Eyus Sudihartinih
(NIM 0706634)
Proses Berfikir Matematika

1. Pertanyaan:

Pythagoras dan Babylonians mempunyai formula tripel adalah sebagai berikut.

$(2m, m^2-1, m^2+1)$, untuk $m > 1$.

Buktikan! Dan buatlah contohnya!

Solusi:

Dik: tripel Pythagoras $(2m, m^2-1, m^2+1)$. Andaikan $2m$ dan $m^2 - 1$ sebagai sisi siku-sikunya

Dit: Buktikan bahwa hypotenusanya adalah $m^2 + 1$

Jawab:

$(2m)^2 + (m^2 - 1)^2 = 4m^2 + m^4 - 2m^2 + 1$

$= m^4 + 2m^2 + 1$

$= (m^2 + 1)^2$ … terbukti.

Contoh:

$m = 2$ maka $2m = 4$, $m^2 - 1 = 3$, $m^2 + 1 = 5$ sehingga tripelnya $(4, 3, 5)$

$m = 3$ maka $2m = 6$, $m^2 - 1 = 8$, $m^2 + 1 = 10$ sehingga tripelnya $(6, 8, 10)$

$m = 4$ maka $2m = 8$, $m^2 - 1 = 15$, $m^2 + 1 = 17$ sehingga tripelnya $(8, 15, 17)$

2. Pertanyaan:

Carilah nilai m dan n yang bulat postif sedemikian hingga bentuk $m^2 - n^2$, $2mn$ dan $(mn)^2$ merupakan tripel phytagoras. Dimana $(mn)^2$ bertindak sebagai hipotenusa dari segitiga siku-siku tersebut.

Solusi:

Dik: $m^2 - n^2$ dan $2mn$ sebagai sisi siku-sikunya dan hypotenusanya adalah $(mn)^2$

Dit: m dan n

Jawab:

$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (mn)^4$

$m^4 + n^4 - 2m^2n^2 + 4m^2n^2 = (mn)^4$

$m^4 + n^4 + 2m^2n^2 = (mn)^4$

$(m^2 + n^2)^2 = ((mn)^2)^2$ menjadi $m^2 + n^2 = (mn)^2$ Akibatnya $0 = -m^2 - n^2 + (mn)^2$, Maka $1 = (m^2 - 1)(n^2 - 1)$

Sehingga tidak ada bilangan bulat positif yang memenuhi m dan n.

3. Pertanyaan:

Jika (a, b, c) adalah tripel Pythagoras, maka (ka, kb, kc) juga merupakan tripel Pythagoras, di mana $k \in z^+$. Berikan contohnya.

Solusi:

Dik: $a^2 + b^2 = c^2$

Dit: buktikan $(ka)^2 + (kb)^2 = (kc)^2$

Jawab:

$$\begin{aligned}(ka)^2 + (kb)^2 &= k^2 a^2 + k^2 b^2 \\ &= k^2 (a^2 + b^2) \\ &= k^2 c^2 \\ &= (kc)^2 \text{ ... terbukti.}\end{aligned}$$

Contoh:

$(3, 4, 5)$ adalah tripel Pythagoras maka $(33, 44, 55)$, $(333, 444, 555)$, $(3333, 4444, 5555)$, $(33333, 44444, 55555)$, dst juga tripel Pythagoras

4. Pertanyaan:

Andaikan (a, b, c) adalah tripel Pythagoras. Jika salah satu dari a, b adalah ganjil maka c juga ganjil.

Solusi:

Dik: (a, b, c) tripel Pythagoras. Dan salah satu dari a, b adalah ganjil.

Dit: buktikan c juga ganjil.

Jawab:

Misal: bilangan ganjil = 2r + 1

Bilangan genap = 2r di mana $\forall\ r \in z^+$

Sehingga,

$$\begin{aligned}(2r + 1)^2 + (2r)^2 &= 4r^2 + 4r + 1 + 4r^2 \\ &= \mathbf{2(4r^2 + 2r) + 1} \quad \text{yang merupakan bilangan ganjil}\end{aligned}$$

Jadi, terbukti jika salah satu dari a, b adalah ganjil maka c juga ganjil.

5. Pertanyaan:

Buktikan bahwa tripel Pythagoras dapat dihitung menggunakan formula: $2xy = z^2$, x,y,z > 0 dan $\forall z \in 2Z^+$ di mana memenuhi persamaan berikut.

$x = c - b$, $y = c - a$, $z = a + b - c$ dan $a = x + z$, $b = y + z$, $c = x + y + z$ dan $r = z/2$, dengan (a,b,c) adalah tripel Pythagoras and r adalah jari-jari lingkaran.

Serta x dan y adalah faktor-faktor dari $z^2 / 2$.

Solusi:

Dik: (a,b,c) adalah tripel Pythagoras dengan ketentuan di atas.

Dit: bukti dari formula di atas.

