BAB I VEKTOR

A. DEFINISI VEKTOR

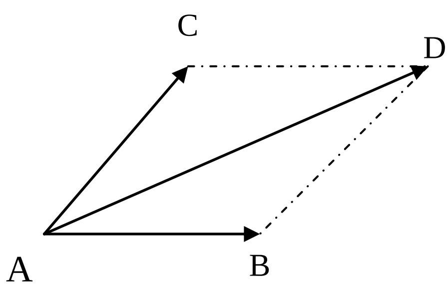
1). Pada mulanya vektor adalah objek telaah dalam ilmu fisika. Dalam ilmu fisika vektor didefinisikan sebagai sebuah besaran yang mempunyai besar dan arah seperti gaya, kecepatan, momen, dan sebagainya. Vektor dalam fisika berada dalam bidang datar atau ruang-fisik atau di R^2 dan R^3. Dalam matematika vektor-fisik ini disebut *vektor konkret.*

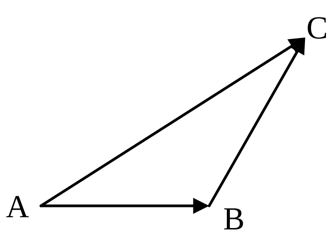
2). Dalam matematika kita membuat *aksioma* ruang vektor yang diilhami oleh sifat-sifat vektor fisik. Segala sesuatu yang memenuhi aksioma ruang vektor disebut sebuah vektor, yang membebaskan diri dari sifat ‘besar’ dan ‘arah’ maupun sifat-sifat fisik lainnya. Oleh karena itu vektor dalam ruang vektor aksiomatis ini kita sebut *vektor abstrak*.

(Bab I membahas vektor konkret atau vektor fisik ini)

Definisi Jumlah Vektor

Jumlah dua buah vektor $\underline{u}$ dan $\underline{v}$ diperoleh dari aturan jajaran genjang atau aturan segitiga;





$\underline{AB} + \underline{AC} = \underline{AD}$ $\qquad$ $\underline{AB} + \underline{BC} = \underline{AC}$

B. ALJABAR VEKTOR ELEMENTER

1. Aljabar Vektor:

   a. $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$ komutatif;

   b. $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$ asosiatif.

2. Vektor nol ($\underline{0}$) didefinisikan sebagai vektor yang mempunyai panjang nol dan tidak mempunyai arah dan bersifat $\underline{0} + \underline{u} = \underline{u}$ untuk setiap $\underline{u}$.
3. Pengurangan: $\underline{u} - \underline{v} = \underline{u} + (-\underline{v})$
4. Definisi perkalian dengan skalar (bilangan real):

   a. Jika $k > 0$, $k\underline{u}$ adalah vektor yang besarnya k kali besar $\underline{u}$ dan arahnya sejajar $\underline{u}$;

   b. Jika $k = 0$, $k\underline{u} = \underline{0}$;

   c. Jika $k < 0$, $k\underline{u}$ adalah vektor yang besarnya $|k|$ kali besar $\underline{u}$ dan arahnya sejajar tetapi berlawanan arah dengan $\underline{u}$.

5. Untuk sebarang vektor $\underline{u}$ dan $\underline{v}$, dan sebarang bilangan k dan m, kita mempunyai:

   a. $k(m\,\underline{u}) = (km)\,\underline{u}$

   b. $(k + m)\,\underline{u} = k\,\underline{u} + m\,\underline{u}$

   c. $k(\underline{u} + \underline{v}) = k\,\underline{u} + k\underline{v}$

   d. $\underline{u} + (-1)\underline{v} = \underline{u} - \underline{v}$

6. Notasi: Besar atau panjang vektor $\underline{u}$ dinyatakan dengan $\|\underline{u}\|$.
7. Untuk sebarang vektor $\underline{u}$ dan $\underline{v}$ dan sebarang bilangan real k,

   a. $\|\underline{u}+\underline{v}\| \le \|\underline{u}\| + \|\underline{v}\|$

   b. $\|k\underline{u}\| = |k|\|\underline{u}\|$

8. Vektor letak atau vektor posisi.

   Letak titik P terhadap titik acuan (atau titik pangkal) O didefinisikan sebagai vektor $\underline{OP} = \underline{p}$. Jadi $\underline{PQ} = \underline{q} - \underline{p}$.

