Eyus Sudihartinih
Tugas MK Geometri

Postulat Paralel Euclid

Melalui suatu titik A yang tidak terletak pada garis m, terdapat paling banyak satu garis yang akan melalui A dan paralel terhadap m.

Konvers Teorema Sudut Dalam Berseberangan

Jika terdapat dua garis yang paralel yang dipotong oleh garis ke-3, maka akan terdapat sepasang sudut dalam berseberangan yang kongruen.

Soal:

Buktikan bahwa **postulat paralel Euclid ekuivalen dengan konvers teorema sudut dalam berseberangan.**

Jawab:

i. Bagian pertama (pembuktian bahwa **postulat paralel Euclid** $\Rightarrow$ **konvers teorema sudut dalam berseberangan)**

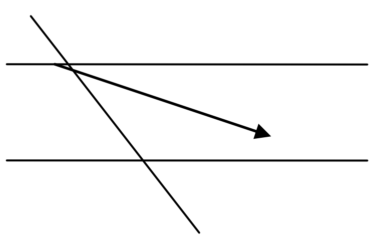
Disumsikan bahwa postulat paralel euclid **benar** dan akan digunakan untuk membuktikan bahwa,

"Jika dua garis paralel dipotong oleh garis ketiga, maka sudut dalam yang berseberangan akan kongruen".

Dik: 1. l sejajar dengan m

2. t memotong l dan m, sehingga membentuk sudut dalam berseberangan (misalakan $\angle 1$ dan $\angle 2$)

Akan ditunjukkan bahwa $\angle 1 \cong \angle 2$)



Langkah-langkah penbuktian:

1. Misalkan diambil suatu kontradiksi, di mana $\angle 1$ dan $\angle 2$ tidak kongruen dan $\angle 1 < \angle 2$
2. Buat sinar B yang melewati C sehingga $\angle ABC \cong \angle 2$
3. Berdasarkan teorema sudut dalam berseberangan, BC sejajar dengan m dan BC $\neq$ l
4. Berarti diperoleh 2 garis yang melewati B dan sejajar dengan m
5. Ini bertentangan dengan postulat paralel euclid

$\therefore$ Jika l sejajar dengan m pastilah akan terbentuk sepasang sudut dalam berseberangan yang kongruen

ii. Bagian kedua (pembuktian bahwa **konvers teorema sudut dalam berseberangan** $\Rightarrow$ **postulat paralel Euclid)**

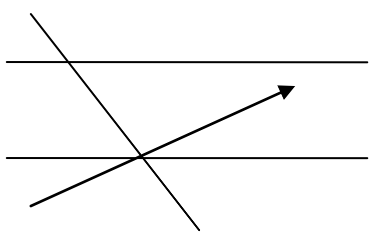
Diasumsikan bahwa konversi dari teorema sudut dalam berseberangan **benar** dan akan digunakan untuk membuktikan kebenaran postulat paralel Euclid.

Dik: 1. l sejajar dengan m

2. t memotong l dan m, pada titik yang berbeda misalakan B dan A dan membentuk sepasang sudut dalam berseberangan $\angle 1$ dan $\angle 2$

3. $\angle 1$ dan $\angle 2$ kongruen atau $\angle 1 \cong \angle 2$

Akan dibuktikan bahwa paling banyak terdapat 1 garis yang melewati a dan paralel dengan m.



Langkah-langkah pembuktian:

1. Andaikan terdapat garis n yang melalui A, di mana n$\neq$ m
2. Maka terdapat $\angle 3$ dan $\angle 4$, di mana $\angle 3 + \angle 4 = 180^0$
3. Sementara, $\angle 1 + \angle 4 < 180^0$
4. Sehingga $\angle 1 < \angle 3$
5. Ini tidak mungkin, karena bertolak belakang dengan asumsi awal, yaitu "dari 2 buah garis yang paralel dapat dibuat sepasang sudut dalam yang berseberangan" sehingga seharusnya $\angle 1 \cong \angle 2$

$\therefore$ Dengan kata lain, selain garis m, tidak ada lagi garis yang melewati A dan paralel dengan l

Dari i dan ii diperoleh kesimpulan bahwa **postulat paralel Euclid ekuivalen dengan konvers teorema sudut dalam berseberangan.**

Eyus Sudihartinih
Tugas MK Geometri

Soal:

Suatu tulisan pada papyrus Mesir adalah sebagai berikut:

"Jika kepada Anda diceritakan bahwa suatu paramida terpancung memiliki tinggi 6, sisi alas 4, dan sisi atas 2".

