BAB 7 TRANSFORMASI LINEAR PADA RUANG VEKTOR

A. DEFINISI DASAR

1. Definisi-1

   Suatu pemetaan f dari ruang vektor V ke ruang vektor W adalah aturan perkawanan sedemikian sehingga setiap vektor $v \in V$ dikawankan dengan vektor tunggal $w \in W$. Kita mengatakan bahwa f memetakan vektor v ke w, dan juga f memetakan ruang V ke W.

2. Definisi-2.

   Kata-kata pemetaan, operator, dan transformasi bermakna sama dengan pemetaan. Pada transformasi $f: V \to W$, ruang V disebut *domain* dan W disebut *kodomain* untuk f. Jika $u \in V$, maka vektor $f(u) \in W$ disebut *bayangan* dari u oleh f.

3. Definisi-3.

   Misalkan V dan W adalah ruang-ruang vektor atas medan K. Suatu transformasi linear dari V ke W adalah pemetaan $f: V \to W$ sedemikian sehingga $f(u + w) = f(u) + f(v)$ dan $f(ku) = kf(u)$ untuk semua $u, v \in V$ dan semua skalar $k \in K$.

B. BAYANGAN DAN RANK DARI PEMETAAN LINEAR

1. Definisi-1.

   Jika S adalah sebarang subruang dari ruang V, dan $f: V \to W$. Bayangan S oleh f , ditulis $f(S)$ atau im (S), adalah himpunan $\{f(v) \subseteq W \mid v \in S \}$.

2. Misalkan $f: V \to W$ adalah pemetaan linear. Jika S adalah subruang dari V, maka $f(S)$ adalah subruang dari W.

3. Jika S adalah subruang berdimensi-finit dari domain suatu transformasi linear f , maka dim ($f(S) \leq$ dim (S).

4. Definisi-2.

   Jika $f: V \to W$ adalah pemetaan linear, bayangan dari V oleh f disebut bayangan pemetaan, dan ditandakan dengan im (f). Jadi im (f) = $f(V)$ = $\{f(v) \in W \mid v \in V\}$.

5. Jika pemetaan $f: V \to W$ linear, maka im (f) adalah subruang dari W.

6. Definisi-3.

   Rank suatu transformasi linear adalah dimensi bayangannya. Jika bayangan itu berdimensi-infinit, kita katakan bahwa transformasi itu mempunyai rank infinit.

   Jadi, jika $T: V \to V$ linear, maka rank (T) =dim (im (T)).

7. Jika f adalah transformasi linear dengan domain bedimensi-finit (ditandakan dengan dom (f)), maka rank (f) $\leq$ dim (dom (f)).

C. RUANG NUL DARI TRANSFORMASI LINEAR

1. Definisi-1.

   Ruang nul atau **kernel** dari pemetaan linear $f: V \to W$ adalah himpunan semua vektor $v \in V$ yang dipetakan ke vektor nol oleh f. Kernel dari f ini dituliskan ker (f). Jadi, ker (f) = $\{ v \in V \mid f(v) = 0\}$.

2. Kernel suatu pemetaan adalah subruang dari domain.

3. Definisi-2.

   Dimensi suatu kernel dari suatu pemetaan disebut **nulitas** dari pemetaan. Pemetaan singular adalah pemetaan dengan nulitas positif; pemetaan nonsingular adalah pemetaan yang nulitas nol.

4. Teorema rank plus nulitas.

   Jika $f: V \to W$ suatu pemetaan linear, dan V berdimensi-finit, maka rank (f) + nulitas (f) = dim (domain f).

5. Definisi-3 (penerapan pada matriks)

Bayangan, kernel atau ruang nul, dan nulitas dari suatu matriks A berordo pxq adalah berturut-turut bayangan, kenel, dan nulitas dari operator $a\colon R^p \to R^p$ yang didefinisikan dengan $a(x) = Ax$. Suatu matriks adalah **singular** jika nulitasnya positif, dan **nonsingular** jika nulitasnya nol.

D. SISTEM PERSAMAAN LINEAR (SPL)

Persamaan operator linear adalah persamaan-persamaan berbentuk $f(x) = c$, dengan $f\colon V \to W$ suatu operator linear, c unsur yang diberikan di W, dan x adalah variabel. Himpunan penyelesaian dari persamaan adalah himpunan semua x yang memenuhi $f(x) = c$.

