HAND OUT
MATA KULIAH TEORI GRAF (MT 424)
JILID SATU

Oleh:

Kartika Yulianti, S.Pd., M.Si.

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA

2008

Minggu ke 1 : - Aplikasi Teori Graf **- Konsep Dasar Graf** **- Representasi Graf**

Aplikasi Graf

- Kompetisi makanan dalam suatu ekologi.
- *The Hollywood Graph.*
- *Round-Robin Tournament.*
- *Call graph.*
- Isomer senyawa kimia karbon.

Definisi Graf

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), ditulis dengan notasi G = (V, E), yang dalam hal ini V adalah himpunan tak kosong dari simpul-simpul (*vertices*), dan E adalah himpunan sisi (*edges* atau *arcs*) yang menghubungkan sepasang simpul.

Himpunan simpul dari graf G ditulis dengan $V(G)$, sedangkan himpunan sisi dari graf G dinyatakan dengan $E(G)$.

Simpul pada graf dapat dinomori dengan huruf, seperti a, b, c, d, ..., dengan bilangan asli 1, 2, 3, ...

Sisi yang menghubungkan simpul u dengan simpul v dinyatakan dengan pasangan (u, v) atau dengan lambang e_1, e_2, e_3, ...

Sebuah sisi dikatakan loop jika sisi tersebut menguhubungkan simpul yang sama. Dengan kata lain e adalah loop, jika e = (v, v). Jika dua buah sisi atau lebih menghubungkan dua simpul yang sama, maka sisi-sisi tersebut dikatakan sisi ganda (*multiple edges* atau *paralel edges*).

Berdasarkan keberadaan loop dan sisi ganda, graf digolongkan menjadi dua jenis:

1. Graf sederhana (*simple graph*) → graf yang tidak mengandung loop dan sisi ganda.
2. Graf tak-sederhana (*unsimple graph*) → graf yang mengandung loop atau sisi ganda.

Berdasarkan orientasi arah, graf dikelompokkan menjadi dua macam, yaitu:

1. Graf tak berarah (*undirected graph*) → graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah.
2. Graf berarah (*directed graph*) → graf yang sisinya mempunyai orientasi arah.

Graf yang dimaksud dalam uraian selanjutnya adalah graf tak-berarah.

<u>Terminologi Dasar</u>

- Dua buah simpul pada graf tak berarah *G* dikatakan **bertetangga** (**berajasen**) bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi. Dengan kata lain, u bertetangga dengan *v* jika (*u*, *v*) adalah sebuah sisi pada graf *G*.
- Untuk sembarang sisi *e* =(*u*, *v*), sisi *e* dikatakan **bersisian** (**berinsiden**) dengan simpul *u* dan simpul *v*.
- **Simpul terpencil** (*isolated vertex*) ialah simpul yang tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya. Atau, dapat juga dinyatakan bahwa simpul terpencil adalah simpul yang tidak satupun bertetangga dengan simpul-simpul lainnya.

Representasi Graf

Graf dapat dinyatakan dengan:

1. Himpunan pasangan berurutan.
2. Diagram.
3. Matriks adjasensi.
4. Matriks insidensi.
5. Daftar ketetanggaan.

Definisi

Sebuah matriks ajasensi A(G) = [a_{ij}] dari graf G didefinisikan dengan

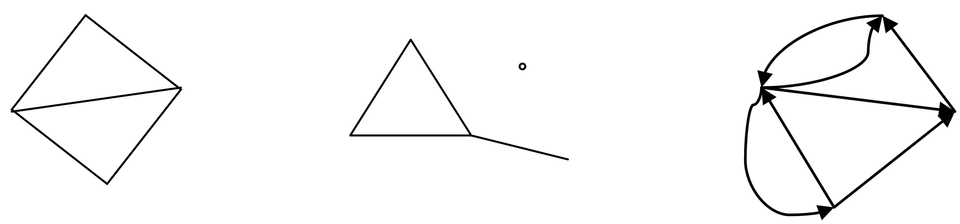
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ jika } (v_i,\ v_j) \in E(G) \\ 0, \text{ jika } (v_i,\ v_j) \notin E(G) \end{cases}$$

Definisi

Matriks insidensi dari sebuah graf tidak berarah G dinyatakan dengan notasi M(G) = [m_{ij}], dimana

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, \quad \text{jika } s\text{isi } i \text{ insiden dengan titik } j \\ 0, \text{ jika } s\text{isi } i \text{ tidak insiden dengan titik } j \end{cases}$$

Representasikan graf berikut ini dalam bentuk lain



Q: bagaimana dengan graf tidak sederhana?

Derajat

Derajat suatu simpul pada graf tak-berarah adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut.

