OPERATOR FREDHOLM

Kartika Yulianti
20106010

December 20, 2007

1 Orientasi

Definition 1 *Misalkan X, Y adalah ruang Banach. Sebuah operator $A \in B(X, Y)$ disebut operator Fredholm dari X ke Y, jika :*

1. $\alpha(A) = \dim N(A)$ *hingga.*
2. $R(A)$ *tutup di* Y.
3. $\beta(A) = \dim N(A')$ *hingga.*

Himpunan operator Fredholm dari X ke Y dinotasikan dengan $\Phi(X, Y)$. Indeks dari operator Fredholm didefinisikan sebagai:

$$i(A) = \alpha(A) - \beta(A)$$

Berikut adalah lemma-lemma yang digunakan untuk membuktikan teorema 5.4

Lemma 2 (5.1) *Misalkan N adalah subruang berdimensi hingga dari sebuah ruang vektor bernorm X. Maka terdapat subruang tutup X_0 dari X, sehingga*

(a). $X_0 \cap N = \{0\}$

(b). untuk setiap $x \in X$, terdapat $x_0 \in X_0$ dan $x_1 \in N$ sedemikian hingga x dapat dituliskan $x = x_0 + x_1$ secara tunggal.

Lemma 3 (5.2) *Misalkan X_1 adalah subruang tutup dari sebuah ruang vektor bernorm X dan M adalah subruang berdimensi hingga sedemikian hingga $M \cap X_1 = \{0\}$. Maka $X_2 = M \oplus X_1$ adalah subruang tutup dari X. Terlebih lagi, operator P yang didefinisikan:*

$$Px = \{ \begin{array}{ll} x, & x \in M \\ 0, & x \in X_1 \end{array}$$

adalah anggota $B(X_2)$.

Lemma 4 (5.3) *Misalkan X adalah runag vektor bernorm, dan R adalah subruang tutup sedemikian hingga P^o berdimensi n. Maka terdapat M subruang berdimensi n dari X sehingga $X = R \oplus M$.*

Theorem 5 (5.4) *Jika $A \in \Phi(X, Y)$ maka:*

1. *Terdapat subruang tutup X_0 dari X sedemikian sehingga*

$$X = N(A) \oplus X_0$$

2. *Terdapat subruang berhingga Y_0 dari Y sedemikian sehingga*

$$Y = R(A) \oplus Y_0$$

3. *Terdapat operator $A_0 \in B(Y, X)$ sedemikian hingga*

   (a) $N(A_0) = Y_0$
   (b) $R(A_o) = X_0$
   (c) $A_0 A = I$ *pada* X_0
   (d) $AA_0 = I$ *pada* $R(A)$
   (e) $A_0 A = I - F_1$ *pada* X
   (f) $AA_0 = I - F_2$ *pada* Y

Dimana $F_1 \in B(X)$ dengan $R(F_1) = N(A)$ dan $F_2 \in B(Y)$ dengan $R(F_2) = Y_0$. Konsekuensinya F_1 dan F_2 adalah operator dengan range hingga.

Proof.

- Ambil sebarang $A \in \Phi(X, Y)$. Karena $N(A)$ berdimensi hingga, maka berdasarkan Lemma (5.1) terdapat subruang tutup X_0 sehingga

$$X = N(A) \oplus X_0$$

  Misalkan $\widetilde{A}$ adalah restriksi A pada X_0, yaitu $\widetilde{A} \in B(X_0, R(\widetilde{A}))$.

  Akan ditunjukkan bahwa $R(A) = R(\widetilde{A})$.

  Misalkan $y \in R(A)$, maka terdapat $x \in X$ sehingga $Ax = y$. Tetapi $x = x_0 + z$, dengan $x_0 \in X_0$ dan $z \in N(A)$. Sehingga

$$y = Ax = Ax_0 + Az = Ax_0$$

  maka $y \in R(\widetilde{A})$. Akibatnya $R(A) \subset R(\widetilde{A})$.

  $R(\widetilde{A}) \subset R(A)$. Maka $R(A) = R(\widetilde{A})$.

  Sehingga $\widetilde{A} \in B(X_0, R(A))$.

  $N(\widetilde{A}) = \{0\}$ maka $\widetilde{A}$ adalah operator satu-satu, sehingga $\widetilde{A}^{-1}$ada.

  Karena X_0 dan $R(A)$ adalah subruang tutup, maka X_0 dan $R(A)$ merupakan ruang Banach. Sehingga berdasarkan teorema 3.8, $\widetilde{A}^{-1} \in B(R(A), X_0)$.

- $\widetilde{A}^{-1}$ akan diperluas menjadi A_0 sehingga terdefinisi pada Y.

