BAB 2 MATRIKS

A. ALJABAR MATRIKS

1. Definisi-1.

   Jika A dan B adalah matriks-matriks berukuran p x q dan k adalah suatu bilangan, kita definisikan $A + B$ sebagai matriks dengan unsur (r,s) adalah $A_{rs} + B_{rs}$ dan kita definisikan kA adalah matriks dengan unsur (r,s) adalah kA_{rs}.

2. Matriks $A – B$ adalah matriks dengan entri (r,s) unsur-unsur A_{rs} - B_{rs}.

3. Definisi-2.

   Transpose dari matriks A berukuran p x q adalah matriks A^T berukuran q x p yang didefinisikan dengan $(A^T)_{rs} = A_{sr}$ untuk $r = 1, \dots , q$ dan $s = 1, \dots , p$.

4. i). Transpose dari matriks kolom adalah matriks baris dan sebaliknya.;

   ii). Dua kali transpose suatu matriks kembali ke matriks aslinya;

   iii). Jika $A + B = C$, maka $A^T + B^T = C^T$.

5. Definisi-3.

   Suatu matriks A adalah simetrik jika $A = A^T$, yakni $A_{rs} = A_{sr}$ untuk semua r dan s.

6. Jika matriks A berordo r x s, maka matriks transpose A^T berukuran s x r dan unsur $(A^T)_{\mathrm{sr}} = A_{rs}$ untuk setiap r, s.

B. PERKALIAN MATRIKS-MATRIKS

1. Definisi.

   Dua buah matriks ***C*** dan ***D*** dikatakan cocok untuk dikalikan, dalam urutan CD, apabila banyaknya kolom dari C sama dengan banyaknya baris dari D. Jika C dan D cocok untuk dikalikan, dan C berukuran

mxn, D berukuran nxp, maka CD berukuran mxp dan didefinisikan dengan $(CD)_{rs} = \sum_{k=1}^{n} C_{rk} D_{ks}$ untuk semua r, s.

2. Matriks stokastik adalah matriks persegi A, nxn, dengan sifat setiap unsur A_{rs} memenuhi $0 < A_{rs} < 1$ dan jumlah unsur-unsur setiap baris dan setiap kolom sama dengan 1.
3. Lemma kolom.

   Jika A adalah matriks pxq dengan kolom-kolom $a_1, a_2, \ldots, a_q$, biasa ditulis $A = (a_1, a_2, \ldots, a_q)$, dan x adalah vektor q, maka Ax adalah matriks kolom $x_1a_1 + \ldots + x_qa_q$, px1.

C. ALJABAR PERKALIAN MATRIKS

1. Untuk semua matriks A, B, C, D asalkan hasilkalinya ada, berlakulah:
   a. $(AB)C = A(BC)$
   b. $A(B + C) = AB + AC$
   c. $(A + B)(C + D) = AC + AD + BC + BD$
   d. $A(kB) = k(AB)$ untuk semua bilangan k.

2. Hasilkali transpose.

   Jika A dan B cocok untuk dikalikan, maka $(AB)^T = B^TA^T$.

3. Definisi-1.

   A disebut matriks segitiga atas (U) jika $A_{rs} = 0$ untuk semua $r > s$ dan segitiga bawah (L) jika $A_{rs} = 0$ untuk semua $r < s$.

4. Definisi-2.

   Kronekr δ (lambang δ_{rs}) didefinisikan dengan $\delta_{rs} = 0$ jika $r \neq s$ dan $\delta_{rs} = 1$ jika $r = s$.

(*A* = *I*)

D. INVERSE

1. Definisi-1.

   Jika $AB = I$, maka dikatakan bahwa B adalah *inverse kanan* dari A, dan A adalah *inverse kiri* dari B.

2. Definisi-2.

   Jika $AB = BA = I$, maka dikatakan B adalah inverse dari A. Jika matriks A mempunyai inverse, maka dikatakan *invertibel* atau dapat dicari inversnya. Inverse seperti didefinisikan di sini kadang-kadang disebut *inverse dua sisi* apabila matriks ingin dideskripsikan dengan inverse kiri atau kanan.

3. Sifat-sifat inverse.

   a. Setiap matriks invertibel adalah persegi

   b. Jika B adalah inverse A, maka A inverse B

   c. Jika B adalah inverse A, maka B adalah inverse kiri dan inverse kanan dari A.

   d. Jika A invertibel, maka demikian pulalah transpose A^T. Jika B inverse dari A, maka B^T inverse dari A^T.

   e. Jika AB invertibel, maka $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

4. Definisi-3.

   Satuan matriks $E(r,s)$ adalah matriks nxn dengan unsur (r,s) adalah 1 dan 0 yang lain-lain untuk setiap r, s dari 1 sampai n.

   Sifat: $E(r,s)E(x,y) = 0$ jika $s \neq x$ dan $E(r,s)E(s,y) = E(r,y)$.

5. Definisi-4.

   Komutator dari matriks A dan B, nxn, adalah matriks $AB - BA$, dan ditulis dengan $[A,B]$.