampai 10, dengan k_o = 0.



Untuk kurva yang bergaris lebih tebal adalah fungsi Gauss dengan σ =1. Nilai σ memberikan peranan pada ketinggian dan kelandaian grafik fungsi. Semakin besar nilai σ, maka kurva fungsi Gauss semakin landai. Sedangkan nilai k_o memberikan pengaruh pada letak pusat simetri fungsi Gauss tersebut.

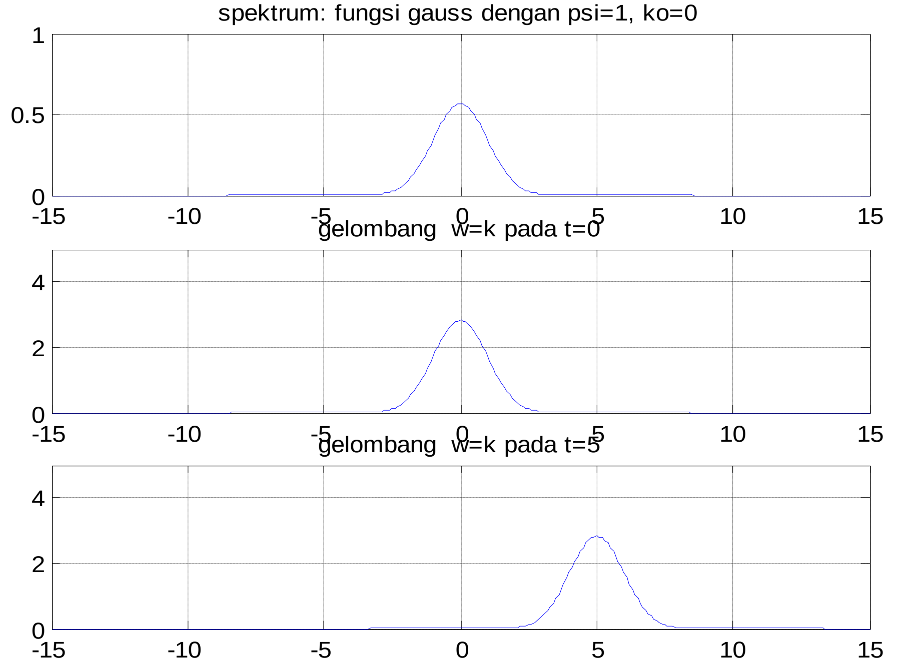
Akan ditunjukkan pengaruh dari nilai σ dan k_o dari fungsi spektrum pada bentuk (profil) gelombang yang dihasilkan.

Solusi umum: $u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{G}(k) e^{i(kx-\omega t)} dk + cc$

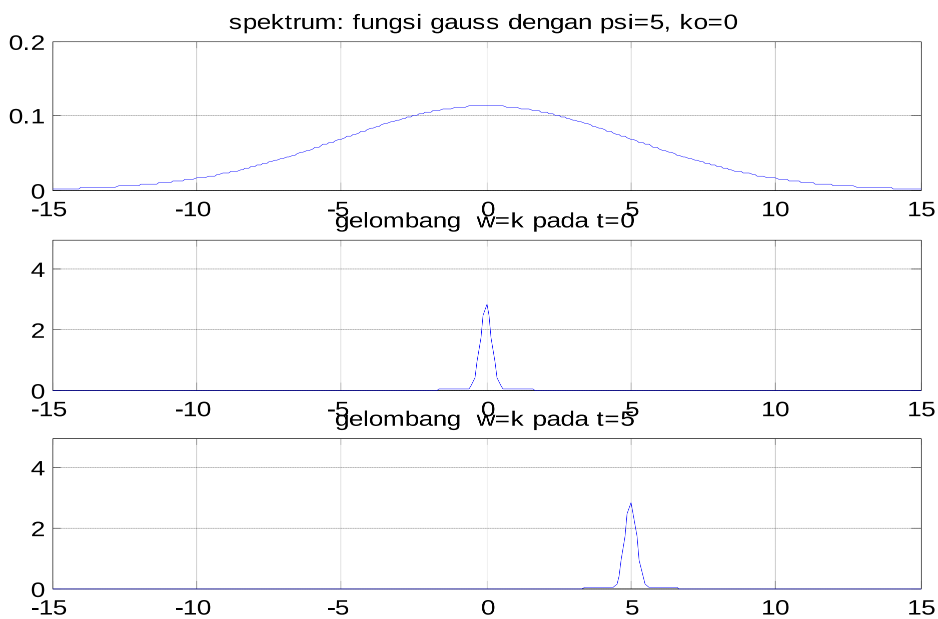
Investigasi σ

- Model: translasi $\partial_t u = -\partial_x u$, ($\omega = k$).

