Pertemuan 6 APLIKASI TURUNAN

Menggambar Grafik Fungsi

Contoh: Gambarlah grafik dari fungsi berikut!

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$$

Beberapa informasi yang diperlukan untuk mengambar grafik dari fungsi tersebut adalah sebagai berikut!

Titik Potong dengan Sumbu-x dan Sumbu-y

a. Titik potong dengan sumbu-x diperoleh jika y=0, sehingga $\frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = 0$, akibatnya

$$x^2 - 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = -3$$

Tidak ada nilai x yang memenuhi sehingga f tidak punya titik potong dengan sumbu-x.

b. Titik potong dengan sumbu-y diperoleh jika x=0, sehingga $y = \frac{0^2 - 2(0) + 4}{0 - 2} = -2$

Jadi f berpotongan dengan sumbu-y di (0, -2)

Turunan Pertama

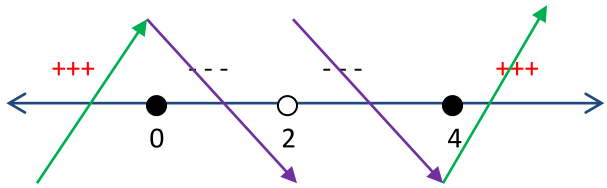
Perhatikan bahwa $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$ maka

$$f\,'(x) = \frac{(2x-2)(x-2) - (x^2 - 2x + 4)(1)}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$

Jika f'(x)=0, maka kita peroleh

$$\frac{x(x-4)}{(x-2)^2} = 0$$

Titik pemecahan x=0, x=4, dan x≠2



Berdasarkan turunan pertama kita peroleh:

a. Interval Kemonotonan

Monoton naik, $f\,'$(x)≥0, yaitu pada $(-\infty, 0] \cup [4, \infty)$

Monoton turun, $f\,'$(x)≤0, yaitu pada $[0,2) \cup (2,4]$

b. *Titik Kritis*

Titik Stationer, $f'(x) = 0$, yaitu ketika x=0 dan x=4

Titik singular, $f'(x)$ tidak ada, yaitu ketika x=2

c. *Nilai Ekstrim (Nilai Maksimum dan Minimum Lokal)*

Nilai f(c), di mana c adalah titik kritis dan terjadi perubahan kemonotonan

c = 0 maka f(0) = -2 (maksimum, perubahan tanda dari monoton naik ke monoton turun)

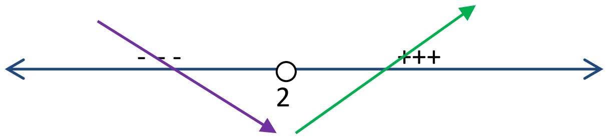
c = 4 maka f(4) = 6 (minimum, perubahan tanda dari monoton turun ke monoton naik)

c = 2 maka f(2) tidak ada, sehingga bukan nilai maksimum atau minimum lokal

Turunan Kedua

Perhatikan bahwa $f'(x) = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$ maka

$$f'(x) = \frac{8}{(x-2)^3} \quad \text{dengan } x \neq 2$$



Berdasarkan turunan kedua kita peroleh

1. *Interval Kecekungan*

Cekung ke atas, $f''(x) \geq 0$, yaitu pada $(2, \infty)$

Cekung ke bawah, $f''(x) \leq 0$, yaitu pada $(-\infty, 2)$

2. *Titik Belok*

Titik dimana $f''(x)=0$ atau $f''(x)$ tidak ada (terjadi perubahan kecekungan)

Karena $f''(2)$ tidak ada, maka titik belok terjadi pada x = 2.

