MASALAH DAN ALTERNATIF JAWABAN
DALAM MATEMATIKA KOMBINATORIK

Masalah 1

Terdapat berapa carakah kita dapat memilih 2 baju dari 20 baju yang tersedia?

<u>Cara 1</u>

Misalkan baju diberi nomor dari 1 sampai dengan 20. Kita daftarkan semua pilihan yang mungkin dengan mengurutkan dari nomor yang paling kecil.

Tabel 1

1, 2				
1, 3	2, 3			
1, 4	2, 4	3, 4		
⋮	⋮	⋮		
1, 20	2, 20	3, 20	…	19, 20
19 cara	18 cara	17 cara		1 cara

$1 + 2 + 3 + \ldots + 19 = \frac{1}{2} \times 19 \times (1 + 19) = 190$.

$\therefore$ Banyaknya cara untuk memilih 2 baju dari 20 baju adalah sebanyak 190 cara.

<u>Cara 2</u>

Untuk pilihan pertama kita dapat memilih 20 baju, dan pilihan kedua terdapat 19 cara kita memilih baju. Berikut adalah daftar pilihan baju.

1, 2	2, 1	…	20, 1
1, 3	2, 3		20, 2
1, 4	2, 4		20, 3
⋮	⋮		⋮
1, 20	2, 20		20, 19

Terdapat 20 × 19 pasangan baju yang dapat dipilih. Tetapi urutan tidaklah kita perhatikan, sehingga setiap dua baju terhitung 2 kali. Sebagai contoh "1, 2" adalah sama dengan "2, 1".

Oleh karena itu, banyaknya cara kita dapat memilih 2 baju dari 20 baju yang tersedia adalah ½ × 20 × 19 = 190 cara.

<u>Cara 3</u>

Menggunakan rumus kombinasi.

$${}_{20}C_2 = \binom{20}{2} = \frac{20 \times 19}{2} = 190 .$$

Masalah 2 Terdapat berapa carakah kita dapat memilih 3 baju dari 20 baju yang tersedia?

<u>Cara 1</u>

Seperti cara 1 pada masalah 1, kita daftarkan pilihan baju yang mungkin dengan mengurutkannya dari nomor yang terkecil.

1, 2, 3	2, 3, 4	3, 4, 5
1, 2, 4	2, 3, 5	3, 4, 6
1, 2, 5	2, 3, 6	3, 4, 7
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1, 19, 20	2, 19, 20	3, 19, 20
Terdapat $\binom{19}{2}$ triple bilangan yang dimulai dengan angka 1.	Terdapat $\binom{18}{2}$ triple bilangan yang dimulai dengan angka 2.	Terdapat $\binom{17}{2}$ triple bilangan yang dimulai dengan angka 3.

$\vdots$

17, 18, 19	18, 19, 20
17, 18, 20	
17, 19, 20	

Terdapat $\binom{3}{2}$ triple bilangan yang dimulai dengan angka 17.	Terdapat $\binom{2}{2}$ triple bilangan yang dimulai dengan angka 18.

Sehingga terdapat $\binom{19}{2}+\binom{18}{2}+\binom{17}{2}+\binom{16}{2}+\ldots+\binom{3}{2}+\binom{2}{2}=1140$ cara untuk memilih 3 baju dari 20 baju yang tersedia.

Cara 2

Seperti cara 2 pada masalah 1, untuk pilihan pertama kita dapat memilih 20 baju, pada pilihan kedua terdapat 19 cara kita memilih baju, dan pada pilihan ketiga terdapat 18 baju tersisa yang dapat dipilih. Maka terdapat 20 × 19 × 18 triple baju yang dapat dipilih. Tetapi urutan tidaklah kita perhatikan, sehingga terdapat 6 pilihan yang memuat isi baju yang sama. Sebagai contoh baju ”1, 2, 3” = ”1, 3, 2” = ”3, 1, 2” = ”3, 2, 1” = ”2, 1, 3” = ”2, 3, 1”. Oleh karena itu banyaknya pilihan tiga baju yang berbeda dari 20 baju yang tersedia adalah $\frac{20\times19\times18}{6}=1140$ cara.