Persamaan $f(x) = c$ mempunyai penyelesaian jika dan hanya jika $c \in$ im (f); Jika penyelesaian itu ada, maka:

(i) jika f nonsingular, maka terdapatlah tepat satu penyelesaian;

(ii) jika f singular, maka terdapatlah takhingga penyelesaian; Jika x adalah sebarang penyelesaian, maka himpunan penyelesaian itu adalah $\{X + k \mid k \in ker(f)\}$.

E. PERSAMAAN LINEAR $Ax = y$

SPL dengan p persamaan dan q variabel dapat disajikan oleh matriks $Ax = y$, dengan A adalah matriks pxq, x adalah vektor q, dan y vektor p. Persamaan ini dapat dipandang sebagai operator (pemetaan) linear $a\colon K^q \to K^p$ yang didefinisikan dengan $a(x) = Ax$ untuk semua $x \in K^q$. Dalam pemetaan ini: dom (a) = K^q, im (a) = $\{ y \in K^p \mid Ax = y)$, ker ($a$) = $\{ x \in K^q \mid Ax = 0\}$. Dim (dom ($a$)) = dim ($K^q$) = q, dim (im (a)) = rank (A), dim (ker (a)) = nulitas (a) = q – rank (A) – [teorema rank plus nulitas]. Persamaan $Ax = y$ mempunyai solusi x

jika $y \in$ im (a). Perlu diingat bahwa rank (A) $\leq$ minimum (p, q). Kasus-kasus yang dapat terjadi:

Kasus 1: Banyak persamaan melebihi banyak variabel: $p < q$.

(i) Jika rank (A) $< p < q$ = Dim (dom (a)) $\Rightarrow$ nulitas (a) $> 0 \Rightarrow$ a singular $\Rightarrow$ ada banyak solusi jika $y \in$ im (a) dan tidak ada solusi jika $y \notin$ im (a);

(ii) Jika rank (A) = p = Dim K^p $\Rightarrow$ a adalah onto $\Rightarrow$ untuk setiap y ada solusi.

Dari sisi lain rank (a) = $p < q$ $\Rightarrow$ nulitas (A) = $q - p > 0 \Rightarrow$ a singular $\Rightarrow$ terdapat solusi jika $y \in$ im (a) atau tidak ada solusi jika $y \notin$ im (a);

Kasus 2: Banyak persamaan melebihi banyak variabel: $p > q$.

(i) Jika rank (A) $< q < p$ = im (a) $\subset K^p$. Dari sisi lain nulitas (a) = q – rank (A) $> 0 \Rightarrow$ a singular $\Rightarrow$ terdapat banyak solusi jika $y \in$ im (a) atau tidak terdapat solusi jika $y \notin$ im (a);

(ii) Jika rank (A) = q = Dim (dom (a)) $\Rightarrow$ nulitas (a) = q – rank (a) = 0 $\Rightarrow$ a nonsingular $\Rightarrow$ terdapat solusi tunggal jika $y \in$ im (a) dan tidak ada solusi jika $y \notin$ im (a);

Kasus 3: Banyak persamaan sama dengan banyak variabel: $p = q$.

(i) Jika rank (A) = $q = p \Rightarrow$ im (A) = K^p. Dari sisi lain nulitas (a) = q – rank (A) = 0. Jadi terdapat solusi tunggal jika $y \in$ im (a);

(ii) Jika rank (A) $< p = q \Rightarrow$ im (A) $\subset K^p$. Dari sisi lain nulitas (a) = q – rank (A) $> 0 \Rightarrow$ a singular. Jadi, ada banyak solusi jika $y \in$ im (a) dan tidak ada solusi jika $y \notin$ im (a);

F. INVERSE

1. Definisi-1.

   Pemetaan $f\colon V \to W$ adalah **invertibel** (terbalikkan) jika untuk setiap vektor $w \in W$ terdapat dengan tunggal vektor $v \in V$ sedemikian sehingga $f(v) = w$.

2. Definisi-2.

   Jika $f\colon V \to W$ adalah **invertibel** (terbalikkan), maka inverse dari ***f*** adalah transformasi $W \to V$ yang memetakan setiap vektor $w \in W$ ke unsur tunggal vektor $v \in V$ sedemikian sehingga $f(v) = w$. Inverse dari f dinotasikan dengan f^{-1}.

3. Jika pemetaan $f\colon U \to V$ adalah pemetaan linear, maka:

   a). f adalah invertibel jika dan hanya jika im (f) = V dan nulitas (f) = 0.

   b). Jika U berdimensi-finit, maka f invertibel jika dan hanya jika dim (V) = dim (U) dan nulitas (f) = 0.

