BAB 6 PERMASALAHAN NILAI EIGEN/KARAKTERISTIK DAN PERSAMAAN EIGEN/KARAKTERISTIK

A. PERSAMAAN EIGEN/KARAKTERISTIK

1. Jika $A(nxn)$, $\underline{v}$ adalah sebuah vektor n tak nol yang memenuhi persamaan $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$ disebut **vektor eigen** (*eigenvector*) dari A dan λ disebut **nilai eigen** (*eigenvalue*) yang bersesuaian dengan $\underline{v}$.

   Catatan: '*Eigen*' (bahasa Jerman) artinya 'asli' ('proper').

2. Definisi-1.

   Polinomial karakteristik dari matriks $A(nxn)$, adalah polinomial $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. **Persamaan karakteristik** dari A adalah $p(\lambda) = 0$ atau $\det(A - \lambda I) = 0$, dengan p adalah polinomial karakteristiknya.

3. Setiap matriks persegi paling sedikit mempunyai satu nilai eigen di C.

4. Teorema-1:

   Jika A adalah sebuah matriks n x n, maka pernyataan-pernyataan yang berikut ekivalen satu sama lain.

   a) λ adalah nilai eigen dari A.

   b) Sistem persamaan $(A - \lambda I)\underline{v} = \underline{0}$ mempunyai pemecahan yang tak trivial.

   c) Ada sebuah vektor tak nol $\underline{v}$ di dalam R^n sehingga $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$.

   d) λ adalah pemecahan real dari persamaan karakteristik $\det(A - \lambda I) = 0$.

B. DIAGONALISASI (*DIAGONALIZABLE*)

1. Definisi-2.

   Sebuah matriks persegi A dinamakan **dapat didiagonalisir** jika ada sebuah matriks P yang dapat dibalik sehingga $P^{-1}AP$ diagonal; matriks P dikatakan **mendiagonalisir *A***.

2. Teorema-2:

   Jika A adalah sebuah matriks n x n, maka pernyataan-pernyataan yang berikut ekivalen satu sama lain.

   a) A dapat didiagonalisir.

   b) A mempunyai n vektor eigen yang bebas linier.

3. Prosedur untuk mendiagonalkan sebuah matriks $A(n$ x $n)$ yang dapat didiagonalkan:

   Langkah 1. Carilah n vektor eigen yang bebas linier A, p_1, p_2, … , p_n.

   Langkah 2. Bentuklah matriks P yang mempunyai p_1, p_2, … , p_n sebagai vektor-vektor kolomnya.

   Langkah 3. Matriks $P^{-1}AP$ akan didiagonal dengan λ_1, λ_2, … , λ_n sebagai entri-entri diagonalnya yang terurutkan, di mana λ_i adalah nilai eigen yang bersesuaian dengan p_i , $i = 1, 2, \ldots, n$.

4. Teorema-3:

   Jika v_1, v_2, … , v_k adalah vektor-vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen yang berbeda λ_1, λ_2, … , λ_k , maka $\{ v_1, v_2, \ldots, v_k \}$ adalah sebuah himpunan yang bebas linier.

5. Teorema-4:

   Jika sebuah matriks $A(n$ x $n)$ mempunyai n nilai eigen yang berbeda, maka A dapat didiagonalisasi.

C. KELIPATAN (KERANGKAPAN) NILAI EIGEN

1. Definisi-3.

   Kelipatan aljabar dari suatu nilai eigen λ adalah pangkat dari $(x - \lambda)$ yang terjadi pada pemfaktoran polinomial karakteristik $p(\lambda)$. Nilai eigen dengan kelipatan aljabar 1 disebut **nilai eigen sederhana** secara aljabar.

2. Definisi-4.

   Lacak (*trace***)** dari suatu matriks $A(n\text{x}n)$ didefinisikan sebagai jumlah entri-entri diagonalnya. Lacak ditandakan dengan $\mathbf{tr}(\boldsymbol{A})$.

   Jadi, $\mathbf{tr}(\boldsymbol{A}) = \Sigma a_{rr}$.

3. Matriks seiring untuk polinomial $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0$ adalah matriks dengan baris terakhir $-a_0, -a_1, \ldots, -a_{n-1}$, dengan 1 pada posisi $(s, s+1)$ untuk $s = 1, \ldots, n$-1, dan nol yang lain-lain.

4. Suatu matriks $M(2n\text{x}2n)$ disebut matriks **simplektik** jika $M^TJM = J$, di mana J adalah matriks dengan semua entrinya nol terkecuali untuk n setiap blok yang disusun ke bawah menurut diagonal, dan setiap bloknya adalah $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.