  Diketahui $N(A')$ berdimensi hingga. Karena $R(A)^o = N(A')$, maka $R(A)^o$ berdimensi hingga juga. Berdasarkan Lemma 5.3, terdapat Y_0 subruang berdimensi hingga yang memenuhi

  $$Y = R(A) \oplus Y_0$$

  Berdasarkan Lemma 5.2, terdapat operator $P \in B(Y)$, dimana

  $$Py = \{ \begin{array}{cc} y, & y \in Y_0 \\ 0, & y \in R(A) \end{array}$$

  Sehingga

  $$(I - P)y = \{ \begin{array}{cc} 0, & y \in Y_0 \\ y, & y \in R(A) \end{array}$$

  Definisikan $A_0 = \widetilde{A}^{-1}(I - P)$. Karena $(I - P) \in B(Y, R(A))$ dan $\widetilde{A}^{-1} \in B(R(A), X_0)$ maka $A_0 \in B(Y, X)$.

  Operator A_0 yang telah dikonstruksi memenuhi sifat (a)-(d).

- Akan ditunjukkan A_0 memenuhi sifat (e).

  Karena $A_0 A = I$ pada hanya pada $X_{0,}$ maka untuk perluasan pada X :

  $$(A_0 A)x = (I - F_1)x = \{ \begin{array}{cc} x, & x \in X_0 \\ 0, & x \in N(A) \end{array}$$

  Dimana operator F_1 adalah

  $$F_1 x = \{ \begin{array}{cc} 0, & x \in X_0 \\ x, & x \in N(A) \end{array}$$

  Berdasarkan Lemma 5.2, $F_1 \in B(X)$. Dapat dilihat bahwa $R(F_1) = N(A)$, sehingga F_1 merupakan operator dengan range hingga.

- Hal yang sama juga dapat dilakukan untuk sifat (f).

  Perluasan AA_0 pada Y :

  $$(AA_0)y = (I - F_2)y = \{ \begin{array}{cc} y, & y \in R(A) \\ 0, & y \in Y_0 \end{array}$$

  Dengan operator F_2 :

  $$F_2 y = \{ \begin{array}{cc} 0, & y \in R(A) \\ y, & y \in Y_0 \end{array}$$

  $R(F_2) = Y_0$, sehingga F_2 merupakan operator dengan range hingga dan berdasarkan Lemma 5.2 $F_2 \in B(Y)$.

■

2 Further Properties

Tidaklah mudah untuk mengenali apakah sebuah operator termasuk Fredholm atau bukan, hanya dengan menggunakan definisi. Untuk mengenali operator Fredholm, dapat digunakan teorema berikut yang merupakan konvers dari Teorema 5.4.

Theorem 6 (5.5) *Misalkan $A \in B(X, Y)$ dan asumsikan terdapat $A_1, A_2 \in B(X, Y), K_1 \in K(X), K_2 \in K(Y)$ sedemikian hingga*

$$A_1 A = I - K_1 \textit{ pada } X$$

dan

$$AA_2 = I - K_2 \textit{ pada } Y$$

maka $A \in \Phi(X, Y)$.

Proof.

- $N(A) \subset N(A_1A) = N(I - K_1)$, karena K_1 kompak maka berdasarkan Teorema 4.12, $\alpha(A) \leq \alpha(I - K_1) < \infty$.
- $R(A) \supset R(AA_2) = R(I - K_2)$, maka $R(A)^o \subset R(I - K_2)^o$.

  Karena $R(A)^o = N(A')$ maka $N(A') \subset N(I - K_2')$.

  Karena K_2' kompak, maka $\beta(A) \leq \alpha(I - K_2') < \infty$ (Teorema 4.12).
- Untuk menunjukkan $R(A)$ tutup, dibutuhkan bantuan Lemma berikut

  Lemma 7 (5.6) *Misalkan X ruang vektor bernorm, dan $X = N \oplus X_0$ dimana X_0 adalah subruang tutup dan N berdimensi hingga. Jika X_1 adalah subruang dari X yang memuat X_0 maka X_1 tutup.*

  $R(I - K_2)$ tutup, maka berdasarkan Lemma 5.3, terdapat subruang berdimensi hingga Y_1 dari Y sehingga $Y = Y_1 \oplus R(I - K_2)$.

  Karena $R(A) \supset R(I - K_2)$, maka berdasarkan Lemma 5.6, $R(A)$ tutup.

■

Theorem 8 (5.7) *Jika $A \in \Phi(X, Y)$ dan $B \in \Phi(Y, Z)$, maka $BA \in \Phi(X, Z)$ dan*

$$i(BA) = i(B) + i(A)$$

Proof. Karena $A \in \Phi(X, Y)$ dan $B \in \Phi(Y, Z)$, maka terdapat $A_o \in B(Y, X), B_o \in B(Z, Y), F_1 \in K(X), F_2, F_3 \in K(Y), F_4 \in K(Z)$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} A_o A &= I - F_1 \text{ pada } X \\ AA_o &= I - F_2 \text{ pada } Y \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} B_oB &= I - F_3 \text{ pada } Y \\ BB_o &= I - F_4 \text{ pada } Z \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} A_oB_oBA &= A_o(I - F_3)A = I - F_1 - A_oF_3A = I - F_5 \text{ pada } X \qquad (1) \\ BAA_oB_o &= B(I - F_2)B_o = I - F_4 - BF_2B_o = I - F_6 \text{ pada } Z \end{aligned}$$

Karena terdapat $F_5 \in K(X), F_6 \in K(Y)$ dan operator $A_oB_o \in B(Z, Y)$ sehingga memenuhi persamaan (1), maka berdasarkan teorema 5.5, $BA \in \Phi(X, Z)$.

