

RELASI DAN FUNGSI

A. RELASI

Adalah hubungan antara elemen himpunan dengan elemen himpunan yang lain. Cara paling mudah untuk menyatakan hubungan antara elemen 2 himpunan adalah dengan himpunan pasangan terurut. Himpunan pasangan terurut diperoleh dari perkalian kartesian.

Definisi 1:

Perkalian kartesian (Cartesian products) antara himpunan A dan B ditulis: $A \times B$ didefinisikan sebagai semua himpunan pasangan terurut dengan komponen pertama adalah anggota himpunan A dan komponen kedua adalah anggota himpunan B.

$$A \times B = \{ (x,y) / x \in A \text{ dan } y \in B \}$$

Definisi 2:

Relasi biner R antara A dan B adalah himpunan bagian dari $A \times B$.

A disebut daerah asal dari R (domain) dan B disebut daerah hasil (range) dari R.

Definisi 3:

Relasi pada A adalah relasi dari A ke A.

Contoh:

1.1 Misal $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b\}$, maka :

$$A \times B = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)\}$$

1.2 Misal $P = \{2,4,8,9,15\}$, $B = \{2,3,4\}$. Relasi R dari P ke Q didefinisikan sebagai:

$(p,q) \in R$ jika p habis dibagi q, maka:

$$R = \{(2,2), (4,2), (8,2), (9,3), (15,3), (4,4), (8,4)\}$$

1.3 Misal R adalah relasi pada $A = \{2,3,4,8,9\}$ yang didefinisikan oleh $(x,y) \in R$ jika x adalah factor prima dari y, maka:

$$R = \{(2,2), (2,4), (2,8), (3,3), (3,9)\}$$

REPRESENTASI RELASI

1. TABEL

Jika relasi disajikan dengan table maka kolom pertama menyatakan daerah asal dan kolom kedua menyatakan daerah hasil.

Contoh : untuk relasi pada contoh diatas no.2 dan 3

Tabel 1

P	Q
2	2
4	2
4	4
8	2
8	4
9	3
15	3

Tabel 2

A	A
2	2
2	4
2	8
3	3
3	9

2. MATRIKS

Misal R adalah relasi dari $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ ke $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Relasi R dapat disajikan dengan matriks $M = [m_{ij}]$,

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{matrix} & \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{m1} & m_{m2} & \dots & m_{mn} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\text{Dimana: } m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } (a_i, b_j) \in R \\ 0, & \text{jika } (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Contoh:

Relasi R pada contoh 1.2 dapat dinyatakan dengan matriks:

$$\begin{array}{c}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \begin{array}{ccc}
 & 2 & 3 & 4 \\
 2 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 4 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 8 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 9 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 15 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Relas R pada contoh 1.3 dapat dinyatakan dengan matriks:

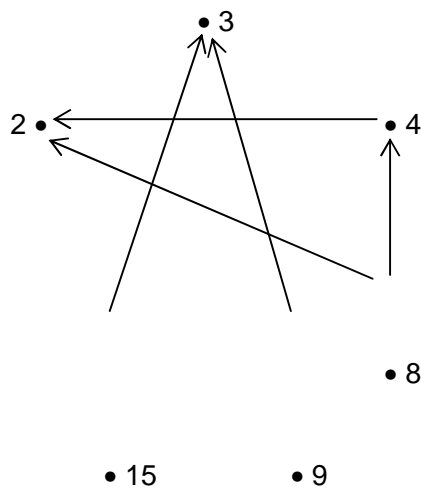
$$\begin{array}{c}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \begin{array}{ccccc}
 & 2 & 3 & 4 & 8 & 9 \\
 2 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 3 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 4 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 8 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 9 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

3. Graf berarah.

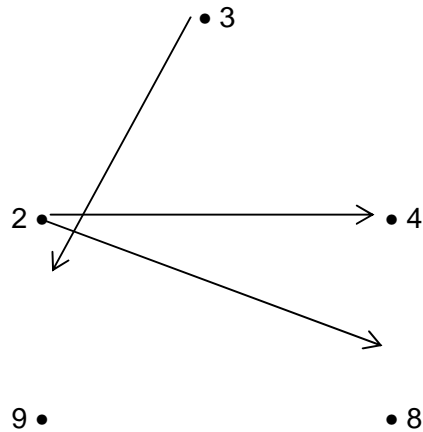
Representasi relasi dengan graf berarah adalah merupakan representasi relasi secara grafis. Tiap elemen himpunan dinyatakan dengan sebuah titik (simpul, vertex) dan tiap pasangan terurut dinyatakan dengan busur. Dengan kata lain jika $(a,b) \in R$ maka dibuat busur dari simpul a ke simpul b. Simpul a disebut **simpul asal** dan simpul b disebut **simpul tujuan**.