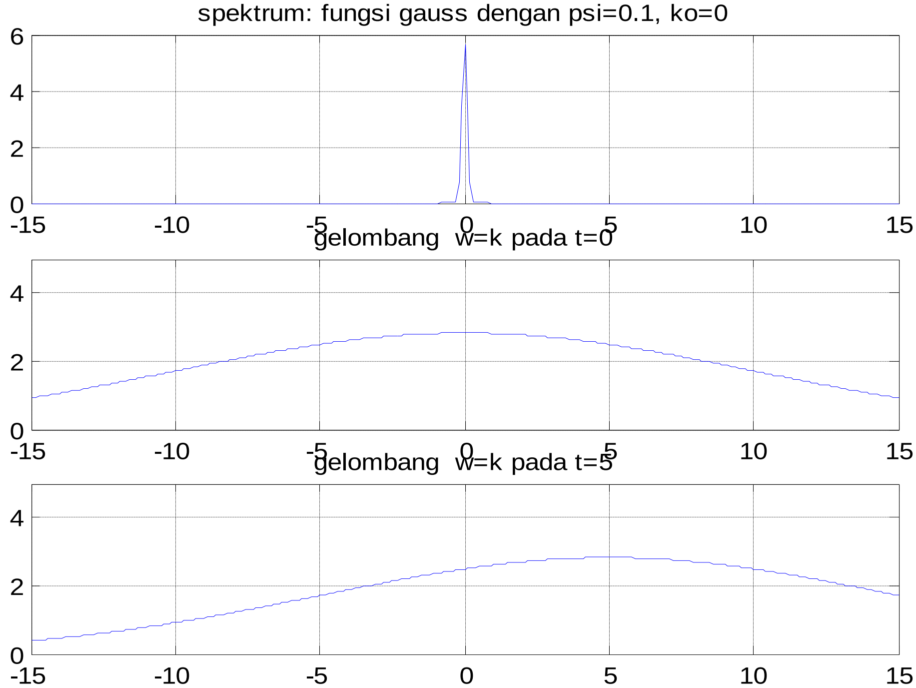
- Dengan $\sigma = 1$, $k_o = 0$



- Dengan $\sigma = 5$, $k_o = 0$



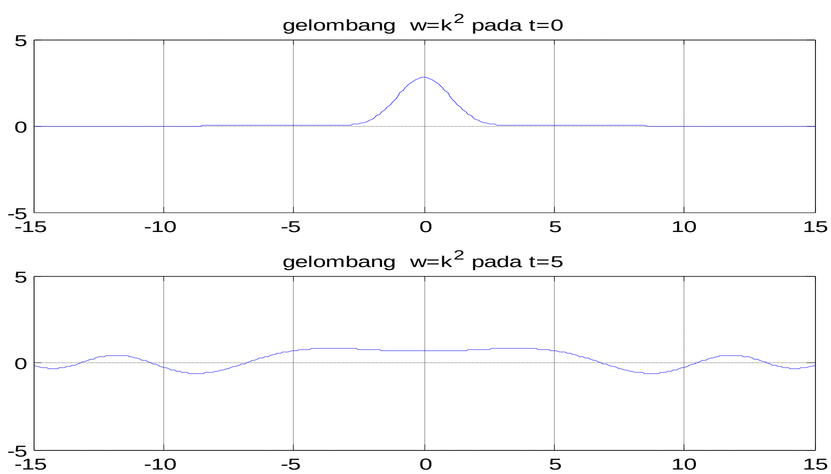
- Dengan $\sigma = 0{,}1$, $k_o = 0$



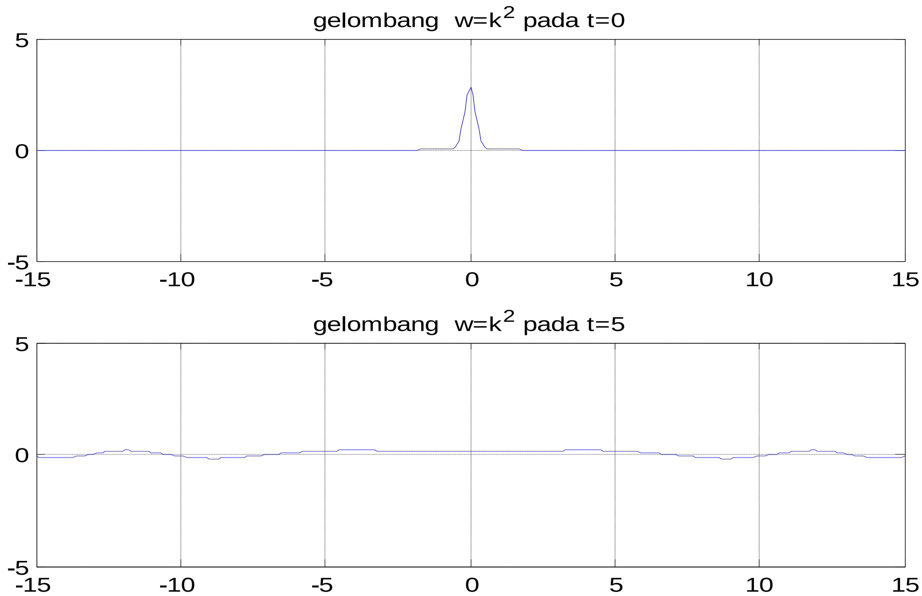
Berdasarkan hasil tersebut dapat dikatakan bahwa semakin besar nilai varians (σ) maka bentuk fungsi spektrum gauss akan semakin landai (amplitudo kecil, panjang gelombang besar), tetapi bentuk gelombang yang dihasilkan adalah kebalikannya, yaitu mempunyai amplitudo besar dan panjang