Akan ditunjukkan $i(BA) = i(B) + i(A)$.

Misalkan $Y_1 = R(A) \cap N(B)$, maka terdapat subruang $Y_{2,} Y_3, Y_{4,}$ yang memenuhi

$$\begin{aligned} R(A) &= Y_1 \oplus Y_2 \\ N(B) &= Y_1 \oplus Y_3 \\ Y &= R(A) \oplus Y_3 \oplus Y_4 \end{aligned}$$

dimana $Y_{1,} Y_3, Y_4$ berdimensi hingga, misalkan $d_{i=} \dim Y_i, i = 1, 3, 4$ sedangkan Y_2 tutup.

$$\begin{aligned} N(BA) &= N(A) \oplus X_1 \\ R(B) &= R(BA) \oplus Z_4 \end{aligned}$$

dimana $X_1 \subset X_o$ sedemikian hingga $A(X_1) = Y_1$ dan $Z_4 = B(Y_4)$.

Karena Y_1 dan Y_4 berdimensi hingga serta A pemetaan satu-satu pada X_1 dan B pemetaan satu-satu pada Y_4 maka

$$\dim X_1 = d_1, \qquad \dim Z_4 = d_4$$

Sehingga diperoleh kesamaan

$$\begin{aligned} \alpha(BA) &= \alpha(A) + d_1 \\ \beta(BA) &= \beta(B) + d_4 \\ \alpha(B) &= d_1 + d_3 \\ \beta(A) &= d_3 + d_4 \end{aligned}$$

yang berakibat

$$\begin{aligned} i(B) + i(A) &= (d_1 + d_3 - \beta(BA) + d_4) + (\alpha(BA) - d_1 - d_3 - d_4) \\ &= \alpha(BA) - \beta(BA) \\ &= i(BA) \end{aligned}$$

■

Berikut adalah konsekuensi dari Teorema 5.5 dan teorema 5.7.

Lemma 9 (5.9) *Misalkan $A \in \Phi(X,Y)$ dan A_0 adalah operator yang memenuhi*

$$\begin{aligned} A_0 A &= I - F_1 \text{ pada } X \\ A A_0 &= I - F_2 \text{ pada } Y \end{aligned}$$

Maka $A_0 \in \Phi(Y,X)$ dan $i(A_0) = -i(A)$.

3 Contoh

Akan diilustrasikan Teorema 5.4 dengan menggunakan contoh operator Fredholm.

Telah diketahui bahwa l_2 adalah ruang Banach dan $K : l_2 \to l_2$ dengan $K(x_1, x_2, ..., x_k, ...) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, ..., \frac{x_k}{k}, ...)$ adalah operator kompak.

Definisikan $A = I - K$.

Maka $A : l_2 \to l_2$ dengan $A(x_1, x_2, ..., x_k, ...) = (0, \frac{x_2}{2}, \frac{2x_3}{3}, ..., \frac{(k-1)x_k}{k}, ...)$ adalah operator Fredholm (Teorema 4.12).

- Akan dicari subruang tutup X_o dari X sehingga $X = N(A) \oplus X_o$

  $N(A) = \{(x_1, x_2, ..., x_k, ...) \mid x_i = 0, i = 2, 3, 4, ...\}$.

  $\dim N(A) = 1$

  Maka $X_o = \{(0, x_2, ..., x_k, ...)\}$ adalah subruang tutup dari X yang memenuhi $X = N(A) \oplus X_o$.

- Akan dicari subruang berdimensi hingga Y_o dari Y sehingga $Y = R(A) \oplus Y_o$

  $R(A) = \{(x_1, x_2, ..., x_k, ...) \mid x_1 = 0\}$ adalah subruang tutup dari Y.

  Maka Y_o yang dicari adalah $Y_o = \{(x_1, 0, ..., 0, ...)\}$.

  dengan $\dim(Y_o) = 1$.

- Definisikan operator A_o dari Y ke X :

  $$A_o(y) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{jika } y \in Y_o \\ (0, 2y_2, \frac{3x_3}{2}, ..., \frac{kx_k}{k-1}, ...), & \text{jika } y \in R(A) \end{array} \right.$$

  dapat dilihat bahwa:

  a. $A_o \in B(Y,X)$
  b. $N(A_o) = Y_o$.
  c. $R(A_o) = X_{o.}$
  d. $A_0 A = I$ pada X_0.
  e. $AA_0 = I$ pada $R(A)$.
  f. $A_0 A = I - F_1$ pada X

g. $AA_0 = I - F_2$ pada Y

Dengan $F_1(x) = \{ \begin{array}{ll} x, & \text{jika } x \in N(A) \\ 0, & \text{jika } x \in X_o \end{array}$, $F_1 \in B(X)$ dan $R(F_1) = N(A)$,

$$F_2(y) = \{ \begin{array}{ll} y, & \text{jika } y \in Y_o \\ 0, & \text{jika } y \in R(A) \end{array} \text{, } F_2 \in B(Y) \text{ dan } R(F_2) = Y_0$$