Jika Anda kuadratkan 4 hasilnya adalah 16.

Jika Anda kalikan 4 dengan 2 hasilnya adalah 8.

Jika Anda kuadratkan 2 hasilnya adalah 4.

Jika Anda tambahkan 16 dengan 8 dan tambahkan 4 hasilnya 28.

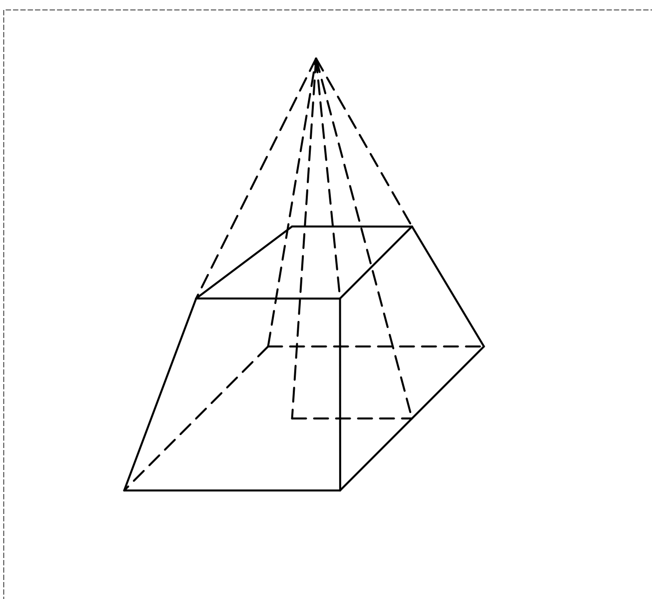
Jika Anda kalikan 6 dengan $\frac{1}{3}$ hasilnya adalah 2.

Jika Anda kalikan 2 dengan 28 hasilnya adalah 56.

Periksa bahwa hasilnya 56 ! Rumus apa yang dipakai? Tuliskan rumus yang mengandung variabel untuk ukuran paramida terpancung !

Jawab:

i. Akan ditunjukan bahwa hasilnya 56.



Gambar 1.a

Berdasarkan gambar 1.a diperoleh,

Δ TPI $\sim$ Δ TOJ, karena $\angle$PTI = $\angle$OTJ

$\angle$TPI = $\angle$TOJ = 90^0

$\angle$TIP = $\angle$TJO

Sehingga,

$$\frac{TP}{TO} = \frac{PI}{OJ} \qquad \Rightarrow \frac{TP}{TO} = \frac{1}{2} \text{ ; TO = TP + PO = TP + 6}$$

$$\Rightarrow \frac{TP}{TP+6} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2TP = TP + 6$$

$$\Rightarrow TP = 6$$

Jadi volume paramida terpancung adalah:

