HANDOUT MATRIKS & RUANG VEKTOR

KULIAH 1

1. DEFINISI MATRIKS

MATRIKS adalah kumpulan bilangan-bilangan yang disusun secara khusus dalam bentuk baris dan kolom sehingga berbentuk empat persegi panjang.

Suatu matriks A yang terdiri dari m baris dan n kolom dapat dituliskan sebagai $A_{m.n}$ atau $A_{(m \times n)}$.

Beberapa Jenis Matriks Berdasarkan Susunan Elemennya

1. Matriks kuadrat atau matriks bujur sangkar
2. Matriks nol
3. Matriks diagonal
4. Matriks satuan
5. Matriks skalar
6. Matriks tridiagonal
7. Matriks quasi-diagonal
8. Matriks segitiga bawah dan segitiga atas
9. Matriks simetris
10. Matriks skew
11. Matriks skew simetris

Baca-cetak Vektor Baris

Program komputer dalam QUICK BASIC untuk membaca-mencetak vektor baris:

```
DIM C(5)
'====================================
' NRD = INPUT DEVICE CODE  NUMBER
' NWR = OUTPUT DEVICE CODE  NUMBER
' NAMA PROGRAM : VEX.BAS
'====================================
CLS
NRD = 1
OPEN "DATA7.DAT" FOR INPUT AS #NRD
FOR I = 1 TO 5
     INPUT #NRD, C(I)
NEXT I
CLOSE (NRD)

NWR = 3
OPEN "DATA8.DAT" FOR OUTPUT AS #NWR
FOR I = 1 TO 5
     PRINT #NWR, C(I); " ";
NEXT I
CLOSE (NWR)
END
```

KULIAH 2

2. OPERASI DENGAN MATRIKS

2.1 PENJUMLAHAN dua buah matriks hanya didefinisikan apabila **kedua matriks yang dijumlahkan itu sejenis.** Dua buah matriks disebut sejenis bila ukuran keduanya sama.

Bila $A_{m.n} + B_{m.n} = C_{m.n}$, dalam hal ini elemen-elemen dari matriks $C_{m.n}$ adalah:

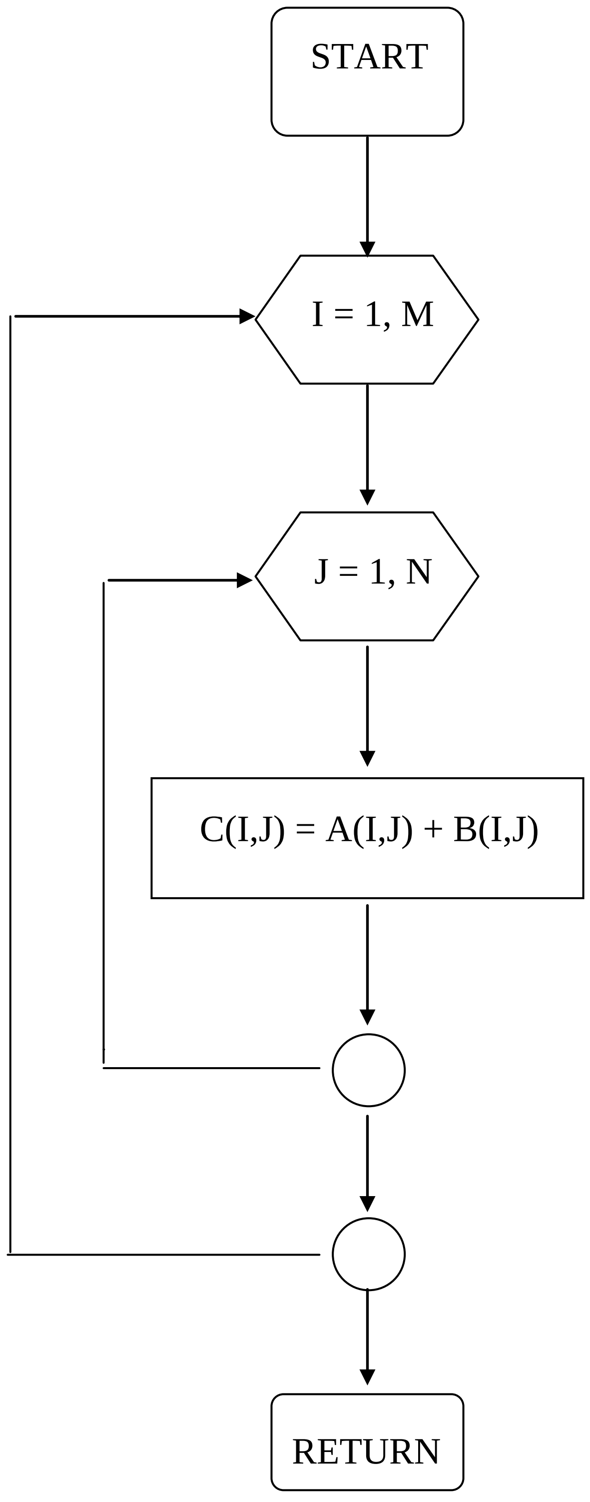
$$\boxed{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}} \quad \text{untuk } i = 1, 2, ..., m$$
$$j = 1, 2, ..., n.$$