gelombang kecil. Hal tersebut berlaku juga untuk model yang lain (disipasi dan dispersi).

○ Model disipasi $\partial_t u = i\partial_x^2 u$, ($\omega = k^2$)

- Dengan $\sigma = 1$, $k_o = 0$

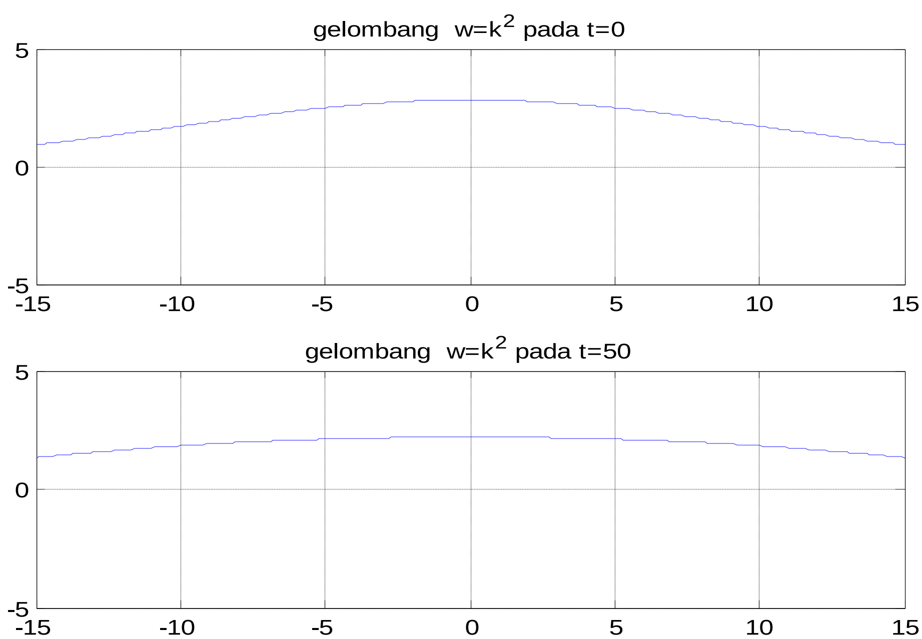


- Dengan $\sigma = 5$, $k_o = 0$



Pada t=0, bentuk gelombang yang diperoleh pada $\sigma = 3$ mempunyai panjang gelombang yang lebih kecil bila dibandingkan dengan $\sigma = 1$. Akibatnya pada t=5 gelombang dengan $\sigma = 3$ mempunyai amplitudo yang lebih rendah (hampir datar).