Jawab:

Karena $2xy = z^2$ maka $z = \sqrt{2xy}$

Sehingga, $a^2 + b^2 = (x + z)^2 + (y + z)^2$

$$= (x + \sqrt{2xy})^2 + (y + \sqrt{2xy})^2$$

$$= x^2 + 2x\sqrt{2xy} + 2xy + y^2 + 2y\sqrt{2xy} + 2xy$$

$$= x^2 + y^2 + 2xy + 2x\sqrt{2xy} + 2y\sqrt{2xy} \qquad \ldots (1)$$

Sedangkan $c^2 = (x + y + z)^2$

$$= (x + y + \sqrt{2xy})^2$$

$$= x^2 + y^2 + 2xy + 2x\sqrt{2xy} + 2y\sqrt{2xy} \qquad \ldots (2)$$

Dari (1) dan (2) terlihat bahwa $a^2 + b^2 = c^2$, sehingga formula di atas terbukti.

Contoh:

Pilih $z = 6$. Maka $z^2 / 2 = 18$. tiga faktor dari 18 adalah: (18, 1), (2, 9), dan (6, 3). Semua faktor itu menghasilkan tripel Pythagoras berikut.

$z = 6$, $x = 18$, $y = 1$ menghasilkan tripel $a = 18 + 6 = 24$, $b = 1 + 6 = 7$, $c = 18 + 1 + 6 = 25$.

$z = 6$, $x = 2$, $y = 9$ menghasilkan tripel $a = 2 + 6 = 8$, $b = 9 + 6 = 15$, $c = 2 + 9 + 6 = 17$.

$z = 6$, $x = 6$, $y = 3$ menghasilkan tripel $a = 6 + 6 = 12$, $b = 3 + 6 = 9$, $c = 6 + 3 + 6 = 15$.

Eyus Sudihartinih
(NIM 0706634)
Proses Berfikir Matematika

6. Pertanyaan:

Adakah tripel Pythagoras yang terdiri dari bilangan ganjil semuanya?

Solusi:

Andaikan (a, b, c) adalah tripel Pythagoras dengan $a = 2p + 1$ dan $b = 2q + 1, \ \forall p, q \in z^+$.

Maka $a^2 + b^2 = (2p+1)^2 + (2q+1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 + 4q^2 + 4q + 1 = 2(2p^2 + 2p + 2q^2 + 2q + 1)$ $\in 2z^+$.

Jadi, tidak ada tripel Pythagoras yang terdiri dari bilangan ganjil semuanya.

7. Pertanyaan:

Buktikan bahwa formula dari m, n $\in z^+$ dan tripel Pythagorasnya

$m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2$ dengan $m > n$

Solusi:

$$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = m^4 + n^4 - 2m^2n^2 + 4m^2n^2$$
$$= m^4 + n^4 + 2m^2n^2$$
$$= (m^2 + n^2)^2, \ m > n \ \ldots \text{(terbukti)}$$

Contoh:

$m = 2, n = 1$ maka $m^2 - n^2 = 3, 2mn = 4, m^2 + n^2 = 5$ sehingga tripelnya $(3, 4, 5)$

$m = 3, n = 2$ maka $m^2 - n^2 = 5, 2mn = 12, m^2 + n^2 = 13$ sehingga tripelnya $(5, 12, 13)$

$m = 4, n = 1$ maka $m^2 - n^2 = 15, 2mn = 8, m^2 + n^2 = 17$ sehingga tripelnya $(15, 8, 17)$

8. Pertanyaan:

Andaikan (a, b, c) merupakan tripel Pythagoras. Apakah ($a \bmod m, b \bmod m, c \bmod m$) merupakan tripel Pythagoras juga?

Solusi:

Misal, $a \bmod m = a - k.m$, $b \bmod m = b - k.m$, $c \bmod m = c - k.m$

Maka, $(a\text{-}km)^2 + (b\text{-}km)^2 = a^2 - 2akm + (km)^2 + b^2 - 2bkm + (km)^2$

$$= a^2 + b^2 - 2(a+b)km + 2(km)^2 \quad ...(1)$$

Sedangkan, $c \bmod m = (a^2 + b^2) \bmod m = (a^2 + b^2) - km \quad ...(2)$

Dari (1) dan (2) dapat diketahui bahwa (a mod m, b mod m, c mod m) bukan tripel Pythagoras.

Contoh:

(12, 16, 25) adalah tripel Pythagoras, tapi (*12 mod 10, 16 mod 10, 25 mod 10)* bukan tripel.

9. Pertanyaan:

Jika (a, b, c) adalah tripel Pythagoras, maka $(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k})$ juga merupakan tripel Pythagoras, di mana $k \in R^+$.

Solusi:

Dik: $a^2 + b^2 = c^2$

Dit: buktikan $(\frac{a}{k})^2 + (\frac{b}{k})^2 = (\frac{c}{k})^2$

Jawab:

$$(\frac{a}{k})^2 + (\frac{b}{k})^2 = \frac{a^2}{k^2} + \frac{b^2}{k^2}$$

$$= \frac{a^2 + b^2}{k^2}$$

$$= \frac{c^2}{k^2} \qquad ...terbukti$$

10. Pertanyaan:

Buktikan bahwa daftar bilangan berikut memenuhi tripel Pythagoras.

99	**20**	**101**
9999	**200**	**10001**
999999	**2000**	**1000001**
99999999	**20000**	**100000001**

Eyus Sudihartinih
(NIM 0706634)
Proses Berfikir Matematika