Asimtot

Asimtot fungsi adalah garis lurus yang didekati oleh grafik fungsi. Ada Tiga jenis asimtot fungsi, yakni

(i) Asimtot Tegak

Garis x = c disebut asimtot tegak dari y = f(x) jika $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \pm\infty$

(ii) Asimtot Datar

Garis y = b disebut asimtot datar dari y = f(x) jika $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$

(iii) Asimtot Miring

Garis y = ax + b disebut asimtot miring jika $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ dan $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = b$

Untuk mencari asimtot dari fungsi f, maka kita harus mencari nilai limit ketika $x \to \pm\infty$ dan ketika $x \to c$, di mana f(c) tidak ada.

1. Asimtot tegak

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-2x+4}{x-2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-2x+4}{x-2} = -\infty$$

Jadi fungsi f memiliki asimtot tegak yaitu garis x=2

2. Asimtot Datar

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-2x+4}{x-2} = \pm\infty$$

Jadi fungsi f tidak memiliki asimtot data

3. Asimtot miring

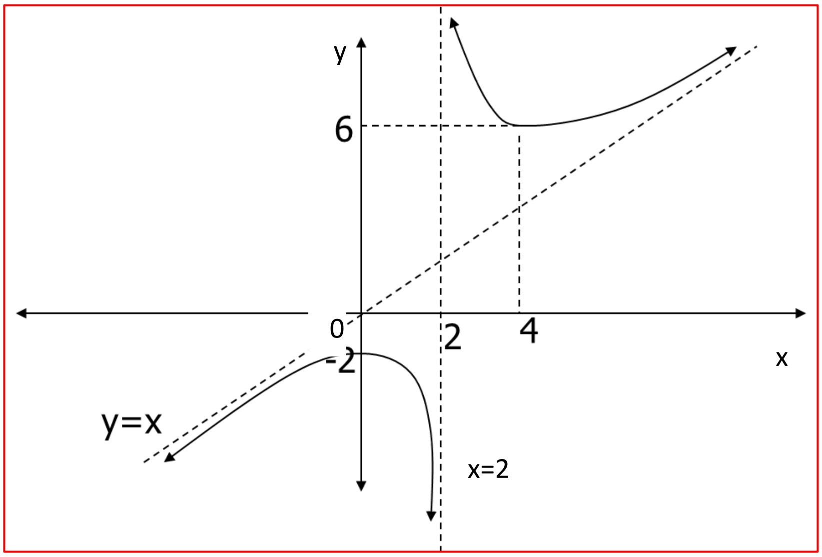
$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x-2+\frac{4}{x}}{x-2} = 1$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x)-x = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^2-2x+4}{x-2} - x = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^2-2x+4}{x-2} - \frac{x^2-2x}{x-2} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{4}{x-2} = 0$$

Jadi fungsi f memiliki asimtot miting yaitu garis y=x.

Grafik

Berikutnya tinggal menggambar grafik dari fungsi $f(x) = \frac{x^2-2x+4}{x-2}$



Latihan 6

Gambarlah grafik dari fungsi

$$a.\ f(x) = \frac{x^2}{x^2-4} \qquad b.\ f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 + 1$$

Aturan L'Hopital

Aturan L'Hopital digunakan untuk mencari nilai limit yang bentuknya $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0.\infty, \infty - \infty$

1. Bentuk $\frac{0}{0}$

   Aturan $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Contoh

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin 2x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{4 \cos 2x}{2} = 2$$

2. Bentuk $\frac{\infty}{\infty}$

   Aturan $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Contoh

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 3x + 5} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x + 1}{2x + 3} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{2} = 1$$

3. Bentuk $0 \times \infty$

   Aturan: ubah menjadi bentuk $\frac{\infty}{\infty}$ atau $\frac{0}{0}$

Contoh

$$\lim_{x \to 0} x^2 \csc x = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{\cos x} = 0$$

4. Bentuk $\infty - \infty$

   Misalkan lim $f(x)$=lim $g(x)$ = ∞. Untuk menghitung lim [$f(x)$ - $g(x)$] dilakukan dengan menyederhanakan bentuk [$f(x)$- $g(x)$] sehingga dapat dikerjakan menggunakan cara yang telah dikenal sebelumnya.