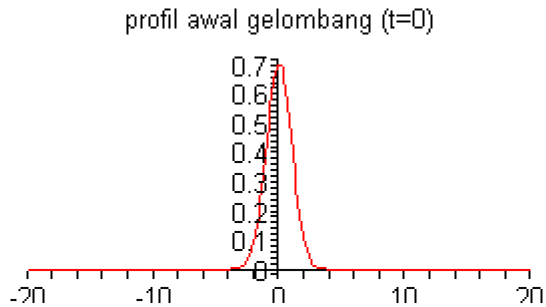
- Dengan $\sigma = 0{,}1$, $k_o = 0$

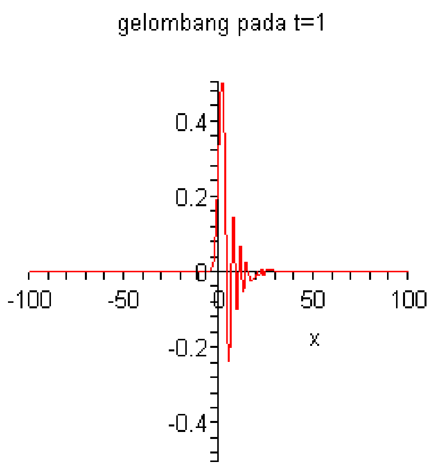


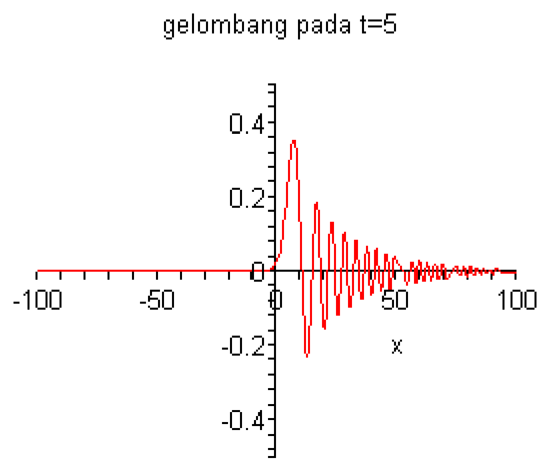
Karena gelombang yang dihasilkan dengan $\sigma = 0{,}1$ mempunyai panjang gellombang yang sangat besar, maka penurunan (proses disipasi) gelombangnya memerlukan waktu yang sangat lama, bila dibandingkan dengan σ = 1. Pada gambar terlihat bahwa pada t=50, tinggi gelombang hanya menurun sedikit.