$V_{PT} = V_1 - V_2$

$$= \frac{1}{3}.4^2.12 - \frac{1}{3}.2^2.6$$

$$= \frac{1}{3}.16.12 - \frac{1}{3}.4.6$$

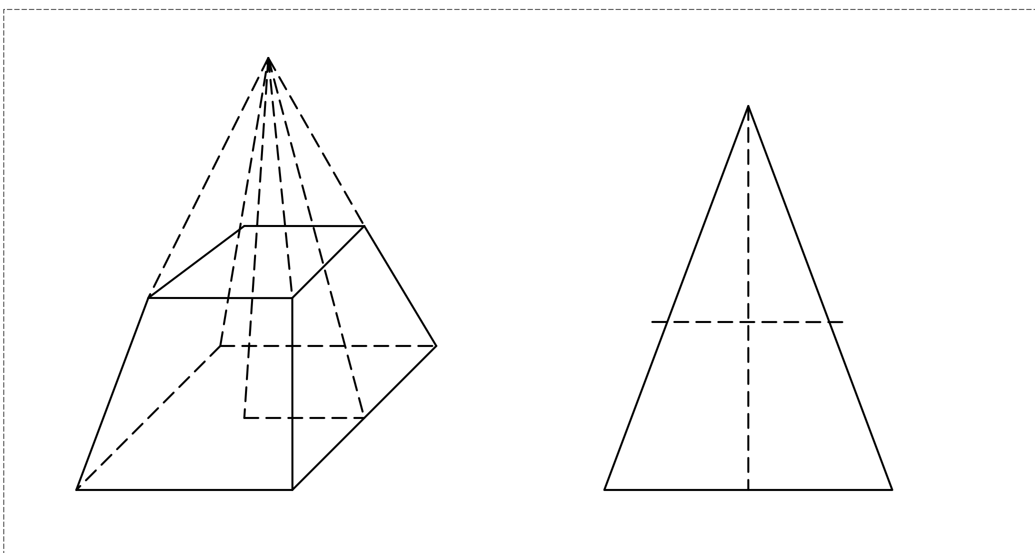
$$= 64 - 8$$

$$= 56 \qquad ..terbukti$$

ii. Akan ditunjukan bahwa volume piramida terpancung adalah:

$$V_{PT} = \frac{1}{3}t(a^2 + b^2 + ab)$$

Bukti:



Gambar 1.b

Berdasarkan gambar 1.b diperoleh,

Eyus Sudihartinih
Tugas MK Geometri

$V_1 = \frac{1}{3}.a^2.(t+x). \quad \ldots(1)$

$V_2 = \frac{1}{3}.b^2.x \quad \ldots(2)$

Δ TPI ~ Δ TOJ, karena $\angle$PTI = $\angle$OTJ

$\angle$TPI = $\angle$TOJ = 90^0

$\angle$TIP = $\angle$TJO

Sehingga,

$$\frac{OJ}{IP} = \frac{TP}{TO} \quad \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}b} = \frac{x+t}{x}$$

$$\Rightarrow x = \frac{bt}{a-b} \quad \ldots(3)$$

Berdasarkan (1), (2) dan (3) dipeloleh volume piramida terpancung adalah:

$V_{PT} = V_1 - V_2$

$$= \frac{1}{3}.a^2.(t+x) - \frac{1}{3}.b^2.x$$
$$= \frac{1}{3}(a^2.(t+x) - b^2.x)$$
$$= \frac{1}{3}(a^2.(t+\frac{bt}{a-b}) - b^2.\frac{bt}{a-b})$$
$$= \frac{1}{3}t(a^2.(1+\frac{b}{a-b}) - b^2.\frac{b}{a-b})$$
$$= \frac{1}{3}t(a^2.(\frac{(a-b)+b}{a-b}) - b^2.\frac{b}{a-b})$$
$$= \frac{1}{3}t(a^2.(\frac{(a-b)+b}{a-b}) - b^2.\frac{b}{a-b})$$
$$= \frac{1}{3}t(a^2.\frac{a}{a-b} - b^2.\frac{b}{a-b})$$
$$= \frac{1}{3}t(\frac{a^3}{a-b} - \frac{b^3}{a-b})$$
$$= \frac{1}{3}t(\frac{(a^2+b^2+ab)(a-b)}{a-b})$$
$$= \frac{1}{3}t(a^2+b^2+ab) \qquad ..terbukti$$

Eyus Sudihartinih
Tugas MK Geometri

1. Mengkonstruksi segitiga sama sisi.

   Dik: segmen AB

   Dit: konstruksi segitiga sama sisi pada segmen AB

   Jawab:

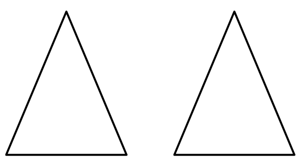
   1. Buat lingkaran dengan pusat A dengan jari-jari AB.
   2. Buat lingkaran dengan pusat B dengan jari-jari AB.
   3. Kedua lingkaran berpotongan di C. Hubungkan A dengan C dan hubungkan B dengan C.