4. Pemetaan $K^p \to K^p$ terkait dengan matriks pxp adalah invertibel jika dan hanya jika matriks yang terkait juga invertibel.

G. VEKTOR EIGEN

1. Definisi-1.

   Diberikan pemetaan linear $f\colon V \to V$. Jika $f(v) = \lambda v$ dengan λ suatu skalar dan $v \neq 0$, maka v disebut suatu **vektor eigen** dari f, dan λ adalah **nilai eigen** yang terkait.

2. Notasi.

   Untuk sebarang ruang vektor, kita tandakan i sebagai pemetaan identitas $i : V \to V$ dengan sifat $i(v) = v$ untuk semua $v \in V$.

3. Suatu skalar λ adalah nilai eigen dari pemetaan linear $f\colon V \to V$ jika dan hanya jika pemetaan $f - \lambda i\colon V \to V$ adalah singular, dengan i adalah pemetaan identitas $i\colon V \to V$. Anggota-anggota bukan nol dari

ker (f - λi) adalah vektor-vektor eigen yang terkait dengan nilai eigen λ.

4. Jika λ adalah suatu nilai eigen dari pemetaan linear $f: V \rightarrow V$, maka himpunan vektor eigen yang terkait dengan λ, bersama-sama dengan vektor nol, membangun sebuah subruang dari V. Subruang ini disebut **ruang eigen** yang terkait dengan λ.
5. Definisi-2.

   Kerangkapan geometrik dari suatu nilai eigen adalah dimensi ruang-ruang eigen. Nilai eigen sederhana atau tak tersusut adalah nilai eigen dengan kerangkapan 1; nilai eigen kembar adalah kerangkapan 2, dan seterusnya.
6. Definisi-3.

   Subruang invarian untuk pemetaan linear $f: V \rightarrow V$ adalah sebuah subruang S dari V dengan sifat untuk semua $s \in S$, maka $f(s) \in S$. Kita katakan bahwa S adalah **invarian** oleh f.

H. PERMASALAHAN NILAI EIGEN

1. Definisi-1.

   Matriks atas R adalah matriks dengan entri bilangan-bilangan real.

   Matriks atas C adalah matriks dengan entri bilangan-bilangan kompleks. Pada umumnya, matriks atas sebarang medan K adalah matriks dengan entri unsur-unsur dari K.
2. Definisi-2.

   Nilai-nilai eigen dan vektor-vektor eigen suatu matriks $A(n\text{x}n)$ atas medan K didefinisikan sebagai nilai-nilai eigen dan vektor-vektor eigen dari pemetaan $a: K^n \rightarrow K^n$ yang didefinisikan dengan $a(v) = Av$ untuk semua v di K^n.

3. Definisi-3.

Bilangan real λ dikatakan nilai eigen dari matriks $A(n\text{x}n)$ atas R jika terdapat vektor v real $v \neq 0$ sedemikian sehingga $Av = \lambda v$. Bilangan kompleks λ dikatakan nilai eigen dari matriks $B(n\text{x}n)$ atas C jika terdapat vektor n kompleks $v \neq 0$ sedemikian sehingga $Bv = \lambda v$. Dalam setiap kasus v vektor n, vektor eigen dari A.

4. Jika A adalah matriks real, maka setiap nilai eigen dari A atas R adalah juga nilai eigen atas C.

5. Vektor-vektor eigen bebas linear.

Jika operator $f\colon V \to V$ mempunyai n nilai-nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ yang berlainan, maka vektor-vektor yang terkait $e_1, e_2, \ldots, e_n$ adalah bebas linear.

6. Banyaknya nilai-nilai eigen setiap operator linear pada ruang berdimensi n tidak mungkin lebih besar daripada n.

I. ROTASI DAN MATRIKS ORTOGONAL

1. Suatu rotasi mentransformasikan himpunan ortonormal ke himpunan ortonormal yang lain (panjang dan sudut tidak berubah).

2. Definisi-1.

Suatu matriks real A disebut **ortogonal** jika $A^TA = I$.

3. Jika A ortogonal, maka A^T juga ortogonal.

4. Jika A adalah matriks ortogonal $n\text{x}n$, maka

a). untuk sebarang x vektor n, $\|Ax\| = \|x\|$;

b). untuk sebarang x dan y vektor n, $(Ax)^T (Ay) = x^Ty$.

5. Jika S adalah himpunan ortonormal terdiri atas n vektor di R^n, maka terdapatlah suatu matriks $A(n\text{x}n)$, dengan kolom-kolom A adalah n vektor di S sedemikian sehingga A mentransformasikan basis pokok ke himpunan S.