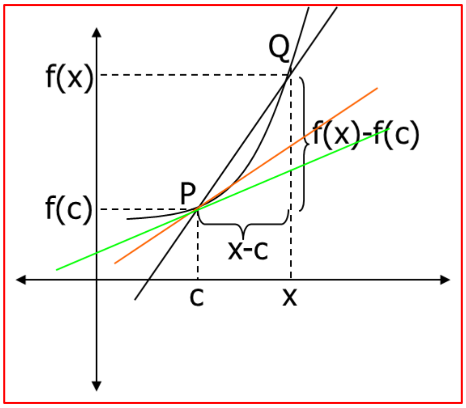
Pertemuan 5 TURUNAN

Garis Singgung



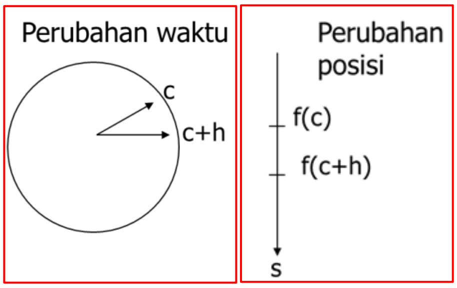
Kemiringan tali busur PQ adalah :

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Jika x → c , maka tali busur PQ akan berubah menjadi garis singgung di titik P dengan kemiringan

$$m = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Kecepatan Sesaat



Misal sebuah benda bergerak sepanjang garis koordinat sehingga posisinya setiap saat diberikan oleh s = f(t). Pada saat t = c benda berada di f(c) dan saat t = c + h benda berada di f(c+h).

Sehingga kecepatan rata-rata pada selang waktu [c,c+h] adalah

$$v_{rata-rata} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Jika h→0, diperoleh kecepatan sesaat di x = c :

$$v = \lim_{h \to 0} v_{rata-rata} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Misal x = c + h, bentuk diatas dapat dituliskan dalam bentuk

$$v = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Definisi Turunan di Satu Titik

Dari dua bentuk diatas : kemiringan garis singgung dan kecepatan sesaat terlihat bahwa dua masalah tersebut berada dalam satu tema, yaitu turunan.

Turunan pertama fungsi f di titik x = c, notasi $f'(c)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\boxed{f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}}$$

bila limit di atas ada.

Notasi lain:

$$\boxed{\frac{df(c)}{dx}, y'(c)}$$

Contoh

Tentukan $f\,'(3)$ dari $f(x) = \frac{1}{x}$

Jawab:

$$f'(3) = \lim_{x\to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{3-x}{3x(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{-(x-3)}{3x(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{-1}{3x} = -\frac{1}{9}$$

Turunan Sepihak

Turunan kiri dari fungsi f di titik c, didefinisikan sebagai :

$$f_-'(c) = \lim_{x\to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x-c}$$

Turunan kanan dari fungsi f di titik c, didefinisikan sebagai :

$$f_+'(c) = \lim_{x\to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x-c}$$

bila limit ini ada.

Fungsi f dikatakan mempunyai turunan (diferensiabel) di c atau $f'(c)$ ada, jika

$$f_-'(c) = f_+'(c) \quad \text{dan} \quad f'(c) = f_-'(c) = f_+'(c)$$

sebaliknya f dikatakan tidak mempunyai turunan di c.

Contoh

Diketahui $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3 & , x < 1 \\ 1 + 2\sqrt{x} & , x \geq 1 \end{cases}$. Selidiki apakah f(x) diferensiabel di x=1!

Jawab:

a. $$f_-'(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x + 3 - (1 + 2\sqrt{1})}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{x-1} = 1$$

b. $$f_+'(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1 + 2\sqrt{x} - (1 + 2\sqrt{1})}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2\sqrt{x} - 2}{x-1} = 2 \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = 1$$

Jadi, f diferensiabel di x=1 dan $f\,'(1)=1$.