Contoh:

a. Representasi relasi pada contoh 1.2



b. Representasi relasi pada contoh 1.3



SIFAT – SIFAT RELASI BINER

1. REFLEKSIF

Relasi R pada himpunan A disebut refleksif jika $(a,a) \in R$ untuk setiap $a \in A$.

Contoh: Misal $A = \{1,2,3,4\}$ dan relasi R dibawah ini didefinisikan pada A , maka

a. $R = \{(1,1), (1,3), (2,1), (2,2), (3,3), (4,2), (4,3), (4,4)\}$ bersifat refleksif.

b. $R = \{(1,1), (2,2), (2,3), (4,2), (4,3), (4,4)\}$ bukan relasi refleksif karena $(3,3) \notin R$.

2. SIMETRIS

Relasi R pada himpunan A disebut simetris jika $(a,b) \in R$ maka $(b,a) \in R$ untuk setiap $a, b \in A$.

Contoh:

$R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,4), (4,2), (4,4)\}$

3. TRANSITIF

Relasi R pada himpunan A disebut Transitif jika $(a,b) \in R$ dan $(b,c) \in R$ maka $(a,c) \in R$ untuk setiap $a, b, c \in A$.

Contoh:

a. $R = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$

b. Relasi habis dibagi pada bilangan bulat positif.

RELASI N – ARAY

Adalah relasi yang menghubungkan lebih dari 2 himpunan. Relasi n-ary mempunyai terapan penting dalam basis data.

Contoh: Misal

NIM = {13598011,13598014,13598015,13598019,13598021,13598025}

Nama = {Amir, Santi, Irawan, Ahmad, Cecep, Hamdan}

MatKul = { Matematika Diskrit, Algoritma,Struktur Data, Arsitektur Komputer}

Nilai = {A,B,C,D,E}

Relasi MHS terdiri dari n-tuple (NIM>Nama, MatKul,Nilai} yang disajikan dalam table berikut:

NIM	Nama	MatKul	Nilai
13598011	Amir	Matematika Diskrit	A
13598011	Amir	Arsitektur Komputer	B
13598014	Santi	Algoritma	D
13598015	Irawan	Algoritma	C
13598015	Irawan	Struktur Data	C
13598015	Irawan	Arsitektur Komputer	B
13598019	Ahmad	Algoritma	E
13598021	Cecep	Algoritma	B
13598021	Cecep	Arsitektur Komputer	B
13598025	Hamdan	Matematika Diskrit	B
13598025	Hamdan	Algoritma	A
13598025	Hamdan	Struktur data	C
13598025	Hamdan	Arsitektur Komputer	B

Basis data (Database) adalah kumpulan table. Salah satu model basis data adalah model basisdata relasional. Pada basisdata relasional satu tabel menyatakan satu relasi. Setiap kolom pada table disebut *atribut*. Setiap tabel pada basisdata diimplementasikan secara fisik sebagai sebuah *file*. Satu baris pada tabel disebut *record* dan setiap atribut menyatakan sebuah *field*.

B. FUNGSI

Definisi:

Misal f adalah relasi dari A ke B . f disebut fungsi jika untuk setiap anggota A direlasikan dengan tepat satu anggota B .

Contoh:

Misal $A = \{1,2,3\}$, $B = \{u,v,w\}$

1. $f = \{(1,u),(2,v),(3,w)\}$ adalah fungsi
2. $f = \{(1,u),(2,u),(3,w)\}$ adalah fungsi.

Fungsi f disebut **satu satu / injectif**, jika tidak ada elemen himpunan A yang mempunyai bayangan yang sama atau untuk setiap $a,b \in A$, jika $a \neq b$ maka $f(a) \neq f(b)$.