Loop dihitung berderajat dua. Alasan mengapa loop mengkontribusikan dua untuk derajat simpulnya adalah karena loop direpresentasikan sebagai (v, v), dan simpul v berinsiden dua kali pada sisi (v, v).

Lemma persalaman:

$$\sum_{i=1}^{|V(G)|} \deg_G(v_i) = 2|E(G)|$$

Akibat:

Dalam tiap graf, jumlah simpul yang berderajat ganjil adalah genap.

Intermezzo

Pada sebuah rumah hantu, sang hantu akan hanya akan muncul pada ruangan dengan jumlah pintu genap. Kalau rumah tersebut hanya mempunyai satu pintu masuk, buktikan bahwa terdapat sebuah ruangan yang aman dari hantu.

Minggu ke 2 : - Subgraf dan Graf-graf Khusus **- Jalan, Jejak, Lintasan, siklus**

SUBGRAF DAN GRAF-GRAF KHUSUS

Jalan, Jejak, Lintasan, siklus.

Sebuah **jalan (walk)** dalam graf G adalah sebuah urutan tak nol W = $v_0e_1v_1e_2v_2...e_iv_i...e_kv_k$, yang suku-sukunya bergantian antara simpul dan sisi sedemikian hingga $1 \leq i \leq k$, ujung dari e_i adalah v_{i-1} dan v_i.

v_0 disebut simpul awal (simpul asal).

v_k disebut simpul akhir (simpul terminus).

$v_{i,}$ 1 < i < k, disebut simpul internal.

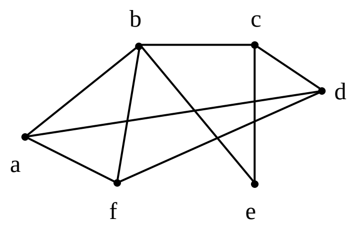
Panjang sebuah jalan adalah banyaknya sisi dalam jalan tersebut.

Jika semua sisi pada sebuah jalan berlainan, maka jalan tersebut disebut **jejak (trail)**. Jejak yang simpul awal dan simpul akhirnya berlainan disebut **jejak tertutup.**

Jika simpul-simpul dari $v_0e_1v_1e_2v_2...e_iv_i...e_kv_k$ dari jalan W berlainan, maka W disebut **lintasan (path)**. Lintasan tertutup dinamakan **siklus**. Siklus dengan banyaknya simpul *n*, dinotasikan dengan C_n.

Siklus : Jejak tertutup yang simpul awal dan simpul internalnya berlainan.

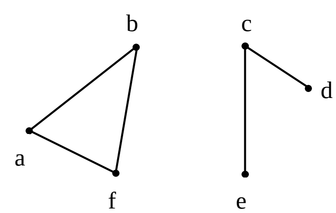
Contoh



G

Berdasarkan graf *G* di samping,

1. Berilah contoh jalan yang bukan jejak.
2. Berilah contoh jejak yang bukan lintasan.
3. Berilah contoh empat buah lintasan yang menghubungkan simpul b dan f.
4. Berilah contoh sirkuit yang bukan siklus.
5. Tentukan semua siklus yang ada di graf *G*.



G1

G1 merupakan contoh graf yang tidak terhubung.

Sebuah graf adalah **terhubung** jika setiap dua buah titik di *G* dihubungkan oleh lintasan di *G*.

Jika *G* adalah graf terhubung, maka dikatakan bahwa komponen dari *G* adalah 1, dinotasikan $\omega(G) = 1$.

Definisikan graf tidak terhubung!

Graf *G* disebut terhubung jika untuk setiap dua simpul yang berbeda terdapat lintasan yang menghubungkan simpul-simpul tersebut.

Sebuah **lintasan geodesic** (*geodesic path*) antara titik *u* dan *v* dari graf *G* adalah lintasan *u*-*v* dengan panjang minimum.

Panjang lintasan geodesic antara simpul *u* dan *v* dinamakan jarak antara simpul *u* dan *v*. Dinotasikan d(*u*, *v*).

Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf. $G_1 = (V_1, E_1)$ adalah **subgraf** dari G jika $V_1 \subseteq V$ dan $E_1 \subseteq E$.

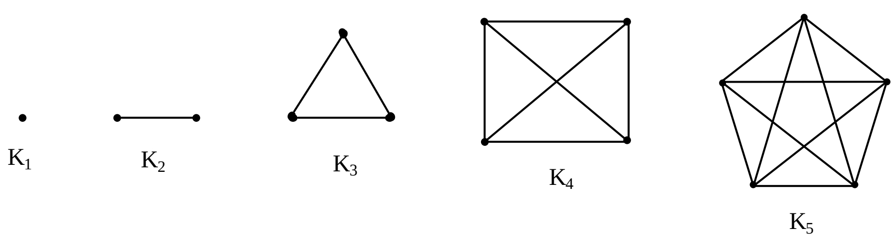
Induced Subgraph.