Contoh

$$\lim_{x \to 0} (\csc x - \cot x) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\cos x} = 0$$

Mencari Nilai Maksimum-Minimum

Turunan dapat dipergunakan dalam menyelesaikan masalah sehari-hari yang berkaitan dengan masalah memaksimumkan/meminimumkan fungsi. Langkah pertama yang harus dilakukan adalah memodelkan masalah tersebut menjadi fungsi satu peubah. **Setelah itu gunakan aturan-aturan turunan untuk menentukan nilai maksimum atau nilai minimum**

Contoh

Tentukan ukuran persegi panjang yang dapat dibuat dari kawat sepanjang 100 cm agar luasnya maksimum .

Jawab:

Misal y = panjang dan x = lebar

Luas= L = x y, karena 2x + 2y = 100 → y = 50 - x

Sehingga Luas = L(x) = x(50-x) $= 50x - x^2$, $0 \le x \le 50$

$L'(x) = 50 - 2x$ → x = 25

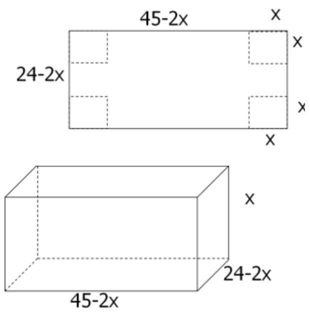
Karena $L''(25) = -2 < 0$ maka di x = 25 terjadi maks lokal.

Karena L(0) = 0, L(25) = 625, L(50) = 0 → agar luas maks haruslah x = 25 dan y = 25

Contoh

Sehelai karton berbentuk persegi panjang dengan ukuran 45 x 24 cm. Karton ini akan dibuat kotak tanpa tutup dengan cara memotong keempat pojoknya berupa bujur sangkar dan melipatnya. Tentukan ukuran kotak agar volume kotak maksimum.

Jawab:



Misal, panjang sisi potongan di pojok persegi panjang x, sehingga

V(x) = (45-2x) (24-2x) x

$V(x) = 4x^3 - 138x^2 + 1080x$, $0 \le x \le 12$

$$V'(x) = 12(x^2 - 23x + 90)$$

$$= 12(x-18)(x-5)$$

Sehingga diperoleh titik stasioner x = 18 dan x = 5

$$V''(x) = 24x - 276$$

Sehingga

$V''(18) = 156 > 0 \longrightarrow$ di x =18 terjadi min lokal

$V''(5) = -156 < 0 \longrightarrow$ di x = 5 terjadi maks lokal

Untuk menentukan volume maksimum bandingkan nilai Volume jika x = 5 dan x = 0, x = 12 (batas Df)

V(0) = 0

V(12)= 0

V(5) =2450

Agar volume kotak maksimum maka ukuran kotak : panjang 35 cm lebar 14 cm tinggi 5 cm

Latihan 7

Selesaikan persoalan berikut dengan aplikasi turunan!

1. Tentukan dua buah bilangan yang selisihya 100 dan hasil kalinya minimum
2. Tentukan ukuran persegi panjang dengan luas 1000 cm^2 dan kelilingnya minimum
3. Tentukan titik pada garis 6x + y = 9 yang terdekat ke titik (-3,1)
4. Tentukan ukuran persegi panjang yang memiliki luas terbesar dengan alas pada sumbu *x* serta dua titik sudutnya di atas sumbu *x* serta terletak pada parabola $y = 8 - x^2$
5. Tentukan ukuran segitiga samakaki yang memiliki luas terbesar sehingga dapat diletakkan dalam lingkaran berjari-jari *r*

Hitung limit berikut (bila ada)

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{1 - \cos x}$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x \right)$
3. $\lim\limits_{x \to 0} 2x \csc x$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x + 1}{2 - 5x}$
5. $\lim\limits_{x \to 0} \cot 2x \, (1 - \cos 2x)$