Soal UTS dan Pembahasan PD II
2009

1. Yang dimaksud dengan deret kuasa adalah suatu deret yang berbentuk $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \;\; X - X_o \;\;{}^{n}$ dan dapat dicari jari-jari kekonversenannya, yaitu $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ *atau* $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \right|$
2. Suatu fungsi dikatakan analitik pada titik X_o jika fungsi tersebut dapat dibentuk menjadi deret kuasa, dengan kata lain, fungsi tersebut dapat diubah bentuknya ke dalam deret kuasa.
3. **<u>Titik biasa</u>** adalah titik yang tidak menyebabkan suatu fungsi menjadi fungsi yang nilainya tak terdefinisi. **<u>Titik singular</u>** adalah titik yang dapat menyebabkan suatu fungsi menjadi fungsi yang nilainya tak terdefinisi.
4. Penyelesaian :

$$\dot{x} = y, maka\ \ddot{x} = \dot{y}$$

$$\ddot{x} = -2x + 3y$$

$$\ddot{x} = -2x + 3\dot{x}$$

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0$$

$$Misalkan\ \dot{x} = r, maka:$$

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

$$r - 1 \quad r - 2 \quad = 0$$

$$r = 1\, atau\ r = 2$$

$$Jadi, x = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$$

$$y = \dot{x}$$

$$\Leftrightarrow y = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t}$$

$$Jad, penyelesaian\ umum\ dari\ sistem\ diatas\ adalah:$$

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$$

$$y = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t}$$

5. Penyelesaian :

Misalkan solusi umumnya adalah

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 e^{\lambda t} \\ A_2 e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

$$Pk = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \; -1-\lambda \quad 1-\lambda \; - \; 4 \quad 2 \; = 0$$

$$\Leftrightarrow -1+\lambda-\lambda+\lambda^2-8=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2-9=0$$

$$\Leftrightarrow \; \lambda-3 \quad \lambda+3 \; = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 3 \, atau \, \lambda = -3$$

$Untuk\ \lambda = 3, maka:$

$$-4A_1 + 4A_2 = 0$$

$$2A_1 - 2A_2 = 0$$

$diperoleh:$

$$A_1 = A_2$$

$Misalkan\ A_1 = 1, maka:$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix}$$

$Untuk\ \lambda = 3, maka:$

$$2A_1 + 4A_2 = 0$$

$$2A_1 + 4A_2 = 0$$

$diperoleh:$

$$A_1 = -2A_2$$

$Misalkan\ A_1 = 1, maka:$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-3t} \\ -\frac{1}{2}e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$Jadi, solusi\ umum\ dari\ sistem\ tersebut\ adalah:$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} e^{-3t} \\ -\frac{1}{2}e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$\therefore x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t}$$

$$y = C_1 e^{3t} - \frac{1}{2} C_2 e^{-3t}$$

6. Penyelesaian :
   Untuk mengetahui apakah populasi mengarah ke kepunahan atau ledakan, harus dicari dulu seperti apa solusi umum dari system tersebut.
   Misalkan solusi umumnya adalah:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 e^{\lambda t} \\ A_2 e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

$$PK = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 6 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (5-\lambda)(-2-\lambda) - (-2)(6) = 0$$

$$\Leftrightarrow -10 - 5\lambda + 2\lambda + \lambda^2 + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda = 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda = 1 \, atau \, \lambda = 2$$

$Untuk\ \lambda = 1, maka:$

$$4A_1 - 2A_2 = 0$$

$$6A_1 - 3A_2 = 0$$

$diperoleh:$

$$A_1 = \frac{1}{2} A_2$$

$$Misalkan\ A_1 = 1, maka: \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \\ 2e^t \end{bmatrix}$$

$Untuk\ \lambda = 2, maka:$

$$3A_1 - 2A_2 = 0$$

$$6A_1 - 4A_2 = 0$$

$diperoleh:$

$$A_1 = \frac{2}{3} A_2, maka: \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ \frac{3}{2} e^{2t} \end{bmatrix}$$

$Jadi, solusi\ umum\ dari\ sistem\ tersebut\ adalah:$

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} e^t \\ 2e^t \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} e^{2t} \\ \frac{3}{2} e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$\therefore N_1 = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$$

$$N_2 = C_1 e^t + \frac{3}{2} C_2 e^{2t}$$

Berdasarkan solusi umum dari system tersebut, karena solusinya tidak pernah negaif, maka populasi mengarah pada ledakan.

7. Dari persamaan diferensial di atas, diperoleh:

$a_0 = 12$

$a_1 = -2x$

$a_2 = 1 - x^2$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{-2x}{1-x^2} \text{............} \; 1$$

$$\frac{a_0}{a_2} = \frac{12}{1-x^2} \text{............} \; 2$$

Dari (1) dan (2), semua titik adalah titik biasa, kecuali -1 dan 1, karena -1 dan 1 dapat menyebabkan penyebut persamaan (1) dan (2) bernilai nol.
Jadi, **benar** pernyataan diatas, bahwa titik $X_o = 0$ merupakan titik biasa untuk persamaan $1 - x^2 \;\; y'' - 2xy' = 12y = 0$