TUGAS TOPIK DALAM ANALISIS I

Husty Serviana

Siswandi

1.(a). $2x^{(5)} - 3x^{(4)} + 7x'' - 8x = 0$ dengan syarat awal $x(0) = 1$,

$x'(0) = -1, x''(0) = 0, x^{(3)}(0) = 4, x^{(4)}(0) = -2$.

$$x^{(5)} = f(t, x, x', x'', x^{(3)}, x^{(4)}) = \frac{3}{2}x^{(4)} - \frac{7}{2}x'' + 4x$$

Misal:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x \\
x_2 &= x_1' = x' \\
x_3 &= x_2' = x'' \\
x_4 &= x_3' = x^{(3)} \\
x_5 &= x_4' = x^{(4)} \\
x_6 &= x_5' = x^{(5)}
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh lima persamaaan diferensial orde 1

$$\begin{aligned}
x_1' &= x_2 \\
x_2' &= x_3 \\
x_3' &= x_4 \\
x_4' &= x_5 \\
x_5' &= \frac{3}{2}x_5 - \frac{7}{2}x_3 + 4x_1
\end{aligned}$$

Jika persamaan tersebut di atas dituliskan dalam bentuk matriks

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \\ x_5' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -\frac{7}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

dengan syarat awal

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x(0) \\ x^{'}(0) \\ x^{''}(0) \\ x^{(3)}(0) \\ x^{(4)}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

1.(b). $x^{(4)} - 2x^{(3)} - 5x'' + 9x' - 6x = \exp(2t-3)$ dengan syarat awal $x(0) = 2$,

$x'(0) = -1, x''(0) = 3, x^{(3)}(0) = 5$

$x^{(4)} = f(t, x, x', x'', x^{(3)}) = 2x^{(3)} + 5x'' - 9x' + 6x + \exp(2t-3)$

Misal:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= x_1' = x' \\ x_3 &= x_2' = x'' \\ x_4 &= x_3' = x^{(3)} \\ x_5 &= x_4' = x^{(4)} \end{aligned}$$

sehingga diperoleh lima persamaaan diferensial orde 1

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ x_3' &= x_4 \\ x_4' &= 6x_1 - 9x_2 + 5x_3 + 2x_4 + \exp(2t-3) \end{aligned}$$

Jika persamaan tersebut di atas dituliskan dalam bentuk matriks

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & -9 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \exp(2t-3) \end{pmatrix}$$

dengan syarat awal

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x(0) \\ x^{'}(0) \\ x^{''}(0) \\ x^{(3)}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

1.(c). $5x^{(4)} - 2x''+x'-4x = \cosh(2t)$ dengan syarat awal $x(0) = -1,$

$x'(0) = 3, x''(0) = 7, x^{(3)}(0) = -4.$

$$x^{(4)} = f(t, x, x', x'', x^{(3)}) = \frac{2}{5}x''-\frac{1}{5}x'+\frac{4}{5}x+\frac{1}{5}\cos(2t)$$

Misal:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= x_1' = x' \\ x_3 &= x_2' = x'' \\ x_4 &= x_3' = x^{(3)} \\ x_5 &= x_4' = x^{(4)} \end{aligned}$$

sehingga diperoleh lima persamaaan diferensial orde 1

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ x_3' &= x_4 \\ x_4' &= \frac{4}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}\cosh(2t) \end{aligned}$$

Jika persamaan tersebut di atas dituliskan dalam bentuk matriks

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{5}\cosh(2t) \end{pmatrix}$$

dengan syarat awal

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \\ x''(0) \\ x^{(3)}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

2.(b). Mencari solusi persamaan differensial dengan metode eliminasi

$$x' = x + 5y \rightarrow y = \frac{1}{5}x' - \frac{1}{5}x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$y' = -x - y \rightarrow x = -y' - y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

dengan $x(0) = -2, y(0) = 0$

Dari (2) diperoleh

$$x' = -y'' - y' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Substitusi (2) ke (1)

$$x' = (-y' - y) + 5y$$

$$x' = -y' + 4y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

sehingga

$-y'' - y' = -y' + 4y$, atau

$$y'' + 4y = 0$$

Persamaan tersebut mempunyai persamaan karakteristik

$$r^2 + 4 = 0,$$

sehingga diperoleh $r_1 = -2i$ dan $r_2 = 2i$.

