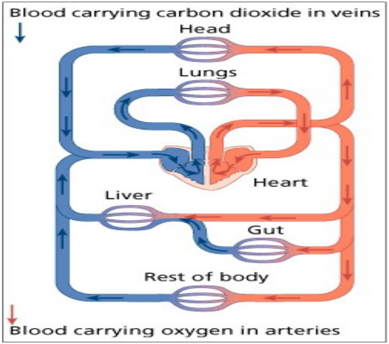
MODEL DIFUSI OKSIGEN DI JARINGAN TUBUH

Kartika Yulianti, S.Pd., M.Si.

Pembimbing:
Dr. Agus Yodi Gunawan

14 Juli 2009

Pendahuluan



Sistem Peredaran darah.

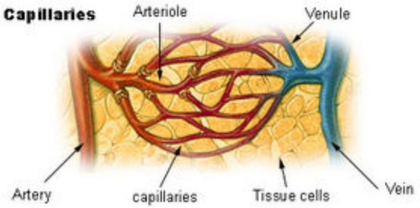
Jantung → Arteri → Pembuluh kapiler → Vena → Jantung → Arteri Pulmonari → Paru-paru → Vena Pulmonari.

- Oksigen memegang peranan penting bagi kelangsungan metabolisme jaringan (*tissue*) dalam tubuh.
- Jika sel-sel di suatu jaringan tidak mendapat pasokan oksigen, maka sel-sel tersebut akan mati dan dapat menimbulkan kerusakan jaringan.
- *Circulatory shock*: kehilangan darah dalam jumlah besar, serangan jantung, serta penurunan tekanan darah dengan tajam.

Tujuan:
Membangun suatu model matematika yang menggambarkan proses penyebaran konsentrasi oksigen di suatu jaringan tubuh.

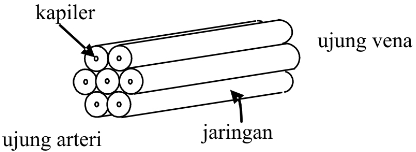
Pemodelan
Pembuluh Kapiler

Pembuluh kapiler: tersusun dari sebuah lapisan sel (endothelium). Molekul-molekul seperti oksigen, karbon dioksida, dan air dapat melalui dinding ini dan memasuki jaringan dengan cara difusi.



Pembuluh Darah (www.wikipedia.com).

Model *Krogh Cylinder*

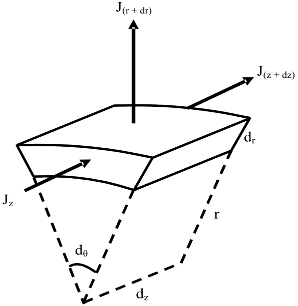


- Representasi dari daerah kapiler-jaringan: konsep pengulangan struktur satuan.
- Setiap kapiler bertanggungjawab untuk menyediakan nutrisi bagi jaringan yang melingkupi kapiler tersebut.

Asumsi:

- Bukan daerah percabangan.
- Reaksi kimia yang terjadi di jaringan berdistribusi secara kontinu.
- Simetri terhadap sumbu.
- Laju perpindahan material pada dinding luar jaringan adalah nol.

Penurunan Persamaan Difusi



Banyaknya molekul oksigen yang mengalir pada titik x di suatu permukaan A per satuan waktu adalah $J(x)A$.
Volume satuan: $dV \approx rd\theta dzdr$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\tilde{c}dV)}{\partial\tilde{t}} &= J\tilde{r}d\theta d\tilde{r}|_{\tilde{z}} - J\tilde{r}d\theta d\tilde{r}|_{\tilde{z}+d\tilde{z}} + J\tilde{r}d\theta d\tilde{z}|_{\tilde{r}} - \\ & \quad J(\tilde{r}+d\tilde{r})d\theta d\tilde{z}|_{\tilde{r}+d\tilde{r}} - g(\tilde{c})dV.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde{c}}{\partial\tilde{t}} &= \frac{J|_{\tilde{z}} - J|_{\tilde{z}+d\tilde{z}}}{d\tilde{z}} + \frac{\tilde{r}J|_{\tilde{r}} - (\tilde{r}+d\tilde{r})J|_{\tilde{r}+d\tilde{r}}}{\tilde{r}d\tilde{r}} - g(\tilde{c}) \qquad (1)\\ &= -\frac{\partial J}{\partial\tilde{z}} - \frac{\partial(\tilde{r}J)}{\tilde{r}\partial\tilde{r}} - g(\tilde{c}). \qquad (2)\end{aligned}$$