○ Model translasi n dispersi, $\partial_t u = -\partial_x u + \partial_{xxx} u$

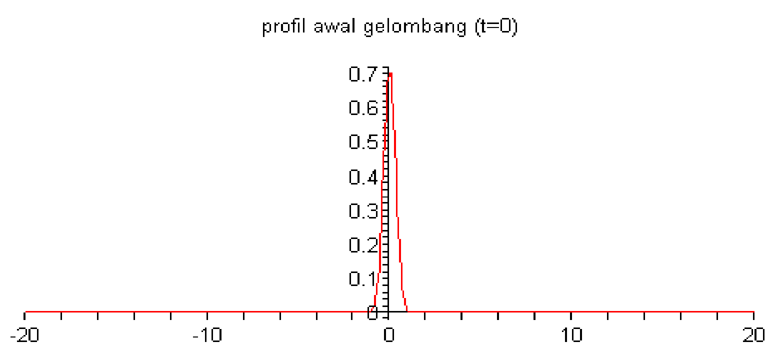
- Dengan σ = 1, ko = 0

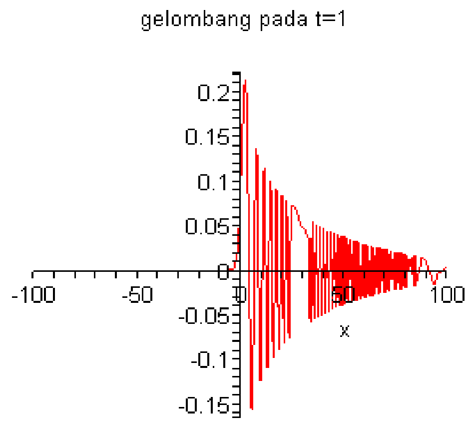






- Dengan σ = 3, ko = 0

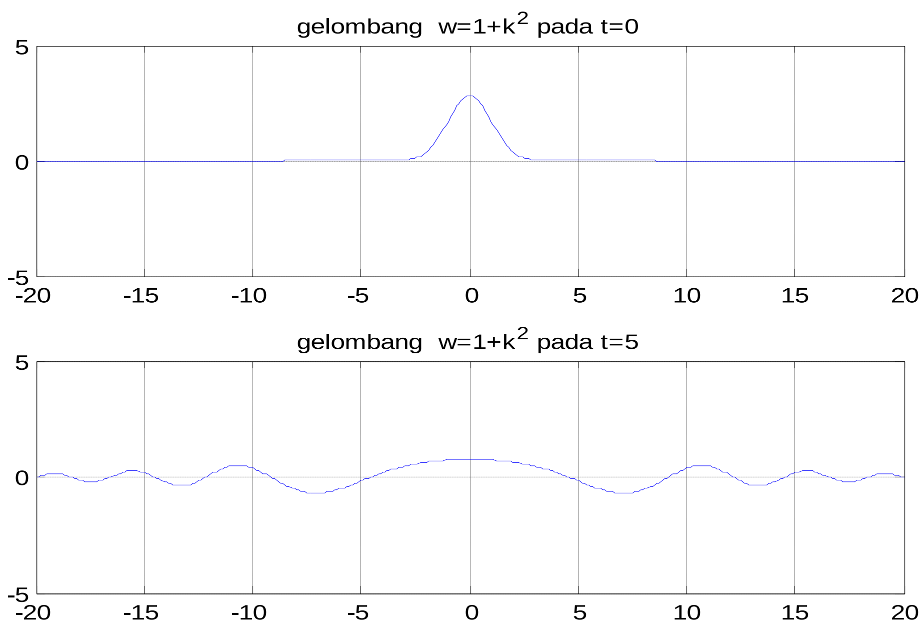




Gelombang dengan σ =3 mempunyai bentuk lebih sempit (runcing), bila dibandingkan dengan σ =1, tetapi kedua gelombang tersebut mempunyai amplitudo yang sama. Sedangkan pada t=1, bentuk gelombang untuk σ =3 lebih rigid dari pada σ =1.

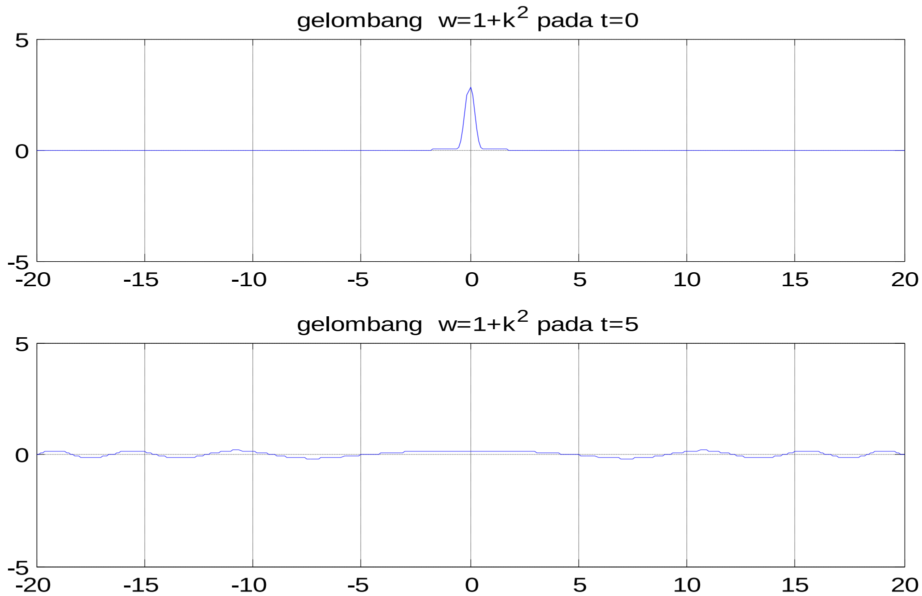
- Model disipasi $\partial_t u = -iu + i\partial_x^2 u$, ($\omega = 1 + k^2$)

  - Dengan $\sigma = 1$, $k_o = 0$



Bentuk gelombang pada model ini mirip dengan bentuk gelombang dengan model $\partial_t u = i\partial_x^2 u$. Perbedaanya adalah pada model ini, gelombang menurun lebih cepat, karena pada model ini terdapat koefisien yang membantu mempercepat penurunan.