Jadi solusi umum $y(t)$ adalah

$$y(t) = C_1 \sin 2t + C_2 \cos 2t .$$

Untuk mencari solusi umum $x(t)$, substitusikan $y(t)$ ke persamaan $x = -y' - y$, yaitu

$$x(t) = -(-2C_2 \sin 2t + 2C_1 \cos 2t) - (C_2 \cos 2t + C_1 \sin 2t)$$

$$= (2C_2 - C_1)\sin 2t + (-2C_1 - C_2)\cos 2t$$

Jadi solusi umum $x(t)$ adalah

$$x(t) = (2C_2 - C_1)\sin 2t + (-2C_1 - C_2)\cos 2t$$

Jika dimasukkan syarat awal $x(0) = -2$ dan $y(0) = 0$, maka

$$y(0) = C_2 = 0$$
$$x(0) = C_1 = 1$$

Sehingga $C_2 = 0$ dan $C_1 = 1$.

Jadi solusinya adalah

$$x(t) = -2\cos 2t - \sin 2t$$

$$y(t) = \sin 2t \, .$$

2.(d). Mencari solusi persamaan differensial dengan metode eliminasi

$x' = 2x + y \rightarrow y = x' - 2x$..(1)

$y' = x + 2y - \exp(2t) \rightarrow x = y' - 2y + \exp(2t)$...(2)

Dari (2) diperoleh

$x' = y'' - 2y' + 2\exp(2t)$.....................................(3)

Substitusi (2) ke (1)

$x' = 2(y' - 2y + \exp(2t)) + y$

$\quad = 2y' - 3y + \exp(2t)$ ....(4)

sehingga

$y'' - 2y' + 2\exp(2t) = 2y' - 3y + \exp(2t)$ atau

$y'' - 4y' + 3y = -\exp(2t)$ ....(5)

Solusi umum = solusi homogen + solusi particular

Dicari solusi homogen sebagai berikut ;

Persamaan (5) mempunyai persamaan karakteristik

$r^2 - 4r + 3 = 0$,

sehingga diperoleh akar karakteristik $r_1 = 1$ dan $r_2 = 3$

Jadi solusi homogen $y(t)$ adalah

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{3t} \text{ ....(6)}$$

Untuk mencari solusi homogen $x(t)$, substitusikan (6) ke persamaan $x = y' - 2y$ ....(7) yaitu

$x(t) = C_1 e^t + 3C_2 e^{3t} - 2(C_1 e^t + C_2 e^{3t}) = -C_1 e^t + C_2 e^{3t}$

Jadi solusi homogen $x(t)$ adalah

$x(t) = -C_1 e^t + C_2 e^{3t}$

Dicari solusi particular sebagai berikut ;

$f(t) = -\exp(2t)$

Misal bentuk solusi particular $y_p(t) = A\exp(2t)$

$$\left.\begin{aligned} y_p(t) &= A\exp(2t) \\ y_p{}'(t) &= 2A\exp(2t) \\ y_p{}''(t) &= 4A\exp(2t) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(8)$$

Subsitusikan (6) ke (5)

4Aexp(2t) -8Aexp(2t)+3Aexp(2t)=-exp(2t)

diperoleh A=1

Jadi solusi particular $y_p(t) = \exp(2t)$

Jadi solusi umumnya adalah $y(t) = C_1e^t + C_2e^{3t} + \exp(2t)$ ……..(9)

Subsitusi (9) ke (7) diperoleh $x(t) = -C_1e^t + C_2e^{3t}$