Teorema

Jika f diferensiabel di c, maka f kontinu di c.
Sifat tersebut tidak berlaku sebaliknya. Artinya, jika f kontinu di *c*, maka belum tentu f diferensiabel di *c*.

Contoh

Tentukan konstanta a dan b agar fungsi f(x) berikut diferensiabel di x=1;

$$f(x)=\begin{cases} x^2+b \ , \ x<1 \\ ax \ , \ x\geq 1 \end{cases}$$

Jawab : Agar f(x) terdiferensialkan di x = 1, haruslah

a. f kontinu di x = 1 (syarat perlu)
b. Turunan kiri = turunan kanan di x = 1 (syarat cukup)

f kontinu di x = 1 jika f kontinu kiri dan kontinu kanan di x = 1 atau

$$f(1)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x).$$

$$a=\lim_{x\to 1} x^2+b=\lim_{x\to 1} ax \iff a=1+b=a \iff b=a-1$$

$$f_-^{'}(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+b-a}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+(a-1)-a}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1} x+1=2$$

$$f_+^{'}(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{ax-a}{x-1}=a\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1}=a$$

Supaya f direfersiabel di x=1 maka $f_-^{'}(1)=f_+^{'}(1) \Rightarrow a=2$

sehingga diperoleh : *a* = 2 dan *b* = 1.

Definisi Turunan

Misalkan f (x) terdefinisi pada selang I. Fungsi turunan pertama dari f, ditulis $f'(x)$, didefinisikan sebagai

$$f'(x)=\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} \ , \ \forall x\in \mathrm{I}$$

Atau jika t=x+h, maka

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \ , \ \forall x\in \mathrm{I}$$

Jika limit tersebut ada.

Notasi lain:

$$y', \frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}, D_x y, D_x f(x)$$

Notasi $\frac{dy}{dx}$ dikenal sebafi notasi Leibniez.

Aturan Pencarian Turunan

1. Jika *f*(*x*) = *k* maka f'(x) = 0
2. $\dfrac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$
3. $\dfrac{d(f(x) \pm g(x))}{dx} = \dfrac{d(f(x))}{dx} \pm \dfrac{d(g(x))}{dx} = f'(x) \pm g'(x)$

   Misalkan u=f(x) dan v=g(x), maka

4. $\dfrac{d(uv)}{dx} = u'v + v'u$
5. $\dfrac{d\left(u/v\right)}{dx} = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$
6. $\dfrac{d(\sin x)}{dx} = \cos x$
7. $\dfrac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$
8. $\dfrac{d(\tan x)}{dx} = \sec^2 x$
9. $\dfrac{d(\cot x)}{dx} = -\csc^2 x$
10. $\dfrac{d(\sec x)}{dx} = \tan x \sec x$
11. $\dfrac{d(\csc x)}{dx} = -\cot x \csc x$

    Misalkan y=f(u) dan u=g(x), maka

12. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \times \dfrac{du}{dx}$ (aturan rantai)

Contoh

Tentukan turunan dari fungsi-fungsi berikut!

1. $f(x) = x^{1/2} + \sqrt[3]{x^2} + \dfrac{1}{x^2} \leftrightarrow$
$$f(x) = x^{1/2} + x^{2/3} + x^{-2}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - 2x^{-3}$$

2. $f(x) = (x^3+1)(x^2+2x+3) \leftrightarrow$
$$f(x) = (x^3+1)(x^2+2x+3)$$
$$f'(x) = 3x^2(x^2+2x+3) + (2x+2)(x^3+1)$$
$$f'(x) = 7x^4 + 8x^3 + 9x^2 + 2x + 2$$

3. $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2+1} \leftrightarrow$
$$f(x) = \frac{x+3}{x^2+1}$$
$$f'(x) = \frac{1.(x^2+1) - 2x(x+3)}{(x^2+1)^2}$$
$$f'(x) = -\frac{x^2+6x-1}{(x^2+1)^2}$$