   Bukti:

   AB = AC = BC, karena jari-jari lingkaran yang sama. Sehingga ΔABC adalah segitiga sama sisi.

8. Jika dua buah segitiga mempunyai dua sisi bersesuaian yang sama panjang dan alas yang sama, maka kedua segitiga tersebut mempunyai ukuran sudut yang sama.

   Dik:

   Dit: sudut-sudut yang bersesuaian sama besar.

   Jawab:

   Dari ΔABC dan ΔDEF, diperoleh

   AB = DE

   BC = EF

   CA = FD, sehingga memenuhi aksioma S.S.S

   Akan dibuktikan $\angle$ABC = $\angle$DEF, $\angle$BCA = $\angle$EFD, dan $\angle$CAB = $\angle$FDE.

   Karena memenuhi aksioma S.S.S, ΔABC $\cong$ ΔDEF sehingga sudut-sudut yang bersesuaian sama besar, yaitu: $\angle$ABC = $\angle$DEF, $\angle$BCA = $\angle$EFD, dan $\angle$CAB = $\angle$FDE… terbukti.

12. Menggambar garis lurus yang tegak lurus dengan suatu garis, melalui suatu titik di luar garis yang diketahui.

    Dik: segmen AB dan titik P di luar segmen AB

    Dit: konstruksi garis yang tegak lurus segmen AB, melalui titik P.

Jawab:

1. Buat lingkaran dengan pusat A dan jari-jari AP.
2. Buat lingkaran dengan pusat B dan jari-jari BP.
3. Kedua lingkaran berpotongan di P dan Q.
4. Hubungkan P dan Q.
5. Garis PC $\perp$ AB atau CQ $\perp$ AB.

15. Jika dua garis lurus berpotongan, maka sudut-sudut yang saling bertolakbelakang sama besar.

Dik: garis PQ dan garis AB berpotongan di O.

Dit: Sudut-sudut bertolakbelakang sama besar.

Jawab:

Dari gambar diperoleh,

$$\begin{array}{l} \angle AOP + \angle POB = 180^{0} \\ \angle BOQ + \angle POB = 180^{0} \; - \\ \hline \angle AOP - \angle BOQ = 0^{0} \\ \angle AOP = \angle BOQ \quad \ldots(1) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \angle BOP + \angle POA = 180^{0} \\ \angle AOQ + \angle POA = 180^{0} \; - \\ \hline \angle BOP - \angle AOQ = 0^{0} \\ \angle BOP = \angle AOQ \quad \ldots.(2) \end{array}$$

Dari (1) dan (2) terbukti bahwa sudut-sudut bertolakbelakang sama besar.

18. Pada segitiga sembarang, sudut di hadapan sisi yang lebih panjang maka sudutnya lebih besar.

27. Jika sebuah garis lurus memotong dua garis dan membentuk sudut yang berseberangan sama besar, maka kedua garis tersebut sejajar.

Dik: garis m dan garis l dipotong oleh garis k, dan $\angle 1 = \angle 8, \angle 2 = \angle 7, \angle 3 = \angle 6, \angle 4 = \angle 5$.

Dit: garis m dan garis l sejajar

Jawab:

Misal m dan l berpotongan maka terdapat

tepat satu titik potong (R). sehingga membentuk ΔABR. Menurut teoreme sebelumnya sudut luar pada segitiga lebih besar dari sudut dalamnya ($\angle 7 > \angle 1$). Hal ini bertentangan, sehingga garis l sejajar garis m.