Spanning subgraph.

Graf Khusus

1. **Graf Nol** : Graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong. Notasinya adalah N_n, yang dalam hal ini n adalah jumlah simpul.
2. Graf G disebut **graf lengkap** jika tiap simpulnya ajasen dengan semua simpul lainnya pada graf tersebut. Notasinya adalah K_n, dengan n adalah banyaknya simpul.

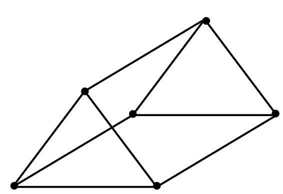
   Banyaknya sisi pada K_n adalah $\binom{n}{2}$.



3. Graf G dikatakan **graf teratur dalam derajat *p*** jika semua simpul pada graf G berderajat p.

   Graf lengkap termasuk dalam graf teratur.

   Jumlah sisi pada graf teratur dalam derajat p adalah $\frac{np}{2}$.



Graf teratur dalam derajat 3.

4. Graf lingkaran (*cycles*)

5. Graf Roda (*Wheels*)
6. Suatu graf *G* disebut **graf bipartit** jika himpunan simpulnya dapat dipisah menjadi dua partisi V_1 dan V_2, sedemikian sehingga setiap sisi di *G* menghubungkan sebuah simpul di V_1 ke sebuah simpul di V_2. Notasinya $G(V_1,V_2)$.

   Apabila setiap simpul di V_1 berajasen dengan semua simpul di V_2, maka $G(V_1,V_2)$ disebut sebagai **graf bipartit lengkap**, dan ditulis sebagai $K_{r,s}$ dimana $r = |V_1|$ dan $s = |V_2|$.

Jika *G* adalah graf sederhana, kita dapat membuat **komplemen** dari *G* dengan mengambil himpunan simpul pada *G* dan menghubungkan dua simpul dengan sebuah sisi jika mereka tak dihubungkan dalam *G*.

Sebuah graf *G* isomorfik dengan graf *H* jika terdapat pemetaan satu-satu *f* demikian sehingga *f* menjaga ajasensi.

Minggu ke 3 :	**- Pohon**
	- Pohon Rentang

POHON.

Definisi:

Misalkan *G* = (*V*, *E*) adalah sebuah graf tak berarah yang tanpa loop. Graf *G* disebut pohon jika *G* merupakan graf terhubung dan tidak mengandung siklus.

Teorema

Misalkan *T* = (*V*, *E*) merupakan sebuah pohon dan misalkan pula bahwa *u* dan *v* merupakan dua simpul yang berlainan dalam *T*. Maka terdapat sebuah lintasan unik yang menghubungkan kedua simpul tersebut.

Teorema

Misalkan *T* adalah sebuah pohon. Maka berlaku $|E(T)| = |V(T)| - 1$.

Teorema

Untuk setiap pohon T = (V, E), jika $|V(T)| \geq 2$, maka T mempunyai paling sedikit 2 simpul yang berderajat satu (*pendant vertices*).

Definisi

Misalkan G adalah sebuah graf terhubung. **Pohon rentang** (*spanning tree*) dalam G adalah graf bagian dari G yang juga merupakan pohon dan memuat semua simpul dari G.

Teorema

Misalkan G adalah graf sederhana. G terhubung jika dan hanya jika G mempunyai sebuah pohon rentang.

Teorema

Misalkan T adalah sebuah pohon rentang dari graf terhubung G dan misalkan e sebagai sisi dari G yang tidak pada T. Maka $T \cup e$ mengandung sebuah siklus unik.

Teorema

Jika e merupakan sebuah pangait (*link*) dari G, maka $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G.e)$.

Keterangan:

$\tau(G)$: banyaknya pohon rentang dari graf G.

$G.e$: graf kontraksi sisi e dari graf G.

Teorema (Rumus Cayley)

$$\tau(K_n) = n^{n-2}$$

Pohon rentang dengan bobot minimum disebut **pohon optimal**. Untuk menentukan pohon optimal dapat digunakan algoritma Kruskal.

Metode untuk menentukan pusat dari sebuah pohon:

Hapuslah semua simpul berderajat satu, bersama-sama dengan semua sisi yang insiden dengan simpul itu. Ulangi proses ini sampai diperoleh sebuah simpul tunggal (**pusat**) atau dua simpul (**dwipusat**) yang dihubungkan dengan sebuah sisi. Pohon yang hanya memiliki sebuah pusat disebut **pohon dengan pusat tunggal**, dan pohon yang mempunyai dua buah simpul pusat dinamakan **pohon dwipusat**.

Minggu ke 4 :
- **Sisi Pemotong**
- **Simpul Pemotong**
- **Graf Euler dan Graf Hamilton**

Definisi Sisi Pemotong

Sebuah sisi pemotong pada graf *G* adalah sebuah sisi *e*, demikian sehingga $\omega(G-e) \geq \omega(G)$, dengan $\omega(G)$ sebagai banyaknya komponen dari *G*.