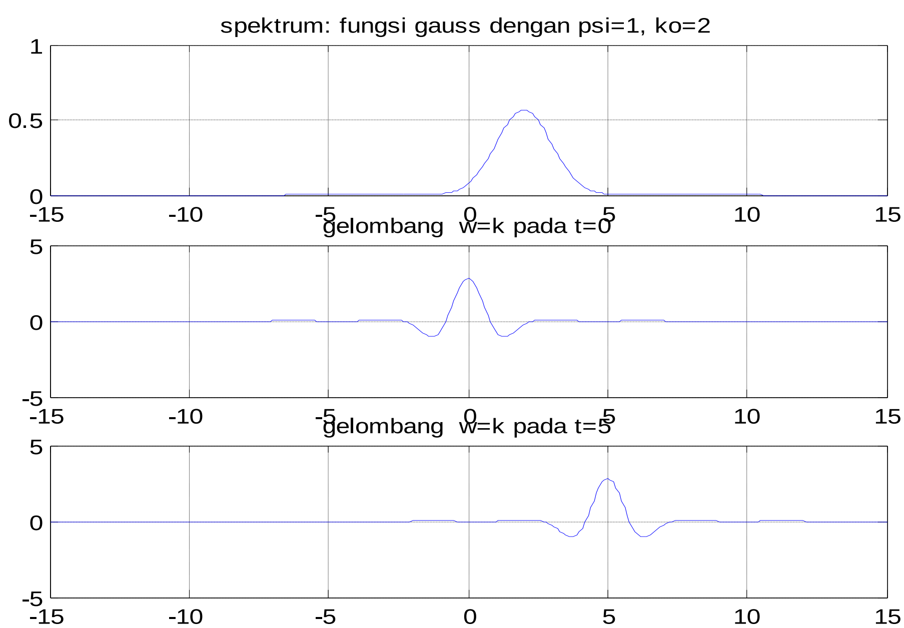
- Dengan $\sigma = 5$, $k_o = 0$



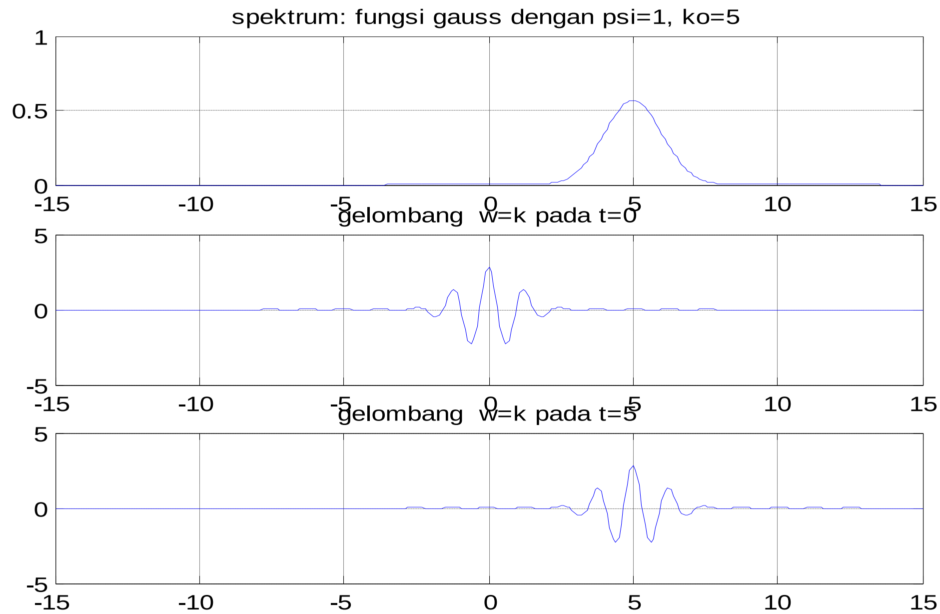
Investigasi k_o

- Model translasi $\partial_t u = -\partial_x u$, ($\omega = k$).

