Rangkuman Metoda Buhlmann

Jika ingin memprediksi aggregate claim periode akan datang digunakan compromise estimator C yang dirumuskan $C = ZR + (1-Z)H$ dimana R adalah mean dari observasi current (sekarang), H adalah mean prior, Z adalah faktor kredibilitas, yang didefinisikan oleh Buhlmann : $Z = \frac{n}{n+k}$, n adalah banyaknya periode observasi dan memenuhi

$$0 \le Z \le 1,\ k = \frac{E_x Var_y(Y|X)}{Var_x E_y(Y|X)}$$

Langkah-langkah menentukan compromise estimator C dengan menggunakan pendekatan Buhlmann.

1. Tentukan n, banyaknya periode observasi
2. Hitung variansi dari ekspektasi $Var_x E_y(Y|X)$
3. Hitung ekspektasi dari variansi $E_x Var_y(Y|X)$
4. Hitung $k = \frac{E_x Var_y(Y|X)}{Var_x E_y(Y|X)}$
5. Hitung faktor kredibilitas $Z = \frac{n}{n+k}$
6. Hitung compromise estimator $C = ZR + (1-Z)H$

Karakteristik kredibilitas Buhlmann

1. $\lim_{n\to\infty} Z = 1$
2. Z fungsi decreasing dari k, Z fungsi decreasing dari $E_\Theta Var_N$
3. Z fungsi increasing dari $Var_\Theta E_N$

Komponen dari total variansi

$$Var(Y) = E_x Var_y(Y|X) + Var_x E_y(Y|X)$$

Aplikasi metoda Buhlmann

Definisi 6.1

$X_1,...,X_n$ mutually

independent $\Leftrightarrow P(X_1 \le x_1 ... X_n \le x_n) = P(X_1 \le x_1) \times ... \times P(X_n \le x_n)$

Definisi 6.2

$X_1,...,X_n$ conditionally independent given $\Theta \Leftrightarrow$

$$P(X_1 \le x_1 ... X_n \le x_n \,|\Theta) = P(X_1 \le x_1 |\Theta) \times ... \times P(X_n \le x_n |\Theta)$$

Pendekatan umum yang diadopsi prosedur Empirical Bayesian

$X_{ij} =$ besarnya klaim kelompok i periode j , $i = 1,...r$; $j = 1,...,n+1$

Tentukan taksiran $E(X_{i,n+1} \,|\, X_{i1}, X_{i2},..., X_{in})$

Misal $X_i = (X_{i1},..., X_{in})$

Asumsi

1. $X_1,..., X_r$ mutually independent
2. X_i tergantung dari parameter resiko $\theta_i, X_i \,|\, \Theta_i$
3. $\Theta_i,...,\Theta_r$ IID
4. $X_1,..., X_n \,|\, \Theta_i$ mutually conditionally independent
5. Untuk setiap (i, j) banyaknya pemegang polis sama

$$\nu = E\nu(\Theta_i) = E_\Theta Var(X_{ij} \,|\, \Theta_i)$$

$$a = Var(\mu(\Theta_i)) = Var_\Theta (E(X_{ij} |\Theta_i))$$

$$\mu = E\mu(\Theta)$$

$$\hat{\nu} = \frac{1}{r(n-1)} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2$$

$$\hat{a} = \frac{1}{r-1} \sum_{i=1}^{r} \;\; \bar{X}_i - \bar{X} \;\;^{2} - \frac{1}{rn \;\; n-1} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} \;\; X_{ij} - \bar{X}_i$$

$$\overline{x}_{i.} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$

$$\hat{\mu} = \overline{x}.. = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} \overline{x}_{i.} = \frac{1}{rn}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$

$$\hat{k} = \frac{\hat{v}}{\hat{a}}$$

$\hat{Z} = \dfrac{n}{n+\hat{k}}$ dimana $\hat{k}$ dan $\hat{Z}$ adalah estimator tak bias.

Akhirnya estimasi Buhlmann dari $E[X_{i,n+1} \mid X_{i,1} = x_{i,1}, X_{i,2} = x_{i,2}, ..., X_{i,n} = x_{i,n}]$ adalah

$$\hat{C}_i = \hat{Z}\overline{x}_{i.} + (1-\hat{z})\hat{\mu}$$

Langkah-langkah menentukan compromise estimator dari aggregate claim amount untuk setiap r policyholders

1. Tentukan banyaknya pemegang polis, $r > 2$
2. Tentukan banyaknya policy years of experience $n > 2$
3. Hitung rata-rata banyaknya klaim, x_{ij} ,untuk setiap pemegang polis selama setiap policy year.
4. Hitung rata-rata banyaknya klaim, $\overline{x}_{i.}$ selama policy years untuk setiap pemegang polis
5. Hitung estimasi $\hat{\mu}$
6. Hitung $\hat{v}$
7. Hitung $\hat{a}$
8. Hitung $\hat{k} = \dfrac{\hat{v}}{\hat{a}}$
9. Hitung faktor kredibilitas $\hat{Z} = \dfrac{n}{n+\hat{k}}$
10. Hitung Buhlmann compromise estimate, $\hat{C}_i$, dari claim aggregate untuk setiap pemegang polis

Teorema 6.1

Misal (1) dalam satu periode terdapat $X_1, ..., X_n$ IID $F\ x|\Theta$ (2) dalam tiap periode terdapat satu observasi $X_i, i = 1, ..., n$ IID $F\ x|\Theta$, maka

$$Z = \frac{1}{1 + \dfrac{E_\Theta\left[Var\ X_1, ..., X_n|\Theta\right]}{Var_\Theta\left[E\ X_1, ..., X_n|\Theta\right]}} = \frac{n}{n + \dfrac{E_\Theta Var(X|\Theta)}{Var_\Theta E\ X|\Theta}}$$