# BAB 5 RUANG VEKTOR

## A. PENDAHULUAN

1. Definisi-1.

Suatu **ruang vektor** adalah suatu himpunan objek yang dapat dijumlahkan satu sama lain dan dikalikan dengan suatu bilangan, yang masing-masing menghasilkan anggota lain dalam himpunan itu.

2. Definisi-2.

Ruang vektor real $V$ adalah himpunan $V$ dengan unsur-unsur $\underline{x}$, $\underline{y}$, ... yang dilengkapi dengan operasi tambah (+) sedemikian sehingga untuk setiap pasangan unsur $\underline{x}, \underline{y} \in V$ , jumlah $(\underline{x}+\underline{y}) \in V$ dan untuk setiap $\underline{x} \in V$ dan bilangan real $k \in K$, hasilkali $k\underline{x} \in V$ dan memenuhi

(1) $\underline{x} + \underline{y} = \underline{y} + \underline{x}$ untuk semua $\underline{x}, \underline{y} \in V$ (sifat komutatif)

(2) $\underline{x} + (\underline{y} + \underline{z}) = (\underline{x} + \underline{y}) + \underline{z}$ untuk semua $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in V$ (sifat asosiatif)

(3) terdapat suatu unsur $\underline{0} \in V$, sedemikian sehingga $\underline{0} + \underline{x} = \underline{x}$ untuk semua $\underline{x} \in V$ (sifat unsur $\underline{0} \in V$)

(4) diberikan $\underline{x} \in V$ terdapat suatu unsur $\underline{y} \in V$ sedemikian sehingga $\underline{x} + \underline{y} = \underline{0}$ ($\underline{y}$ inverse dari $\underline{x}$ terhadap operasi tambah)

(5) $k(m\underline{x}) = (km)\underline{x}$ untuk semua $\underline{x} \in V$ dan semua $k, m \in K$ (sifat asosiatif)

(6) $1\underline{x} = \underline{x}$ untuk semua $\underline{x} \in V$

(7) $(k + m)\,\underline{x} = k\underline{x} + m\underline{x}$ untuk semua $\underline{x} \in V$ dan semua $k, m \in K$ (sifat distributif)

(8) $k\,(\underline{x} + \underline{y}) = k\underline{x} + k\underline{y}$ untuk semua $\underline{x}, \underline{y} \in V$ dan semua $k \in K$ (sifat distributif)

Unsur-unsur himpunan $V$ disebut **vektor,** dan bilangan-bilangan real disebut **skalar**. Medan $K$ dapat himpunan semua bilangan real $R$ atau himpunan semua bilangan kompleks $C$.

3. Definisi-3.

Suatu **ruang vektor atas medan *K*** adalah himpunan $V$ sedemikian sehingga:

(1) Terdapat aturan yang diberikan sebarang dua unsur $\underline{x}$ dan $\underline{y}$ di $V$, menentukan sebuah unsur $\underline{x} + \underline{y}$ yang memenuhi (1) sampai (4) Definisi-2.

(2) Terdapat aturan yang diberikan sebarang unsur $\underline{x}$ di $V$ dan sebarang skalar $k$ di $K$, menentukan unsur $k\underline{x}$ di $V$ yang memenuhi (5) sampai (8) Definisi-2.

Medan $K$ dapat himpunan semua bilangan real $R$ atau himpunan semua bilangan kompleks $C$.

## B. SIFAT-SIFAT ALJABAR SUATU RUANG VEKTOR

1. Sifat Aljabar sebuah ruang vektor $V$ atas medan $K$

(1) Hukum kanselasi: $\underline{x} + \underline{y} = \underline{x} + \underline{z} \Rightarrow \underline{y} = \underline{z}$, untuk semua $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in V$

(2) Vektor $0 \in V$ adalah tunggal

(3) Untuk setiap $\underline{v} \in V$, $-\underline{v} \in V$ adalah tunggal

(4) $0\underline{x} = \underline{0}$ ; $(-1)\underline{x} = -\underline{x}$ ; $n\underline{x} = \underline{x} + \underline{x} + \ldots + \underline{x}$ ( $n$ suku) ; $a\underline{x} = \underline{0} \Rightarrow a = 0$ atau $\underline{x} = \underline{0}$, untuk setiap $\underline{x} \in V$ dan $a \in K$.