Cara 3

Berdasarkan tabel 1 sudah terdapat 190 pasangan bilangan (baju) yang dapat dipilih dari 20 baju, sekarang kita tinggal menambahkan bilangan ketiga yang belum ada. Sebagai contoh, pada pasangan ”1, 4” ditambahkan bilangan 2, 3, 5, 6, 7, 8, ... 20. Tetapi akan terdapat tiga triple bilangan yang memuat angka yang sama, contohnya ”1, 4, 2” sama dengan ”1, 2, 4” sama dengan ”2, 4, 1”. Sehingga terdapat ½ × 1/3 × 20 × 19 × 18 =1140 cara.

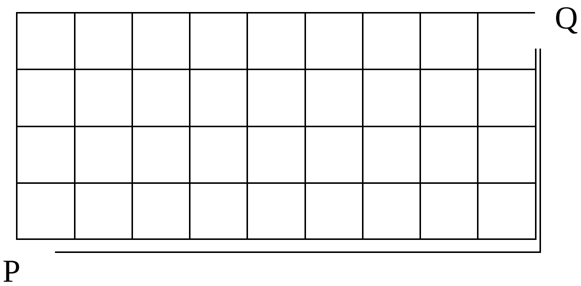
Cara 4

Menggunakan rumus kombinasi.

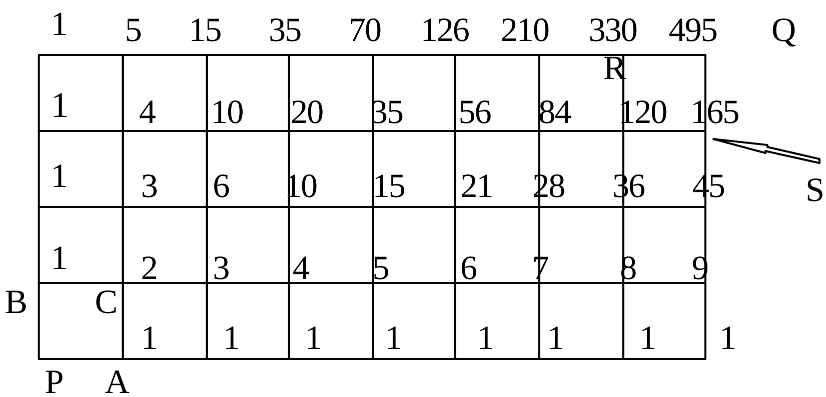
$${}_{20}C_3 = \binom{20}{3}=\frac{20\times19\times18}{2\times3}=1140.$$

Masalah 3

Berdasarkan gambar di samping, jika anda hanya boleh bergerak ke atas atau ke kanan, ada berapa lintasan yang dapat dibuat dari titik P ke titik Q?



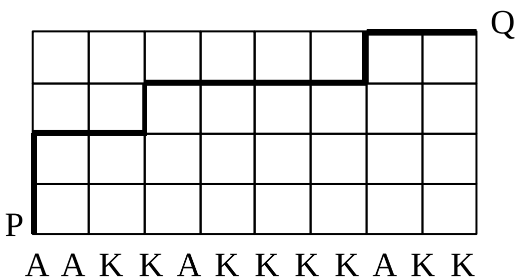
<u>Cara 1</u>

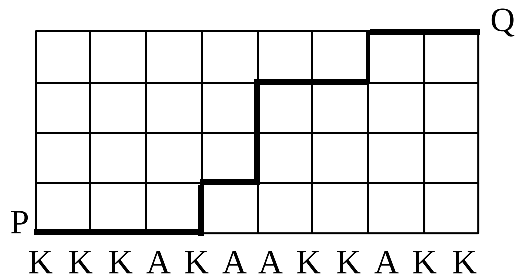


Dari titik P ke titik A terdapat sebuah lintasan, yaitu hanya bergerak ke kanan. Dari titik P ke titik B juga terdapat 1 lintasan. Untuk mencapai titik C terdapat 2 buah lintasan, yaitu melalui titik A dan titik B. Demikian seterusnya, untuk mencapai titik Q dapat melalui titik R dan titik S. Sehingga banyaknya lintasan dari titik P ke titik Q adalah 330 + 165 = 495 lintasan.