Hukum Fick:

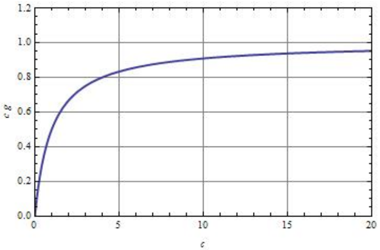
$$J = -D_j\frac{d\tilde{c}}{d\tilde{r}}$$

$$\frac{\partial\tilde{c}}{\partial\tilde{t}} = D_j\left(\frac{\partial^2\tilde{c}}{\partial\tilde{z}^2} + \frac{1}{\tilde{r}}\frac{\partial\tilde{c}}{\partial\tilde{r}} + \frac{\partial^2\tilde{c}}{\partial\tilde{r}^2}\right) - g(\tilde{c}). \qquad (3)$$

Laju Konsumsi Oksigen

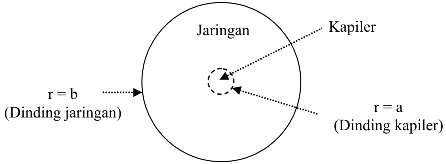
$$g(\tilde{c}) = \frac{A\tilde{c}}{B + \tilde{c}}.$$

Parameter A : kecepatan maksimum oksigen bereaksi dengan enzim.
Parameter B : koefisien kesetimbangan reaksi.



Grafik Michaelis-Menten dengan A=1, B=1.

Syarat Batas



$$\frac{\partial \tilde{c}}{\partial \tilde{r}}(b) = 0. \quad (4)$$

$$\tilde{c}(\tilde{r}, 0) = c_a. \quad (5)$$

$$\tilde{c}(a, \tilde{t}) = f(\tilde{t}). \quad (6)$$

$$\tilde{c}(a, \tilde{t}) = \begin{cases} \frac{c_i - c_a}{\varepsilon}\tilde{t} + c_a, & 0 \leq \tilde{t} < \varepsilon; \\ c_i, & \tilde{t} \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Kajian Model

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_j\left(\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial c}{\partial r}\right) - g(c)$$

Michaelis-Menten

Keadaan Tunak

Linier

Keadaan Tidak Tunak

Konstan

- Karena $b \ll l$ maka difusi dalam arah aksial diabaikan.

Model *steady state*:

$$D_j\left(\frac{1}{\tilde{r}}\frac{\partial\tilde{c}}{\partial\tilde{r}}+\frac{\partial^2\tilde{c}}{\partial\tilde{r}^2}\right)=\frac{A\tilde{c}}{B+\tilde{c}},\qquad a\leq\tilde{r}\leq b. \tag{7}$$

$$\tilde{c}(a)=c_i,\qquad \frac{\partial\tilde{c}}{\partial\tilde{r}}(b)=0. \tag{8}$$

$\tilde{c}$ adalah konsentrasi oksigen, sehingga haruslah $\tilde{c}\geq 0$. Oleh karena itu, kita asumsikan ruas kanan dari persamaan (7) adalah nol untuk $\tilde{c}<0$.

Penskalaan:

$$\tilde{c}=c_a c,\qquad \tilde{r}=ar, \tag{9}$$

$$\frac{1}{r}\frac{dc}{dr}\left(r\frac{dc}{dr}\right) = \frac{\lambda c H(c)}{\alpha+c},\qquad 1\leq r\leq\frac{b}{a} \tag{10}$$

$$c(1) = \widehat{c}_1,\qquad \frac{dc}{dr}\left(\frac{b}{a}\right)=0, \tag{11}$$

dimana $\lambda=\frac{Aa^2}{D_j c_a},\alpha=\frac{B}{c_a}$, $\widehat{c}_1=\frac{c_i}{c_a}$, dan H adalah fungsi Heaviside.