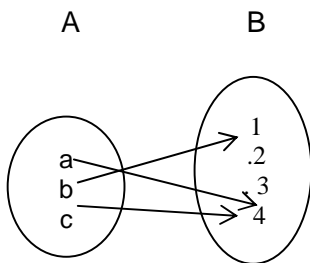
Contoh: $f = \{(1,w),(2,u),(3,v)\}$

Fungsi f dikatakan **pada / onto / surjektif**, jika setiap anggota himpunan B adalah merupakan bayangan dari satu atau lebih anggota himpunan A .

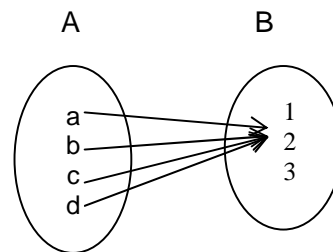
Contoh: $f = \{(1,w),(2,u),(3,v)\}$

Fungsi f dikatakan **berkoresponden satu – satu / bijektif** jika f adalah fungsi satu satu dan pada.

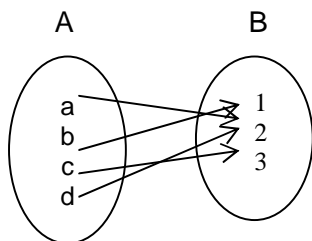
Gambar berikut akan memperlihatkan perbedaan fungsi, fungsi satu – satu, fungsi pada.



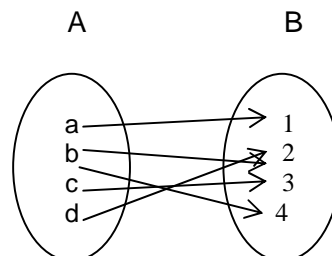
Fungsi satu – satu bukan pada.



Fungsi pada bukan satu – satu



Bukan fungsi satu – satu, bukan pada



Bukan Fungsi

KOMPOSISI FUNGSI

Missal g adalah fungsi dari himpunan A ke B dan f adalah fungsi dari B ke C . komposisi f dan g dinotasikan $f \circ g$ adalah fungsi dari A ke C yang didefinisikan oleh:

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

Contoh:

Diberikan fungsi $g = \{(1,u),(2,u),(3,v)\}$ yang memetakan himpunan $A = \{1,2,3\}$ ke $B = \{u,v,w\}$, dan fungsi $f = \{(u,y),(v,x),(w,z)\}$ yang memetakan $B = \{u,v,w\}$ ke $C = \{x,y,z\}$. Fungsi komposisi dari A ke C adalah:

$$f \circ g = \{(1,y),(2,y),(3,x)\}$$

LATIHAN SOAL

1. Misal $A = \{2,3,4\}$, $B = \{0,1,2,3\}$. Tuliskan himpunan pasangan terurut $(a,b) \in R$ jika dan hanya jika $a > b$.
2. Tuliskan anggota dari relasi R pada $A = \{1,2,3,4\}$ yang didefinisikan oleh $(x,y) \in R$ jika $x^2 \geq y$.
3. Nyatakan relasi $R = \{(1,2),(2,1),(3,3),(1,1),(2,2)\}$ pada $X = \{1,2,3\}$ dalam bentuk tabel, matriks dan graf berarah.
4. Untuk relasi berikut pada $A = \{1,2,3,4\}$, tentukan apakah termasuk relasi refleksif, simetri atau transitif.
 - a. $R = \{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4)\}$
 - b. $R = \{(2,4),(4,2)\}$
 - c. $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
 - d. $R = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,1),(3,4)\}$
5. Nyatakan pasangan dari relasi pada $\{1,2,3\}$ yang berkoresponden dengan matriks berikut:

a.
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b.
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Jika f adalah fungsi pada $X = \{0,1,2,3,4,5\}$ yang didefinisikan oleh:

$$f(x) = 4x \pmod{6}$$

Tuliskan f sebagai himpunan pasangan terurut. Apakah f satu – satu atau pada?

7. Jika diberikan $g = \{(1,b),(2,c),(3,a)\}$ adalah fungsi dari $A = \{1,2,3\}$ ke $B = \{a,b,c,d\}$ dan $f = \{(a,x),(b,x),(c,z),(d,w)\}$ adalah fungsi dari B ke $C = \{w,x,y,z\}$, tuliskan $f \circ g$ sebagai himpunan pasangan terurut.