<u>Cara 2</u>

Setiap lintasan dari titik P ke titik Q terdiri dari 12 langkah, yaitu 8 langkah ke kanan (K) dan 4 langkah ke atas (A). Rute dari titik P ke titik Q dapat direpresentasikan dengan barisan 8 buah huruf K dan 4 buah huruf A. Sebagai ilustrasi berikut adalah dua buah contoh rute beserta barisan hurufnya.





Oleh karena itu, banyaknya lintasan dari titik P ke titik Q adalah sama dengan banyaknya cara memilih 4 huruf "A" dari 12 huruf yang tersedia (atau banyaknya cara memilih 8 huruf "K" dari 12 huruf), yaitu sebanyak $\binom{12}{4} = 495$ cara.

Secara umum, banyaknya lintasan yang dapat dibuat dari titik P ke titik Q, dimana P dan Q terpisahkan oleh *k* baris dan *m* kolom adalah $\binom{m+k}{k}$.

Masalah 4

Diketahui k dan n adalah bilangan bulat dengan $1 \le k \le n$. Buktikan bahwa

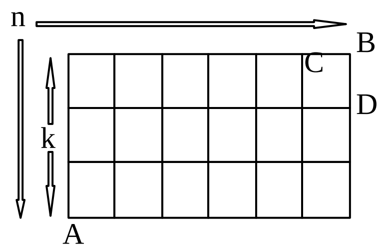
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

<u>Cara 1</u>

Dengan menggunakan definisi faktorial.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \\
&= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} \\
&= \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)!k}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!(n-k+k)}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!n}{k!(n-k)!} \\
&= \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

Cara 2



Gambar …

Berdasarkan gambar …, terdapat $\binom{n}{k}$ buah lintasan yang dapat ditempuh dari titik A ke titik B. Lintasan-lintasan tersebut dibagi menjadi 2 kelompok, yaitu lintasan yang melalui titik C dan melalui titik D. Banyaknya lintasan dari A ke C adalah $\binom{n-1}{k}$ buah lintasan. Sedangkan dari A ke D terdapat $\binom{n-1}{k-1}$ buah lintasan. Sehingga diperoleh $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

Cara 3

$(1 + x)^n = (1 + x)(1 + x)^{n-1}$

Berdasarkan teorema binomial:

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{k}x^k + \ldots + \binom{n}{n}x^n$$

$$(1+x)(1+x)^{n-1} = (1+x)\left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1}x + \ldots + \binom{n-1}{k-1}x^{k-1} + \binom{n-1}{k}x^k + \ldots + \binom{n-1}{n-1}x^{n-1}\right]$$

Koefisien x^k dalam $(1 + x)^n$ adalah $\binom{n}{k}$.

Sedangkan koefisien x^k dalam $(1 + x)(1 + x)^{n-1}$ adalah $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Sehingga $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

Cara 4

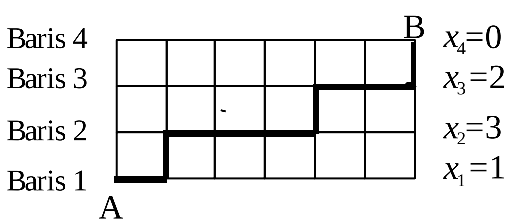
Misalkan S himpunan dengan n objek. Ambil 1 objek, katakan x di S. Kombinasi-k di S dapat dibagi ke dalam dua kelas A dan B. Dalam A kita simpan semua kombinasi-k di S yang tidak memuat x. Dalam B kita simpan yang lainnya, yaitu kombinasi-k di S yang memuat x. Bilangan kombinasi-k di S dalam A sama dengan bilangan kombinasi-k dari (n-1) unsur himpunan S-{x}, dan ini sama dengan $\binom{n-1}{k}$. Bilangan kombinasi-k di S dalam B sama dengan bilangan kombinasi-(k-1) dari (n-1) unsur himpunan S-{x}, dan ini sama dengan $\binom{n-1}{k-1}$. Oleh karena itu, diperoleh $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

Masalah 5

Ada berapa banyak solusi dari $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$, dimana $x_i \in$ bilangan cacah, untuk i = 1, 2, 3, 4.

