

Pertemuan 4 Limit dan Kekontinuan

Pengertian Limit

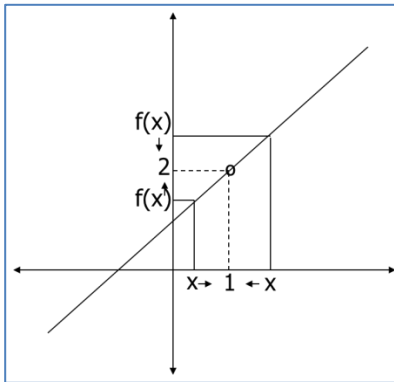
Misalkan

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Fungsi diatas tidak terdefinisi di $x=1$, karena di titik tersebut $f(x)$ berbentuk $0/0$. Tapi masih bisa ditanyakan berapa nilai $f(x)$ jika x mendekati 1. Dengan bantuan kalkulator dapat diperoleh nilai $f(x)$ bila x mendekati 1, seperti pada tabel berikut

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	$\rightarrow 1 \leftarrow$	1.0001	1.001	1.01	1.1
f(x)	1.9	1.99	1.999	1.9999	$\rightarrow ? \leftarrow$	2.0001	2.001	2.01	2.1

Secara grafik



Dari tabel dan grafik disamping terlihat bahwa $f(x)$ mendekati 2 jika x mendekati 1. Secara matematis dapat

$$\text{dituliskan } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Dibaca " limit dari $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ untuk x mendekati 1 adalah 2 .

Untuk mengatakan bahwa $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ berarti bahwa bilamana x dekat, tetapi berlainan dengan c , maka $f(x)$ dekat ke L .

Definisi Limit

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \text{ jika } \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Menghitung Nilai Limit

1. Menghitung secara Langsung

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow 1} 3x - 5 = 3(1) - 5 = -2$$

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 2}{x + 2} = \frac{2(2) - 2}{2 + 2} = \frac{1}{2}$$

2. Faktorisasi

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x + 1)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} 2x + 1 = 5$$

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3} \cdot \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)}{x - 9} = \lim_{x \rightarrow 9} \sqrt{x} + 3 = 6$$

3. Limit Fungsi Trigonometri

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

Contoh

$$a. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \sin 4x}{5x - \tan 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 + \frac{\sin 4x}{4x} \cdot 4}{5 - \frac{\tan 2x}{2x} \cdot 2} = \frac{3 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} \cdot 4}{5 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{2x} \cdot 2} = \frac{3 + \lim_{4x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} \cdot 4}{5 - \lim_{2x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{2x} \cdot 2} = \frac{7}{3}$$

b. Hitunglah limit trigonometri berikut!

$$1. \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan^2 4t}{5t} \quad 2. \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cot \pi t \sin t}{2 \sec t} \quad 3. \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \cos^2 t}{1 + \sin t}$$

$$4. \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 3t + 4t}{t \sec t} \quad 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 2x}$$

Limit Kiri dan Limit Kanan

θ Jika x menuju c dari arah kiri (dari arah bilangan yang lebih kecil dari c, limit disebut limit kiri. Notasi

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$$

θ Jika x menuju c dari arah kanan (dari arah bilangan yang lebih besar dari c, limit disebut limit kanan. Notasi

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$$

θ Hubungan antara limit dengan limit sepihak(kiri/kanan

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L \text{ dan } \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$$

θ Jika $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ maka $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ tidak ada.