Subprogram Subroutine Penjumlahan Matriks:

Diagram alir:

SUBROUTINE SUMN (M, N, A, B, C)

DIMENSION A(M,N), B(M,N), C(M,N)


START
I = 1, M
J = 1, N
C(I,J) = A(I,J) + B(I,J)
RETURN

2.2 PENGURANGAN Matriks

Bila $A_{m.n} - B_{m.n} = C_{m.n}$, dalam hal ini elemen-elemen dari matriks $C_{m.n}$ adalah:

$$\boxed{c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}} \quad \text{untuk } i = 1, 2, ..., m$$
$$j = 1, 2, ..., n.$$

Hukum-hukum yang berlaku pada penjumlahan matriks, berlaku juga pada pengurangan matriks.

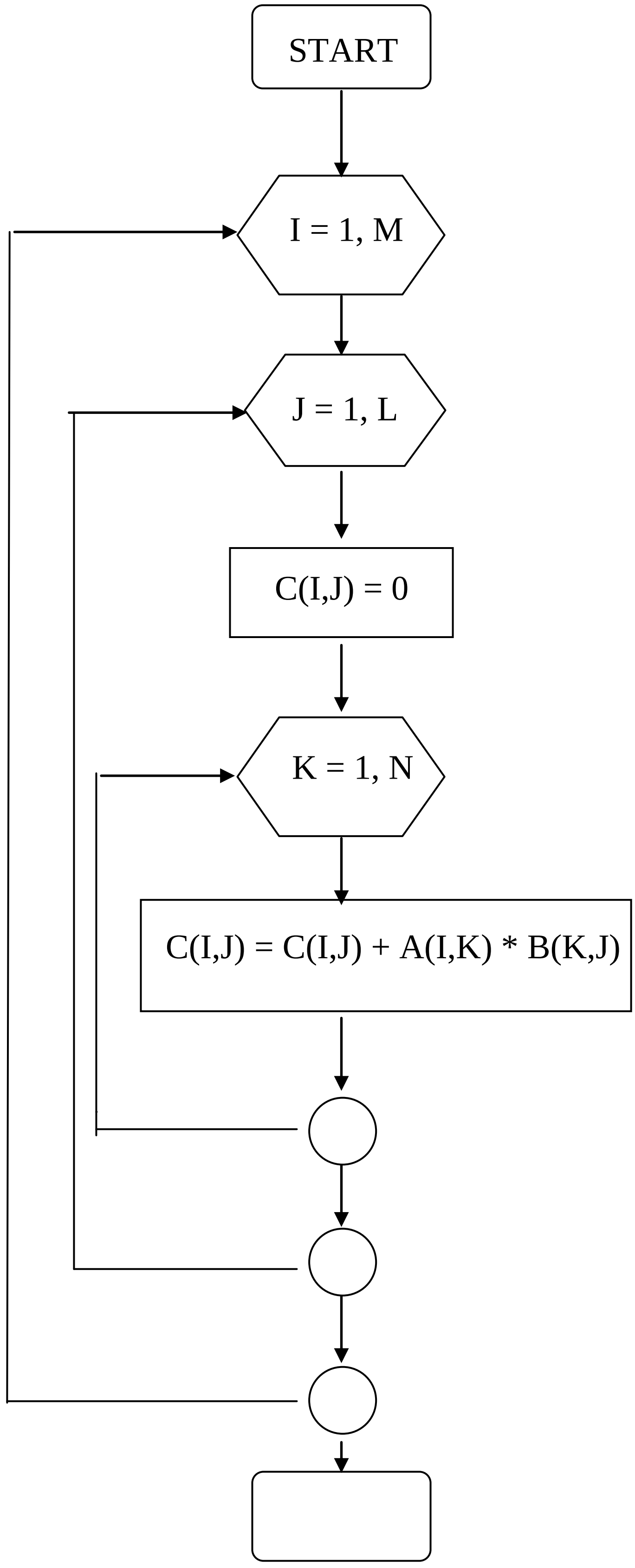
2.3 PERKALIAN Matriks

Dua buah matriks A dan B bisa dikalikan apabila **jumlah kolom matriks A sama dengan jumlah baris matriks B.**