## C. SUBRUANG (*SUBSPACE*)

1. Kriteria Subruang.

Jika $V$ adalah ruang vektor atas medan $K$ dan $S \subseteq V$ dan $S \neq \phi$, maka $S$ adalah subruang dari $V$ jika dan hanya jika

a. $\underline{x}, \underline{y} \in S \Rightarrow \underline{x} + \underline{y} \in S$, untuk setiap $\underline{x}, \underline{y} \in S$

b. $k \in K, \underline{x} \in S \Rightarrow k\underline{x} \in S$, untuk setiap $\underline{x} \in S$, $k \in K$.

2. Irisan subruang.

   Jika $S$, $T$ adalah subruang dari ruang vektor $V$ atas medan $K$, maka $S \cap T$ adalah subruang dari $V$.

## D. HIMPUNAN PEMBANGUN ATAU PERENTANG

Jika $V$ adalah ruang vektor atas medan $K$ , $S = \{x_1, x_2, \ldots\} \subset V$ dan $c_1, c_2, \ldots, c_n$ adalah skalar, bentuk $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ disebut kombinasi linear dari $S$.

a. $\mathrm{Sp}(S) = \{ c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \mid x_i \in S, c_i \in K \}$, himpunan semua kombinasi linear dari $S$. Untuk $S = \phi$, didefinisikan $\mathrm{Sp}(S) = \{0\}$.

b. $\mathrm{Sp}(S)$ adalah subruang dari $V$; $S$ disebut himpunan pembangun dari $\mathrm{Sp}(S)$.

**( Jika $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots , \mathbf{v}_r$ adalah vektor-vektor di dalam sebuah ruang vektor *V* dan jika tiap-tiap vektor di dalam *V* dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots , \mathbf{v}_r$ maka kita katakan bahwa vektor-vektor ini <u>membangun/merentang</u> *V* )**

## E. BERGANTUNGAN LINEAR

1. Misalkan $V$ ruang vektor atas medan $K$ dan $S = \{v_1, v_2, \ldots \mid v_r \in V\}$.
2. $S$ disebut <u>bergantungan linear</u>/ <u>tak bebas linear</u> (***linearly dependent***) jika persamaan $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = \underline{0}$ menghasilkan nilai-nilai $c_r$ yang tidak semuanya 0. Jika dalam persamaan itu memberikan semua $c_r = 0$, maka $S$ disebut <u>bebas linear</u> **(*linearly independent*).**
3. Jika $y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$, maka dikatakan y bergantungan linear pada $S$.

4. Jika $S$ memuat vektor nol, maka $S$ bergantungan linear. Jika $S$ bergantungan linear dan $S \subset T$ , maka $T$ juga bergantungan linear.
5. Konvers dari (4): Jika $S$ bebas linear, maka $S$ tidak memuat vektor nol; jika $S$ bebas linear dan $T \subset S$, maka $T$ bebas linear.
6. Jika $S_1$ diperoleh dari himpunan $S$ dengan membuang vektor-vektor yang bergantungan pada $S$, maka $\mathrm{Sp}(S_1) = \mathrm{Sp}(S)$.

## F. BASIS DAN DIMENSI

1. Himpunan vektor $B = \{\underline{b}_1, \ \underline{b}_2, \ \dots \ , \ \underline{b}_n\}$ disebut **basis** untuk ruang vektor $V$ jika ***B* bebas linear dan *B* membangun *V***; yakni untuk setiap $v \in V$, terdapatlah dengan tunggal skalar-skalar $c_1, c_2, \dots , c_n$ sedemikian sehingga $v = \ c_1 \underline{b}_1 + c_2 \underline{b}_2 + \dots + c_n \underline{b}_n$.