Contoh 1

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x, & 0 < x < 1 \\ 2 + x^2, & x \geq 1 \end{cases}$$

Jawab:

Hitunglah

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

a. Karena aturan fungsi berubah di x=0, maka perlu dicari limit kiri dan limit kanan di x=0

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \end{aligned} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

b. Karena aturan fungsi berubah di $x=1$, maka perlu dicari limit kiri dan limit kanan di $x=1$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} 2 + x^2 = 3 \end{aligned} \right\} \text{ Karena } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ Tidak ada}$$

c. Karena aturan fungsi tidak berubah di $x=2$, maka tidak perlu dicari limit kiri dan limit kanan di $x=2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} 2 + x^2 = 6$$

Contoh 2

2. Tentukan konstanta c agar fungsi

$$f(x) = \begin{cases} 3 - cx, & x < -1 \\ x^2 - c, & x \geq -1 \end{cases}$$

mempunyai limit di $x=-1$

Jawab

Agar $f(x)$ mempunyai limit di $x=-1$, maka limit kiri harus sama dengan limit kanan

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} 3 - cx = 3 + c \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} x^2 - c = 1 - c \end{aligned} \right\} \text{ Agar limit ada } \Rightarrow 3 + c = 1 - c$$

$$\downarrow$$

$$C = -1$$

Sifat-sifat Limit

Misal

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ dan } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = G \text{ (limit dari } f, g \text{ ada dan berhingga)}$$

maka

1. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \pm G$
2. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x) = LG$
3. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L}{G}$, bila $G \neq 0$
4. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = (\lim_{x \rightarrow a} f(x))^n$, n bilangan bulat positif
5. $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$ bila n genap L harus positif

Limit tak Hingga

Misal $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ dan $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, maka $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} =$

- (i) $+\infty$, jika $L > 0$ dan $g(x) \rightarrow 0$ dari arah atas
- (ii) $-\infty$, jika $L > 0$ dan $g(x) \rightarrow 0$ dari arah bawah
- (iii) $+\infty$, jika $L < 0$ dan $g(x) \rightarrow 0$ dari arah bawah
- (iv) $-\infty$, jika $L < 0$ dan $g(x) \rightarrow 0$ dari arah atas

Ctt : $g(x) \rightarrow 0$ dari arah atas maksudnya $g(x)$ menuju 0 dari nilai $g(x)$ positif.

$g(x) \rightarrow 0$ dari arah bawah maksudnya $g(x)$ menuju 0 dari nilai $g(x)$ negatif.

Contoh

a. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ b. $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

Jawab

a. $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + 1 = 2 > 0$, $g(x) = x - 1$ akan menuju 0 dari arah bawah, karena $x \rightarrow 1$ dari kiri berarti x lebih kecil dari 1, akibatnya $x - 1$ akan bernilai negatif

Sehingga

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = -\infty$$

b. $\lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 + 1 = 2 > 0$ $g(x) = x^2 - 1$ akan menuju 0 dari arah atas, karena $x \rightarrow -1$ dari kiri berarti x lebih kecil dari -1, tapi bilangan negatif yang lebih kecil dari -1 jika dikuadratkan lebih besar dari 1 sehingga $x^2 - 1$ bernilai positif

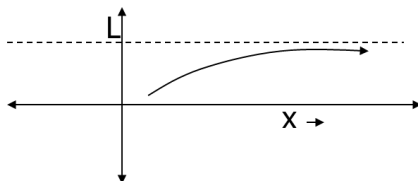
Sehingga

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = +\infty$$

Limit di Tak Hingga

a. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ jika $\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 \ni x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

atau $f(x)$ mendekati L jika x menuju tak hingga



Contoh: Hitunglah

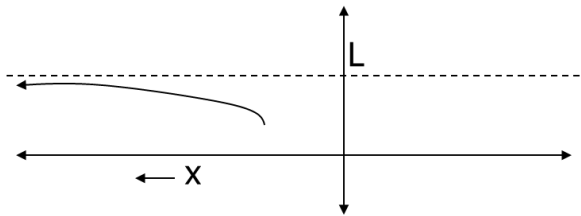
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 5}{2x^2 + 4}$$

Jawab

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 5}{2x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}\right)}{x^2 \left(2 + \frac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}}{2 + \frac{4}{x^2}} = 1/2$$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ jika $\forall \varepsilon > 0 \exists M < 0 \ni x < M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

atau $f(x)$ mendekati L jika x menuju minus tak hingga



Contoh: Hitunglah

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 5}{2x^2 + 4}$$

Jawab

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 5}{2x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(\frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}\right)}{x^2 \left(2 + \frac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}\right)}{\left(2 + \frac{4}{x^2}\right)} = 0$$