Contoh

4. $y = \sin(x^2 + 1)$
$y' = \cos(x^2 + 1).2x$
$y' = 2x\cos(x^2 + 1)$

5. $y = \cos^4(4x^2 - x)$
$y' = 4\cos^3(4x^2 - x)\sin(4x^2 - x).(8x-1)$
$y' = 4(8x-1)\cos^3(4x^2 - x)\sin(4x^2 - x)$

Turunan Tingkat Tinggi

Turunan ke-n didapatkan dari penurunan turunan ke-(n-1).

$$\boxed{f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}\left(f^{(n-1)}(x)\right)}$$

Turunan pertama $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ Turunan kedua $f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$

Turunan ketiga $f'''(x) = \frac{d^3 f(x)}{dx^3}$ Turunan ke-n $f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$

Contoh

A. Tentukan turunan kedua dari:

1. $y = 4x^3 + \sin x$

   Jawab:

   $y = 4x^3 + \sin x$
   $y' = 12x + \cos x$
   $y'' = 12 - \sin x$

2. $y = (2x-3)^4$

   Jawab:

   $y = (2x-3)^4$
   $y' = 4(2x-3)^3.2 = 8(2x-3)^3$
   $y'' = 3.8(2x-3)^2.2 = 48(2x-3)^2$

B. Carilah c, sehingga f’’(c)=0 dari $f(x) = x^3 + 3x^2 - 45x - 6$

Jawab:

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 45x - 6$
$f'(x) = 3x^2 + 6x - 45$
$f''(x) = 6x + 6$
$f''(c) = 0$ maka $6c + 6 = 0$ sehingga $6c = -6$
Jadi c = -1

Turunan Implisit

Jika hubungan antara *y* dan *x* dapat dituliskan dalam bentuk *y* = *f*(*x*) maka y disebut **fungsi eksplisit** dari x, yaitu antara peubah bebas dan tak bebasnya dituliskan dalam ruas yang berbeda. Bila tidak demikian maka dikatakan ***y* fungsi implisit dari *x***.

Contoh

1. $x^3y^2 + x^2 + y = 10$
2. $\sin(xy) + x^2 = y^2 + 1$

Untuk menentukan turunan dari bentuk implisit digunakan aturan rantai dan anggap *y* fungsi dari *x*.

Contoh

1. $D_x(x^3y^2 + x^2 + y) = D_x(10)$ $D_x(x^3y^2) + D_x(x^2) + D_x(y) = D_x(10)$ $(3x^2y^2 + 2x^3y\,y') + 2x + y' = 0$ $(2x^3y + 1)y' = -2x - 3x^2y^2$ $y' = \dfrac{-2x - 3x^2y^2}{2x^3y + 1}$	2. $D_x(\sin(xy) + x^2) = D_x(y^2 + 1)$ $\cos(xy)(y + xy') + 2x = 2yy' + 0$ $(x\cos(xy) - 2y)y' = -2x - y\cos(xy)$ $y' = \dfrac{-2x - y\cos(xy)}{x\cos(xy) - 2y}$

Latihan 5

1. Carilah nilai a dan b agar fungsi berikut diferensiabel di x=1

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x+3} & ;0 \le x < 1 \\ x^2 - bx & ; x \ge 1 \end{cases}$$

2. Carilah turunan pertama dari fungsi berikut!

$a.\, y = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2 \qquad b.\, y = (2x-3)^{10} \qquad c.\, y = \sin^3 x$

3. Carilah turunan kedua dari fungsi berikut!

$a.\ y = \sin(2x-1) \qquad b.\ y = (2x-3)^4 \qquad c.\ y = \cos^2(\pi x)$

4. Carilah turunan implisit dari fungsi berikut!

$a.\, \sin(xy) + x^2 = y^2 + 1 \qquad b.\ x^3 - 3x^2y + y^2 = 0$