   Dimensi ruang vektor $V$, ditulis **dim (*V*),** adalah maksimum banyaknya vektor basis yang membangun ruang itu.
2. Jika ruang vektor $V$ **berdimensi *n***, maka
   a. setiap basis untuk $V$ memuat ***n* unsur**;
   b. setiap himpunan yang bebas linear terdiri atas $n$ unsur adalah basis;
   c. setiap himpunan **lebih dari *n* vektor** adalah bergantungan linear.
3. Jika $S$ subruang dari $V$, maka $\dim(S) \leq \dim(V)$.

   Ruang nol berdimensi 0.
4. Basis pokok untuk $R^n$ adalah $e_1 = (1, 0, 0, \dots , 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots , 0)$, $\dots$ , $e_n = (0, 0, \dots , 1)$. Basis pokok untuk $P_n$ (berdimensi $n$+1) adalah $\{1, t^2, \dots , t^n\}$
5. Jika $V$ ruang vektor berdimensi-$n$ dan $k < n$, maka setiap himpunan bebas linear terdiri atas $k$ unsur $\{u_1, u_2, \dots , u_k\}$ dapat diperluas menjadi basis $\{u_1, u_2, \dots , u_k, u_{k+1}, \dots , u_n\}$ untuk $V$.

6. Jika $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n\}$ basis untuk ruang vektor $V$, $\underline{x} \in V$ dan $c_1, c_2, \dots, c_n$ adalah skalar-skalar sedemikian sehingga $\underline{x} = c_1 \underline{b}_1 + c_2 \underline{b}_2 + \dots + c_n \underline{b}_n$, maka skalar-skalar $c_r$ disebut komponen-komponen atau koordinat vektor $\underline{x}$ terhadap basis $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n\}$ ; dan komponen-komponen ini tunggal; komponen ke $r$ dari vektor basis $b_r$ terhadap basis $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n\}$ adalah 1 dan 0 ntuk yang lainnya.

7. Untuk sebarang vektor, komponen dari jumlah vektor-vektor adalah jumlah dari komponen-komponennya, dan komponen perkalian skalar adalah perkalian skalar komponennya.

8. Misalkan $V$ dan $V'$ adalah dua buah ruang vektor atas medan $K$. $V$ dan $V'$ dikatakan isomorphik (ditulis $V \cong V'$ ) jika ada aturan sedemikian sehingga untuk setiap unsur $v$ di $V$ terdapat unsur yang bersesuaian dengan ($\leftrightarrow$) $v'$ di $V'$ sedemikian sehingga

   i) setiap unsur $v' \in V' \leftrightarrow$ tepat satu unsur $v \in V$;

   ii) $v' + w'$ di $V' \leftrightarrow v + w$ di $V$;

   iii) $kv'$ di $V' \leftrightarrow kv$ di $V$, untuk sebarang skalar $k$.

   (1) Jika $V \cong U$ dan $U \cong W$, maka $V \cong W$.

   (2) Jika dim ($V$) = $n$, maka $V \cong K^n$.

   (3) $\underline{0} \in V \leftrightarrow \underline{0}' \in V'$; $S \subset V \leftrightarrow S' \subset V'$, jika $S$ bergantungan linear, maka $S'$ juga demikan; dim ($S$) = dim ($S'$); dim ($V$) = dim ($V'$).

9. Definisi: (Jumlah subruang)

   Jika $S, T \subset$ ruang vektor $V$, dengan $S, T \neq \phi$, didefinisikan dengan $S + T = \{s + t \mid s \in S, t \in T\}$.

10. Jika $S$ dan $T$ adalah subruang-subruang dari suatu ruang vektor $V$, maka $S + T$ adalah subruang dari $V$, dan $S$, $T$ masing-masing subruang dari $S + T$.