Cara 1

Masalah tersebut dapat direpresentasikan dengan pemilihan banyaknya lintasan dari titik A ke titik B dalam kotak yang terdiri dari 6 kolom dan 4 baris. Representasi dari banyaknya langkah dalam baris ke-i adalah menunjukkan nilai x_i. Sebagai ilustrasi diberikan contoh berikut:



Sehingga banyaknya solusi adalah $\binom{9}{3} = 84$.

Cara 2

Masalah 4 dapat dimodelkan dengan banyaknya cara kita mendistribusikan 6 buah ”X” dalam 4 ruang. Sekat sebagai pemisah ruang dinotasikan dengan ”|”. Banyaknya ”X” di sebelah kiri sekat ke-*i* menunjukkan nilai x_i (untuk i = 1, 2, 3), sedangkan nilai x_4 dinyatakan dengan banyaknya ”X” di sebelah kanan sekat ke-3.

Ruang 1		Ruang 2		Ruang 3		Ruang 4
X X	|	X X	|	X	|	X
$x_1 = 2$		$x_2 = 2$		$x_3 = 1$		$x_4 = 1$

Oleh karena itu, permasalahan tersebut sama juga dengan masalah banyaknya cara kita dapat menempatkan tiga buah ”|” dalam 9 posisi, yaitu sebanyak $\binom{9}{3} = 84$.

Secara umum banyaknya solusi dari $x_1 + x_2 + x_3 + x_k = n$, dimana $x_i \in$ bilangan cacah, untuk i = 1, 2, ... , k adalah $\binom{n+k-1}{k-1}$.

Masalah 6

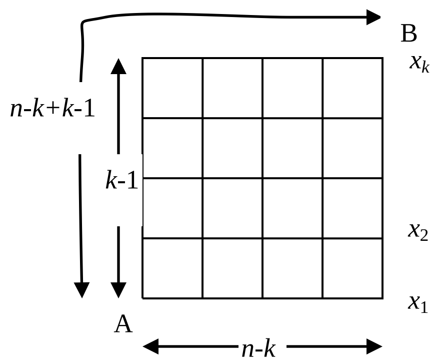
Terdapat *n* orang dalam suatu antrian yang akan masuk ke bioskop. Mereka masuk ke`dalam bioskop dalam *k* rombongan, dimana setiap rombongan terdiri dari satu orang atau lebih. Dalam berapa carakah *k* rombongan tersebut dapat dibentuk?

Cara 1

Permasalahan tersebut dapat dimodelkan dengan mencari banyaknya solusi dari persamaan

$$x_1 + x_2 + ... + x_k = n, \quad x_i \geq 1, \quad i = 1,2,..., k$$

dan sama juga dengan mencari banyaknya lintasan dari titik A ke titik B pada gambar...



Gambar ...

Berdasarkan ilustrasi gambar ..., banyaknya lintasan yang dapat dibuat dari titik A ke titik B adalah $\binom{n-k+k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$ buah lintasan.

Oleh karena itu, rombongan yang dapat dibentuk dari n orang adalah sebanyak $\binom{n-1}{k-1}$ cara.

<u>Cara 2</u>

Misalkan "X" adalah simbol untuk orang, dan dua buah rombongan dipisahkan oleh sekat "|".

$$\underbrace{X \mid X \mid X \quad X \mid X \quad X}_{\text{n orang}}$$

Untuk menciptakan k rombongan diperlukan k-1 buah sekat. Karena setiap rombongan paling tidak terdiri dari 1 orang, maka sekat ditempatkan pada n-1 buah sela-sela. Banyaknya cara menempatkan k-1 buah sekat pada n-1 sela-sela adalah $\binom{n-1}{k-1}$.

$\therefore$ Rombongan yang dapat dibentuk dari n orang adalah sebanyak $\binom{n-1}{k-1}$ cara.