<u>Teorema</u>

Sebuah sisi *e* pada graf *G* merupakan sisi pemotong jika dan hanya jika *e* termuat dalam nonsiklus dari *G*.

<u>Teorema</u>

Sebuah graf adalah sebuah pohon jika dan hanya jika setiap sisinya merupakan sisi pemotong.

<u>Teorema</u>

Setiap graf terhubung memuat sebuah pohon rentang.

Definisi Simpul Pemotong

Sebuah simpul v pada graf G disebut simpul pemotong jika $E(G)$ dapat dipartisikan kedalam dua himpunan bagian E_1 dan E_2 demikian sehingga $G[E_1]$ dan $G[E_2]$ hanya mempunyai irisan pada simpul v.

Jika G merupakan graf non trivial dan tidak mengandung loop, maka v merupakan simpul pemotong dari G jika dan hanya jika $\omega(G-v) \geq \omega(G)$.

<u>Teorema</u>

Sebuah simpul v pada pohon G merupakan simpul pemotong dari G jika dan hanya jika $\deg(v)>1$.

<u>Teorema</u>

Setiap graf terhubung non trivial yang tanpa loop mempunyai paling sedikit dua simpul yang tidak merupakan simpul pemotong.

Graf Euler dan Graf Hamilton

Masalah penyelidik (*The Explorer's Problem*)

Seorang penyelidik ingin menyelidiki rute di antara sejumlah kota. Dapatkah tournya dilakukan dengan hanya melalui tiap-tiap rute yang tepat satu kali?

Masalah Pelancong (*The Traveller's Problem*)

Seorang pelancong ingin mengunjungi sejumlah kota di sebuah wilayah. Adakah sebuah rute perjalanan demikian sehingga dia dapat mengunjugi tiap kota satu kali?

<u>Definisi</u>

Sebuah graf terhubung G disebut **graf Euler** jika ada jejak tertutup yang memuat semua sisi pada graf G. Jejak demikian dinamakan jejak Euler. Sedangkan jejak yang memuat semua sisi pada graf G dinamakan **jejak semi Euler**.

Definisi

Sebuah graf terhubung *G* disebut **graf Hamilton** jika ada sebuah siklus yang memuat setiap titik dari *G*. Siklus demikian dinamakan siklus Hamilton.

Teorema

Misalkan *G* adalah graf terhubung. maka *G* adalah graf Euler jika dan hanya jika semua titik pada *G* mempunyai derajat genap.

Teorema

Sebuah graf terhubung mempunyai sebuah jejak semi Euler jika dan hanya jika mempunyai tepat dua simpul berderajat ganjil.

Algoritma Fleury digunakan untuk membuat sebuah jejak Euler pada sebuah graf.

Langkah 1 : pilihlah sebuah simpul sebagai simpul awal, misalnya simpul a.

Langkah 2 : laluilah sebuah sisi yang dapat ditelusuri. Pilihlah sebuah jembatan jika tidak ada sisi lain sebagai alternatif yang dapat dilewati.

Langkah 3 : setelah melewati setiap sisi tepat satu kali, hapuslah sisi tersebut, hapus pula simpul yang berderajat nol yang muncul akibat penghapusan sisi tersebut. Kemudian lewatilah sisi lain yang masih tersedia.

Langkah 4 : Stop jika tidak ada sisi lagi. Kalau masih ada sisi yang bisa dilewati, kembalilah ke langkah 2.

Berikut adalah syarat cukup keberadaan graf Hamilton.

Teorema Dirac

Misalkan *G* adalah graf sederhana dalam n titik, dengan $n \geq 3$. Jika $\deg(v) \geq n/2$, untuk setiap titik v, maka *G* adalah graf Hamilton.

Teorema Ore

Misalkan *G* adalah graf sederhana dalam n titik, dengan $n \geq 3$. Jika $\deg(v) + \deg(w) \geq n$, untuk setiap pasang titik *v* dan *w* yang tidak saling ajasen, maka *G* termasuk graf Hamilton.

REFERENSI

1. Bondy, J.A. & Murty, U.S.R. 1977. *Graph Theory With Applications*. London: The Macmillan Press LTD.

2. Buckley, F. & Lewinter, M. 2003. *A Friendly Introduction to Graph Theory*. New-Jersey: Carson Education, Inc.

3. Munir, R. 2005. *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika Bandung.

4. Rosen, Kenneth H. 2003. *Discrete Mathematics and Its Application*. New York: The McGraw-Hill Companies.

5. Kusumah, Y.S., M.Sc., Ph.D.. 1997. *Matematika Diskrit*. Bandung: IKIP Bandung Press.