11. Jika $S + T = U$ dan untuk setiap $u \in U$ dapat ditulis secara tunggal sebagai $u = s + t$, dengan $s \in S$ dan $u \in U$ , maka disebut jumlah langsung dari $S$ dan $T$ , dan dituliskan $U = S \oplus T$.
12. Jumlah $S + T$ adalah jumlah langsung jika dan hanya jika $S \cap T = \{0\}$.
13. Dim $(S \oplus T)$ = dim $(S)$ + dim $(T)$.
14. Jika $S \oplus T = U$, maka masing-masing subruang $S$ dan $T$ disebut subruang komplementer satu sama lain di $U$.
15. Jika $T$ adalah suatu komplemen dari $S$ di $V$ , maka dim $(T) = n -$ dim $(S)$.
16. Jika $S, T$ subruang dari $V$, $T_1$ komplemen dari $S \cap T$ di $T$, maka $S + T = S \oplus T_1$.
17. Dim $(S + T)$ = dim $(S)$ + dim $(T)$ – dim $(S \cap T)$.
18. Jika $V = S \oplus (X \oplus Y)$ maka $V = (S \oplus X) \oplus Y$.

## G. RANK MATRIKS

1. Jika dalam SPL $Ax = b$, baris-baris pada matriks $A(p\mathrm{x}q)$ bebas linear, maka SPL itu paling sedikit mempunyai satu penyelesaian.
2. Definisi-1.

   Misalkan $A$ adalah matriks $p\mathrm{x}q$ dengan entri unsur-unsur medan $K$.

   **Ruang baris** dari $A$ adalah subruang $K^q$ yang dibangun oleh baris-baris dari $A$. Di sini $K$ dapat medan real $R$ atau kompleks $C$ tergantung apakah $A$ itu matriks nyata atau kompleks.

   ( Tinjaulah matriks A(m x n). Subruang dari $R^n$ yang dibangun oleh vektor-vektor baris dinamakan **ruang baris (*row space*)** dari A dan subruang dari $R^m$ yang dibangun oleh vektor-vektor kolom dinamakan **ruang kolom (*column space*)** dari A ).

3. Definisi-2.

**Rank baris** dari $A$ adalah dimensi dari ruang baris. Alternatifnya, rank baris dari $A$ adalah maksimum banyaknya baris dari $A$ yang bebas linier.

4. Jika rank baris dari $A$ sama dengan banyaknya baris, maka untuk sebarang vektor $\underline{b}$, persamaan $Ax = b$ mempunyai paling sedikit satu penyelesaian.

5. Definisi-3.

Ruang kolom dari matriks $A(p\text{x}q)$, adalah subruang dari $K^p$ yang dibangun oleh kolom-kolom dari $A$. Rank kolom dari $A$ adalah dimensi dari ruang kolom, yakni maksimum banyaknya kolom yang bebas linear.

6. a. Persamaan $Ax = b$ mempunyai penyelesaian jika dan hanya jika $b$ anggota dari ruang kolom dari $A$.

   b. Persamaan $Ax = b$ mempunyai penyelesaian untuk setiap $b$ jika dan hanya jika rank kolom dari $A$ sama dengan rank baris.

7. Jika rank kolom dari $A$ sama dengan banyaknya kolom, maka persamaan $Ax = b$ mempunyai penyelesaian tunggal.

8. Definisi-4.

Sebuah matriks dikatakan mempunyai **rank baris penuh** jika rank baris sama dengan banyak baris**.** Dikatakan mempunyai **rank kolom penuh** jika rank kolom sama dengan banyak kolom.

9. Persamaan $Ax = b$ mempunyai penyelesaian untuk setiap $b$ jika dan hanya jika $A$ mempunyai rank baris penuh.

## H. TEOREMA RANK

1. Teorema Rank: OBE tidak mengubah rank baris dan rank kolom suatu matriks.
2. Dalam setiap matriks, rank baris sama dengan rank kolom.
3. Definisi rank penuh: Matriks $A(p\text{x}q)$ dikatakan mempunyai rank penuh jika rank($A$) sama dengan bilangan terkecil di antara $p$ dan $q$. Dengan kata lain jika rank($A$) = min $\{p, q\}$.