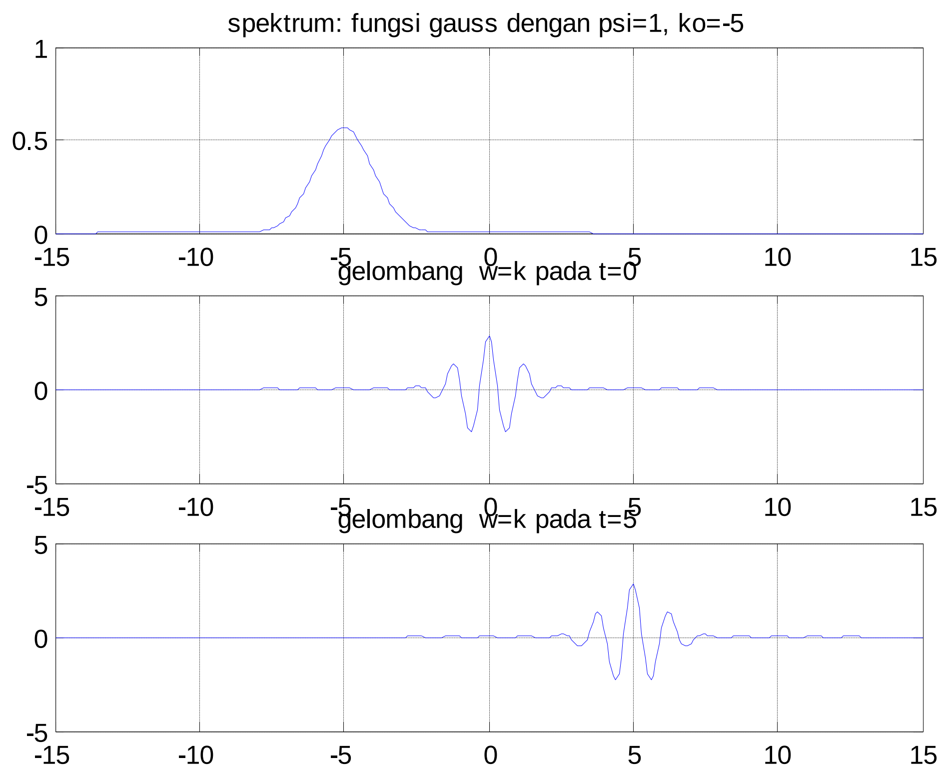
- Dengan $\sigma = 1$, $k_o = 2$



- Dengan $\sigma = 1$, $k_o = 5$



- Dengan $\sigma = 1$, $k_o = -5$



Nilai k_o memberikan pengaruh pada letak pusat simetri fungsi Gauss tersebut. Untuk nilai k_o = 5, fungsi Gauss simetri terhadap garis x = 5, sedangkan k_o = -5 fungsi Gauss simetri terhadap garis x = -5.

Terdapat perbedaan bentuk profil gelombang untuk nilai k_o yang berbeda. Untuk k_o =0 diperoleh gelombang dengan satu *hump*, untuk k_o =2 dihasilkan gelombang dengan tiga hump (satu hump besar dan dua hump kecil), sedangkan untuk k_o =5 diperoleh gelombang dengan lebih banyak *hump*. Dapat disimpulkan bahwa semakin besar nilai k_o maka jumlah gelombang semakin banyak.

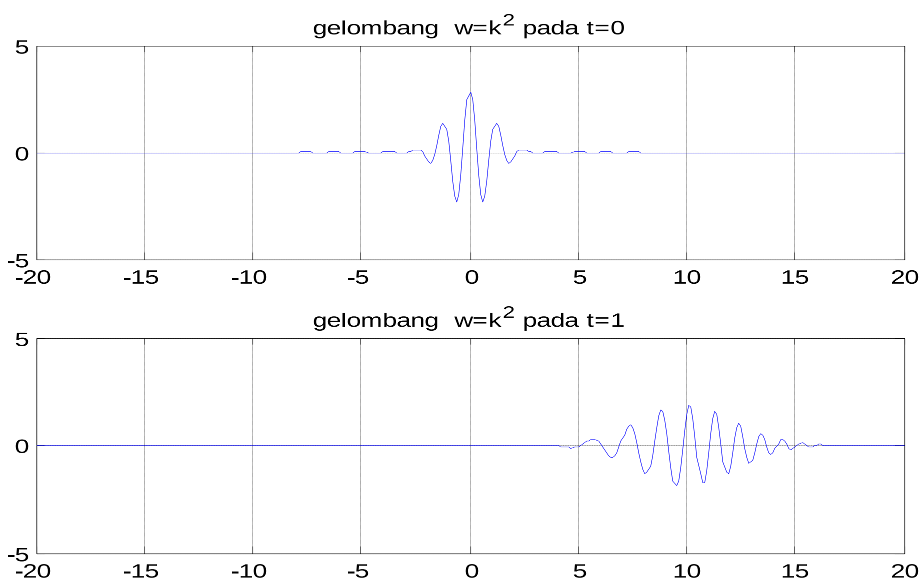
Fenomena tersebut dapat dijelaskan sebagai berikut: jika nilai $k_o \neq 0$ maka nilai $(k-k_o)^2$ akan semakin besar. Karena *k* merupakan bilangan gelombang, berarti jumlah gelombang yang dihasilkan semakin banyak.