Kekontinuan

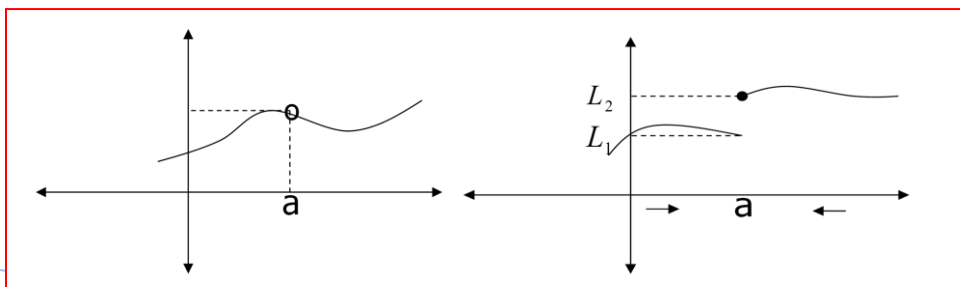
Definisi

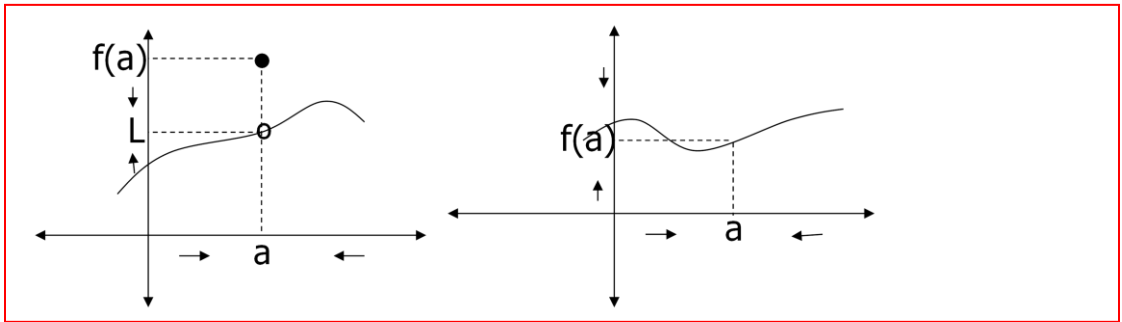
Fungsi $f(x)$ dikatakan kontinu di titik $x = a$, jika

1. $f(a)$ ada
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ada, artinya $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Jika salah satu syarat tersebut tidak dipenuhi, maka dikatakan bahwa f tidak kontinu di $x = a$.

Contoh 1





Contoh 2

Periksa apakah fungsi berikut kontinu di $x=2$, jika tidak sebutkan alasannya!

a. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ b. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$ c. $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 2 \\ x^2 - 1, & x \geq 2 \end{cases}$

Latihan 4

A. Menghitung Nilai Limit

1. Diketahui : $f(x) = \begin{cases} x^- + 1, & x \leq 1 \\ x^2 - x + 2, & x > 1 \end{cases}$

a. Hitung $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ dan $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

b. Selidiki apakah $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ada, jika ada hitung limitnya

2. Diketahui $g(x) = |x - 2| - 3x$, hitung (bila ada) :

a. $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$ b. $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$ c. $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$

3. Diketahui $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$, hitung (bila ada)

a. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ b. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ c. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

B. Limit tak Hingga dan Limit di tak Hingga

Hitung

1. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3+x}{3-x}$
2. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{x^2 - 4}$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x-1} - \sqrt{x})$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x^2}$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x+1}$

C. Kekontinuan

Carilah titik diskontinu dari fungsi

1. $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x + 3}$
2. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$
3. $f(x) = \frac{x - 2}{|x| - 2}$

