BAB 3 DETERMINAN

A. TRANSFORMASI PADA BIDANG

1. Definisi-1.

   Determinan dari matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ adalah bilangan *ad-bc*.

   Bilangan ini ditandakan dengan det(A) atau $|A|$ atau $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

   (a) Determinan sebagai faktor pembesaran.

   Jika transformasi yang bersesuaian dengan matriks A, yakni $Ap = q$ diterapkan pada sebarang luas daerah bidang (p), bayangannya mempunyai luas sebesar $|\det(A)|$ kali luas daerah asalnya, yakni $q = |\det(A)|.p$.

   (b) Sifat-sifat determinan 2x2:

   i) Det (I) = 1, dengan I menandakan matriks satuan 2x2;

   ii) Jika A mempunyai dua baris identik, det (A) = 0;

   iii) Det (A) adalah fungsi linear setiap barisnya, yakni:

$$\det\begin{pmatrix} ar_1 + bs_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = a\det\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} + b\det\begin{pmatrix} s_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

   iv) Pertukaran dua baris dari matriks mengubah tanda determinannya;

   v) Mengalikan sebuah baris dengan bilangan k adalah mengalikan determinan dengan k.

   vi) Menambahkan hasilkali sebuah baris ke baris yang lain tidak mengubah determinan;

   vii) Jika sebuah baris semua entrinya nol, determinan itu nol.

2. Definisi-2.

Determinan dari matriks persegi $A(n\text{x}n)$, adalah suatu bilangan det (A) dengan sifat-sifat berikut ini:

(a) det (I) = 1

(b) Jika A mempunyai dua baris yang identik, det (A) = 0

(c) Det (A) adalah fungsi linear dari setiap baris

(d) Pertukaran dua baris matriks akan mengubah tanda determinannya

(e) Perkalian sebuah baris dengan k adalah mengalikan determinan dengan k

(f) Penjumlahan hasilkali sebuah baris matriks dengan baris yang lain tidak mengubah determinannya

(g) Jika sebuah baris seluruhnya terdiri atas nol, maka determinannya nol.

3. Det (A) = 0 jika dan hanya jika A adalah singular.

4. Determinan dari matriks segitiga atas adalah hasilkali entri-entri diagonalnya.

5. Determinan dari sebarang matriks sama dengan determinan transposenya. Dengan kata lain det (A) = det (A^T).

6. Suatu determinan adalah fungsi linear dari kolom-kolomnya, bernilai nol jika ada dua kolomnya identik, dan operasi elementer atas kolom berefek sama dengan operasi elementer baris.

7. Jika A dan B adalah matriks persegi yang ukurannya sama, maka det (AB) = det(A).det(B).

8. Definisi-3.

Minor (*r*, *s*) dari matriks $n\text{x}n$ adalah <u>determinan</u> $(n\text{-}1)\text{x}(n\text{-}1)$ yang diperoleh dengan cara membuang baris ke r dan kolom ke s. **Kofaktor** dari entri (r, s) adalah $(-1)^{r+s}$ kali minor (r, s), ditulis $C_{rs} = (-1)^{r+s} M_{rs}$.

9. Tinjau matriks $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Dengan metode Sarrus diperoleh:

$$\begin{aligned}
\text{Det (A)} &= a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} \\
&\quad - a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} \\
&= a_{11}\,(a_{22}\, a_{33} - a_{23}\, a_{32}) + a_{21}\,(a_{13}\, a_{32} - a_{12}\, a_{33}) \\
&\quad + a_{31}\,(a_{12}\, a_{23} - a_{13}\, a_{22}) \\
&= a_{11}\, C_{11} + a_{21}\, C_{21} + a_{31}\, C_{31}
\end{aligned}$$

Diperoleh ekspansi-ekspansi kofaktor dari det (A) sbb:

$$\begin{aligned}
\text{Det (A)} &= a_{11}\, C_{11} + a_{12}\, C_{12} + a_{13}\, C_{13} \\
&= a_{11}\, C_{11} + a_{21}\, C_{21} + a_{31}\, C_{31} \\
&= a_{21}\, C_{21} + a_{22}\, C_{22} + a_{23}\, C_{23} \\
&= a_{12}\, C_{12} + a_{22}\, C_{22} + a_{32}\, C_{32} \\
&= a_{31}\, C_{31} + a_{32}\, C_{32} + a_{33}\, C_{33} \\
&= a_{13}\, C_{13} + a_{23}\, C_{23} + a_{33}\, C_{33}
\end{aligned}$$

10. Definisi-4.

Jika A adalah sembarang matriks n x n dan C_{ij} adalah kofaktor a_{ij},

maka matriks $\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}$

dinamakan matriks kofaktor dari A. Transposisi matriks ini dinamakan ***adjoin dari A*** dan dinyatakan dengan adj (A).

11. Jika A adalah sebuah matriks yang dapat dibalik, maka

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\, adj(A)}$$

12. **Kaidah Cramer:**

Jika $AX = B$ adalah sebuah sistem yang terdiri dari n persamaan linier di dalam n bilangan yang tak diketahui sehingga det $(A) \neq 0$, maka sistem tersebut mempunyai sebuah pemecahan yang tunggal. Pemecahan itu adalah

$$\boxed{x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}\ ,\ \ x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}\ ,\ \ldots\ ,\ \ x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}}$$

di mana A_j adalah matriks yang didapatkan dengan menggantikan entri-entri di dalam kolom ke-j dari A dengan entri-entri di dalam matriks $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$.