Kasus $\alpha \to 0$ dan $\lambda = O(1)$.
Misalkan c mempunyai perluasan:

$$c(r;\alpha) = c_0(r) + \alpha c_1(r) + O(\alpha^2). \tag{12}$$

$$\frac{1}{r}\left(rc_0'\right)' + \alpha\frac{1}{r}\left(rc_1'\right)' + O(\alpha^2) = \frac{\lambda c}{\alpha + c} = \lambda - \frac{\alpha\lambda}{c_0} + O(\alpha^2). \tag{13}$$

Untuk $O(1)$:

$$\frac{1}{r}\left(rc_0'\right)' = \lambda, \tag{14}$$

dengan $c_0'(\frac{b}{a}) = 0, c_0(1) = \widehat{c}_i$. Sehingga

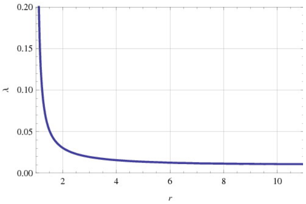
$$c_0'(r) = \frac{\lambda r}{2} + \frac{K_1}{r}. \tag{15}$$

Jika c_0 aproksimasi yang valid untuk seluruh r, berlaku $c_0'(\frac{b}{a}) = 0$, sehingga diperoleh $K_1 = -\frac{\lambda b^2}{2a^2}$.

$$c_0(r) = \widehat{c}_i - \lambda\left(\frac{b^2}{2a^2}\ln r - \frac{r^2-1}{4}\right). \tag{16}$$

$c \geq 0$ maka $c_0 \geq 0$.
c_0 akan bernilai positif jika dan hanya jika

$$\lambda < \frac{\widehat{c}_i}{\frac{b^2}{2a^2}\ln r - \frac{r^2-1}{4}}. \tag{17}$$



Hubungan λ dan r
untuk $\frac{b}{a} = 11$ dan $\widehat{c}_i = 1.25$.

Untuk $\frac{b}{a} = 11$, dan $\widehat{c}_i = 1.25$
$c_0 \geq 0$ jika $\lambda < 0.0108627$.
Jika $\lambda > 0.0108627$, maka c_0 mempunyai akar: r_1. Sehingga tidak berlaku $c_0'(\frac{b}{a}) = 0$.
Untuk $r < r_1$, berlaku:

$$c_0(r) = \frac{\lambda}{4} r^2 + K_1 \ln r + \widehat{c}_i - \frac{\lambda}{4}. \tag{18}$$

Untuk $r \geq r_1$, $c(r) = 0$.
Asumsikan $0 \leq c \leq O(\alpha)$.
Penskalaan $c = \alpha^n \bar{c}$, $n \geq 1$. Persamaan (10) menjadi:

$$\alpha \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\left(r \frac{d\bar{c}}{dr} \right) = \frac{\lambda \bar{c}}{1 + \alpha^{n-1} \bar{c}}. \tag{19}$$

Karena $\alpha \to 0$ maka dengan $n \geq 1$, setiap ekspansi $\bar{c}(r; \alpha) = \bar{c}_0(r) + ..., r \geq r_1$ akan memberikan $c = 0$.

Akan dicari akar r_1 dan K_1.
Misalkan

$$c = \alpha^n \psi, \qquad r = r_1 + \alpha^m \xi. \tag{20}$$

Substitusi dan Distinguished Limit, diperoleh: $c = \alpha\psi, r = r_1 + \sqrt{\alpha}\xi$.
Matching Condition.
Jika $\xi \to \infty$, maka $\psi \to 0$.
Jika $\xi \to -\infty$, maka $\psi \to c_0(r)$.

$$c_0(r) = c_0(r_1) + (r - r_1)c_0'(r_1) + \frac{1}{2}(r - r_1)^2 c_0''(r_1) + \ldots \quad (21)$$

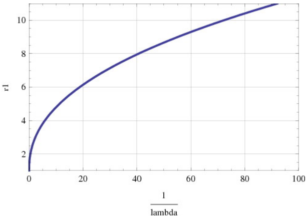
$$= \sqrt{\alpha}\xi c_0'(r_1) + \frac{1}{2}\alpha\xi^2 c_0''(r_1) + \ldots \quad (22)$$

$$\simeq \alpha\psi(\xi). \quad (23)$$

Diperoleh $c_0'(r_1) = 0$.

