BAB 4 OPERASI ELEMENTER DAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR

A. VEKTOR DALAM BENTUK ESELON

1. Definisi Himpunan Vektor Bentuk Eselon.
   a. Entri depan dari suatu vektor-n adalah entri pertama yang tidak nol.
      Contoh: vektor (0, 0, 4, 0, 2) mempunyai entri depan 4.
   b. Suatu vektor-n mempunyai *r* nol depan jika *r* entri yang pertama adalah nol, dan entri pertama yang bukan nol adalah entri ke (r+1).
      Contoh: vektor (0, 0, 4, 0, 2) mempunyai dua nol depan dan entri ketiga (4) adalah entri depan. Vektor ini mempunyai 2 nol depan.
   c. Suatu himpunan vektor-*n* adalah tersusun dalam **bentuk eselon** jika syarat-syarat berikut ini dipenuhi:
      (i) himpunan itu terdiri atas vektor yang banyaknya **finit;**
      (ii) jika himpunan ini memuat vektor nol, maka ia berada pada **tempat terakhir;**
      (iii) jika terdapat lebih dari satu vektor nol, masing-masing vektor yang lain setelah vektor yang pertama mempunyai nol depan **lebih banyak** daripada vektor yang terdahulu.
      Contoh: H = { (0, 1, 2, 3, 4), (0, 0, 5, 4, 1), (0, 0, 0, 4, 0), (0, 0, 0, 0, 0)} adalah bentuk eselon sebab:
      1). Banyaknya vektor 4, jadi H finit
      2). Vektor 0 = (0, 0, 0, 0, 0) $\in$ H dan berada pada urutan terakhir
      3). Vektor ketiga mempunyai 3 nol depan, vektor kedua mempunyai 2 nol depan, dan vektor pertama mempunyai 1 nol depan.
2. Himpunan vektor dalam bentuk eselon adalah bergantungan linear jika dan hanya jika memuat vektor nol.

B. OPERASI ELEMENTER

1. Definisi.

   Operasi elementer atas himpunan vektor-vektor terurut adalah:

   Operasi Jenis I: menukarkan urutan dua buah vektor;

   Operasi Jenis II: mengalikan salah satu vektor dengan suatu bilangan bukan nol;

   Operasi Jenis III: menjumlahkan hasilkali salah satu vektor dengan bilangan tak nol dengan vektor lain.

2. Jika himpunan vektor *T* diperoleh dari himpunan terurut vektor *S* dengan menerapkan sebanyak finit operasi-operasi elementer, maka setiap kombinasi linear dari *S* adalah kombinasi linear dari *T*; dan setiap kombinasi linear nontrivial dari *S* adalah kombinasi linear nontrivial dari *T*. Dengan kata lain Sp(*S*) = Sp(*T*); jika *S* bergantungan linear, *T* juga bergantungan linear; jika *S* bebas linear, *T* juga bebas linear.

C. ELIMINASI GAUSS-JORDAN

Eliminasi Gauss-Jordan adalah eliminasi sedemikian rupa sehingga entri-entri di atas dan di bawah entri a_{rr} semuanya nol.

1. Definisi-1.

   Sebuah matriks berbentuk *eselon tersusut* (atau berbentuk *normal Hermite*) jika semua kondisi berikut berlaku:

   (i) matriks dalam bentuk eselon;

   (ii) entri depan setiap baris yang bukan nol adalah 1;

   (iii) setiap entri depan adalah satu-satunya entri bukan nol di dalam kolom yang bersangkutan.

2. Langkah-langkah eliminasi Gauss-Jordan

   (i) Ambillah baris bukan nol dari matriks yang diberikan, misal: baris ke r;

(ii) Misalkan a_{rk} adalah entri depan dari baris ke r. Bagilah baris ke r dengan a_{rk} ; maka entri depan ini sekarang menjadi sama dengan 1;

(iii) Jika $r = 1$, maka berhenti (sebab baris di atasnya tidak ada lagi);

(iv) Jika $r > 1$, kurangilah baris ke s dengan a_{sk} kali baris ke r, untuk $s = 1, 2, \dots, r\text{-}1$. Dengan kata lain $R_s \to R_s - a_{sk}R_r$;

3. Reduksi Gauss-Jordan.

Setiap matriks adalah ekuivalen baris dengan matriks eselon tersusut.

4. Tiap-tiap SPL HOMOGEN adalah sistem yang konsisten, karena $x_1 = 0,\ x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ selalu merupakan sebuah pemecahan. Pemecahan tersebut dinamakan **pemecahan trivial (*trivial solution*).** Jika ada pemecahan lain, maka pemecahan lain tersebut dinamakan **pemecahan yang tak trivial (*nontrivial solution*).**

D. MATRIKS-MATRIKS INVERS

1. Invertibel kanan.

Suatu matriks mempunyai inverse kanan jika dan hanya jika matriks itu mempunyai rank-baris penuh.

2. Invertibel kiri.

Suatu matriks mempunyai inverse kiri jika dan hanya jika matriks itu mempunyai rank-kolom penuh.

3. Invertibilitas.

Suatu matriks adalah invertibel kanan jika dan hanya jika matriks itu persegi mempunyai rank penuh.

4. Jika matriks persegi mempunyai inverse kiri atau kanan, maka matriks itu invertibel.
5. Metode menghitung inverse.

   Untuk menghitung A^{-1} dari matriks A berukuran nxn, tuliskan matriks nx$2n$, $(A \mid I)$, dan kemudian terapkan reduksi Gauss-Jordan. Jika A invertibel maka reduksi bentuk eselon dari $(A \mid I)$ adalah $(I \mid A^{-1})$. Seluruh proses ini kita tuliskan dengan **"$(A \mid I) \rightarrow (I \mid A^{-1})$".**