C. BASIS DAN KOMPONEN

1. Definisi-1.

   Suatu basis untuk vektor-vektor di dalam sebuah bidang datar yang tetap adalah pasangan vektor tak nol dalam arah yang berlainan.

2. Definisi-2.

   Suatu pernyataan berbentuk $a\underline{u} + b\underline{v}$, dengan a dan b bilangan-bilangan disebut suatu kombinasi linear dari vektor-vektor $\underline{u}$ dan $\underline{v}$.

3. Definisi-3.

   Komponen-komponen dari vektor $\underline{x}$ terhadap basis { $\underline{u}$, $\underline{v}$} adalah bilangan a dan b yang memenuhi $\underline{x} = a\underline{u} + b\underline{v}$.

4. Ketunggalan komponen-komponen.

   Terhadap basis yang diketahui, setiap vektor dapat dinyatakan secara tunggal sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor basisnya.

5. Notasi: Jika $\{\underline{b}_1 , \underline{b}_2\}$ menyatakan pasangan vektor basis, komponen suatu vektor $\underline{v}$ terhadap basis ini akan ditulis dengan V_1 dan V_2 . Jadi untuk sebarang vektor $\underline{v}$ kita mempunyai $\underline{v} = V_1 \underline{b}_1 + V_2 \underline{b}_2$.

6. Aljabar komponen-komponen.

   Komponen-komponen dari kombinasi linear vektor-vektor adalah kombinasi komponen-komponennya.

   Dengan lambang: untuk sebarang bilangan c dan d dan sebarang vektor $\underline{u}$ dan $\underline{v}$, komponen-komponen $c\underline{u} + d\underline{v}$ adalah $cU_1 + dV_1$ dan $cU_2 + dV_2$.

7. Definisi-4.

   Vektor satuan adalah vektor yang panjangnya 1.

   Jika basis $(\underline{b}_1 , \underline{b}_2)$ adalah vektor satuan, maka panjang sebarang vektor $\underline{v}$ di bidang adalah $\|\underline{v}\| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2}$ di mana V_1 dan V_2 adalah komponen-komponen vektor $\underline{v}$ terhadap basis $(\underline{b}_1 , \underline{b}_2)$.

D. VEKTOR-VEKTOR DI RUANG

1. Definisi.

   Suatu basis untuk vektor-vektor di ruang (ruang fisik) adalah himpunan tiga vektor tak nol yang tidak terletak di dalam satu bidang datar yang sama.

2. Ketunggalan komponen.

   Setiap vektor di ruang dapat disajikan secara tunggal terhadap basis yang diketahui.

3. Notasi: Jika $\{\underline{b}_1 , \underline{b}_2 , \underline{b}_3\}$ menyatakan pasangan vektor basis untuk ruang fisik, komponen suatu vektor $\underline{v}$ terhadap basis ini akan ditulis dengan V_1, V_2, dan V_3. Jadi untuk sebarang vektor $\underline{v}$ kita mempunyai $\underline{v} = V_1 \underline{b}_1 + V_2 \underline{b}_2 + V_3 \underline{b}_3$.

E. HASILKALI TITIK (*DOT PRODUK*)

1. Definisi-1.

   Hasilkali titik atau *dot produk* dari dua vektor $\underline{a}$ dan $\underline{b}$ adalah bilangan $\underline{a} \cdot \underline{b} = \|\underline{a}\|\|\underline{b}\|\cos\theta$. Di sini θ adalah sudut antara $\underline{a}$ dan $\underline{b}$ dan $0^0 \le \theta \le 180^0$.