$K_1 = -\frac{\lambda r_1^2}{2}$.

$$c_0(r) = \widehat{c}_i - \lambda\left(\frac{r_1^2}{2}\ln r - \frac{r^2 - 1}{4}\right). \quad (24)$$



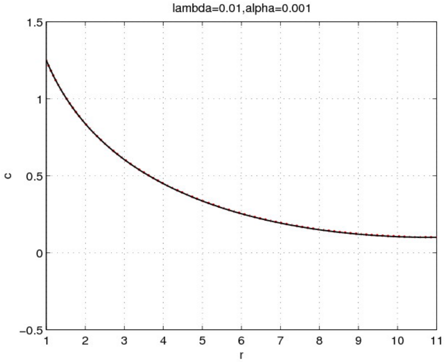
Grafik r_1 terhadap $\frac{1}{\lambda}$ untuk $\widehat{c}_i = 1.25$.

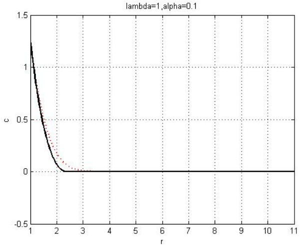
$c_0(r)$ untuk $\lambda \leq 0.0108627$ adalah:

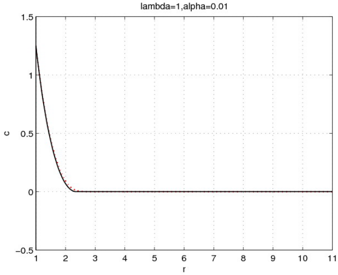
$$c_0(r) = \widehat{c}_i - \lambda\left(\frac{b^2}{2a^2}\ln r - \frac{r^2-1}{4}\right), \tag{25}$$

dan untuk $\lambda \geq 0.0108627$ adalah:

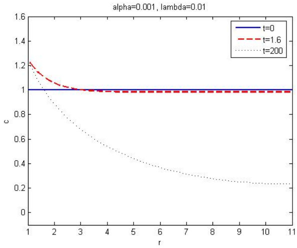
$$c_0(r) = \begin{cases} \widehat{c}_i - \lambda\left(\frac{r_1^2}{2}\ln r - \frac{r^2-1}{4}\right), & \text{jika } 1 \leq r < r_1; \\ 0, & \text{jika } r_1 < r \leq \frac{b}{a}. \end{cases}$$

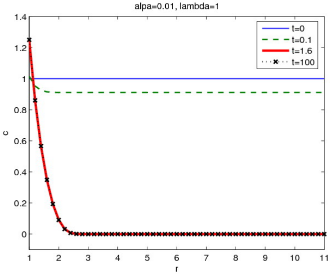

lambda=0.01,alpha=0.001
1.5
1
0.5
0
−0.5
c
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
r


lambda=1,alpha=0.1
c
r


lambda=1,alpha=0.01
c
r

Solusi *Unsteady State*





Kesimpulan

Nilai λ yang merepresentasikan perbandingan laju konsumsi terhadap penyediaan oksigen, memegang peranan penting dalam ketersediaan oksigen di daerah jaringan.

Jika $\lambda \to 0$, nilai konsentrasi oksigen tidak akan mencapai nilai nol dalam waktu tak hingga.

Sedangkan jika $\lambda = O(1)$, nilai konsentrasi oksigen di jaringan akan mencapai nilai nol dalam waktu yang berhingga.

Daftar Pustaka

(1) Carslaw, H.S. dan Jaeger, J.C. 1959. *Conduction Of Heat In Solids*. New York. Oxford Clarendon Press.

(2) Holmes, Mark H. 1995. *Introduction to Perturbation Method*. New York. Springer-Verlag.

(3) Mathews, John H. dan Fink, Kurtis D. 1999. *Numerical Methods Using Matlab*. London. Prentice-Hall International.

(4) Middleman, Stanley. 1972. *Transport Phenomena in the Cardiovascular System*. New York. John-Wiley & Sons, Inc.

(5) Poulikakos. 1994. *Conduction Heat Transfer*. New Jersey. Prentice-Hall.

(6) Ross, J. 1996. *Role of Blood Vessel*. Tersedia di *http : //classes.tmcc.edu/eburke/other − notes/Blood − Vessel.htm*.

(7) http://www. wikipedia.com.

Terima Kasih