Mengenai perbedaan tanda (k_o positif atau negatif) tidak mempengaruhi bentuk gelombang yang dihasilkan. Dapat dilihat bahwa untuk k_o = 5 dan k_o = -5 dihasilkan bentuk gelombang yang sama.

Kesimpulan tersebut berlaku juga untuk model yang lain (disipasi dan dispersi).

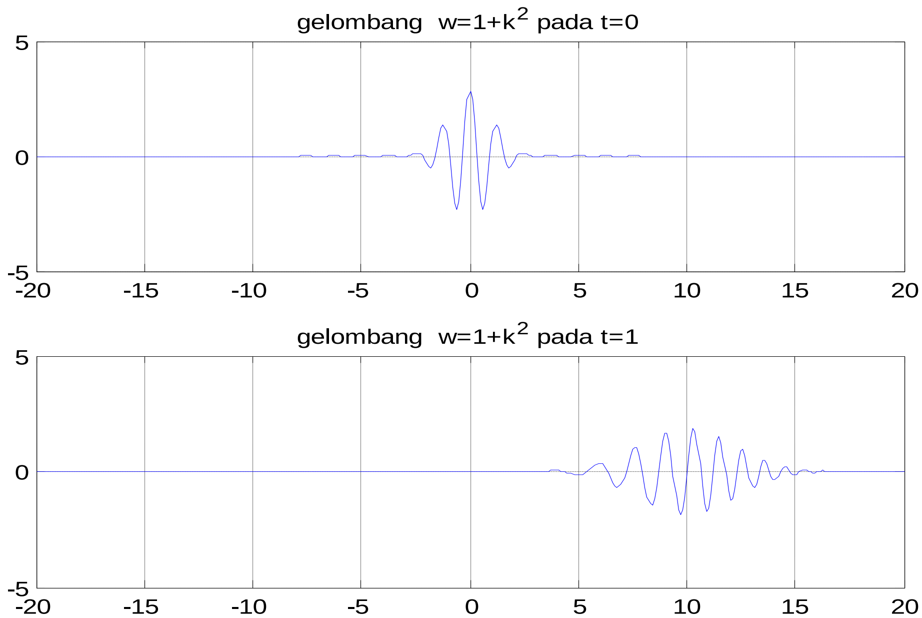
- Model disipasi $\partial_t u = i\,\partial_x^2 u$, ($\omega = k^2$)

- Dengan σ = 1, k_o = 5



- Model disipasi $\partial_t u = -iu + i\,\partial_x^2 u$, ($\omega = 1 + k^2$)

- Dengan σ = 1, k_o = 5



EXERCISE 45

3. The initial value problem for a second order equation describes the initial profil and the initial velocity

$$u(x,0) = f(x), \quad \partial_t u(x,0) = g(x)$$

Write down in fourier integrals the solution of IVP (initial value problem) for

$$\partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u + \partial_x^4 u \quad \ldots(*)$$

Animate, and interpret the solution for $f(x) = e^{-x^2}, \quad g(x) = 0$

Observe, and explain, that the solution remains symmetric about x = 0 for all time.

Jawab:

Solusi umum: $u(x,t) = e^{i(kx-\omega t)}$ ....(**)

Akan dicari terlebih dahulu persamaan dispersi ω .

Substitusi (**) ke (*), diperoleh:

$$(-i\omega^2)e^{i(kx=\omega t)} = c^2(ik)^2 e^{i(kx=\omega t)} + (ik)^4 e^{i(kx=\omega t)}$$

$$-\omega^2 = -c^2k^2 + k^4$$

$$\omega^2 = k^2(c^2 - k^2)$$

$$\omega_1 = k(c^2 - k^2)^{1/2} \text{ atau } \omega_2 = -k(c^2 - k^2)^{1/2}$$

sehingga $u(x,t) = e^{i(kx \pm k(c^2-k^2)^{1/2})}$

Solusi u(x, t) dapat ditulis dalam bentuk integral Fourier:

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(k)e^{i(kx-\omega t)}dk \qquad \text{dengan} \quad \omega=\pm k(c^2-k^2)$$

Diketahui nilai awal:

$$u(x,0)=f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F(k)e^{i(kx)}dk$$

Maka $F(k)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i(kx)}dx$

Sehingga solusi dalam bentuk integral Fourier:

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i(kx)}dx\right)e^{i(kx-\omega t)}dk$$

Diketahui bentuk awal gelombang: $f(x)=e^{-x^2}$

Dengan program Maple, diperoleh gambar fungsi *F*(*k*):