2. Definisi-2.

   Diberikan dua vektor tak nol $\underline{a}$ dan $\underline{b}$, proyeksi $\underline{a}$ pada $\underline{b}$ adalah bilangan $\|\underline{a}\|\cos\theta$, dengan θ adalah sudut antara $\underline{a}$ pada $\underline{b}$. Jika $\underline{a} = 0$, proyeksi nya pada sebarang vektor adalah 0. Proyeksi pada vektor nol tidak didefinisikan.

   a. Jika $\underline{b} \neq \underline{0}$, maka $\underline{a} \cdot \underline{b}$ sama dengan $\|\underline{b}\|$ kali proyeksi $\underline{a}$ pada $\underline{b}$.

   b. Jika $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$, maka dikatakan bahwa $\underline{a}$ dan $\underline{b}$ tegak lurus atau ortogonal. Vektor nol tegak lurus pada setiap vektor.

   c. Sifat-sifat hasil kali titik.

Untuk sebarang vektor $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ dan sebarang bilangan k , berlakulah sifat-sifat berikut:

i). $\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}$

ii). $(k\underline{a}).\underline{b} = k\,(\underline{a}.\underline{b})$

iii). $\underline{a}.\,(\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a}.\underline{b} + \underline{a}.\underline{c}$

iv). Tidak berlaku hukum kanselasi: $\underline{a}.\underline{b} = \underline{a}.\underline{c}$ tidak harus memberikan $\underline{b} = \underline{c}$

v). $|\underline{a}.\underline{b}| \le \|\underline{a}\|\|\underline{b}\|$

3. Definisi-3.

Basis *ortonormal* adalah basis yang terdiri atas vektor-vektor satuan ortogonal.

i). Jika basis $(\underline{b}_1 , \underline{b}_2 , \underline{b}_3)$ adalah vektor - vektor ortonormal, maka $\underline{b}_1 \cdot \underline{b}_1 = \underline{b}_2 \cdot \underline{b}_2 = \underline{b}_3 \cdot \underline{b}_3 = 1$.

ii). Jika basis $(\underline{b}_1 , \underline{b}_2 , \underline{b}_3)$ adalah vektor - vektor ortonormal dan $\underline{u}$, $\underline{v}$ dua buah vektor di ruang maka $\underline{u} . \underline{v} = U_1V_1 + U_2V_2 + U_3V_3$.

iii) Jika basis $(\underline{b}_1 , \underline{b}_2 , \underline{b}_3)$ adalah vektor - vektor ortonormal, maka $\underline{b}_1 = 1\underline{b}_1 + 0\underline{b}_2 + 0\underline{b}_3$. Jika $\underline{u} = U_1\underline{b}_1 + U_2\underline{b}_2 + U_3\underline{b}_3$, maka $\underline{u}.\underline{b}_1 = U_1$ = proyeksi $\underline{u}$ pada basis $\underline{b}_1$. Analog $\underline{u}.\underline{b}_2 = U_2$, $\underline{u}.\underline{b}_3 = U_3$.

F. VEKTOR-*n*

1. Definisi-1.

Untuk setiap bilangan bulat positif n, vektor-n adalah himpunan terurut dari n bilangan.

2. Notasi: Vektor-n terdiri atas bilangan-bilangan $a_1, a_2, \ldots , a_n$ ditandakan dengan $(a_1, a_2, \ldots , a_n)$ atau lebih singkat dengan satu huruf tunggal a.

Bilangan a_r (dengan r bilangan dari 1 sampai n) disebut *entri* atau unsur ke r dari vektor itu.

3. Definisi-2.

   Jumlah dua vektor-n, $\underline{a}$ dan $\underline{b}$, adalah vektor-n,

   $\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ \ldots,\ a_n + b_n)$.

4. Definisi-3.

   Hasilkali titik vektor-n, $\underline{a}$ dan $\underline{b}$, adalah bilangan real,

   $\underline{a} \,.\, \underline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$.

5. Definisi-4.

   Panjang vektor-n, $\underline{x}$, adalah bilangan $|\underline{x}| = \sqrt{\underline{x}.\underline{x}}$.

6. Definisi-5.

   Sudut antara dua vektor-n tak nol $\underline{x}$ dan $\underline{y}$ didefinisikan oleh

$$\cos^{-1}\left[\frac{\underline{x}.\underline{y}}{\|\underline{x}\|\|\underline{y}\|}\right]$$