Dalam bentuk umum dapat dituliskan:

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj}} \quad \text{dengan } i = \text{index baris} = 1, 2, ..., m$$
$$j = \text{index kolom} = 1, 2, ..., n.$$

Subprogram Subroutine Perkalian Matriks:



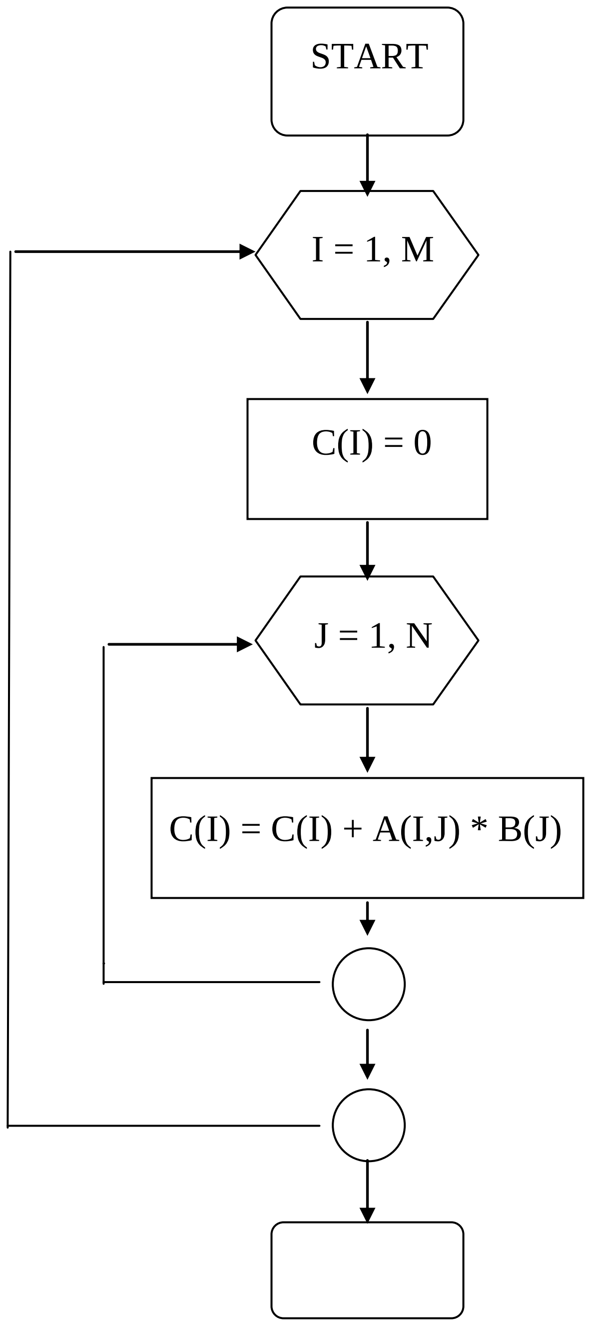
RETURN

2.4 PERKALIAN MATRIKS DENGAN VEKTOR KOLOM

Dalam bentuk umum dapat dituliskan:

$$c_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_j \quad \text{untuk } i = 1, 2, \ldots, m$$
$$j = 1, 2, \ldots, n.$$

Subroutine Perkalian Matriks dengan Vektor Kolom



RETURN

KULIAH 3

3.1 PERKALIAN VEKTOR BARIS DENGAN MATRIKS

Andaikan diketahui

Vektor baris (matriks baris) X = (x_1 x_2 ... x_m)

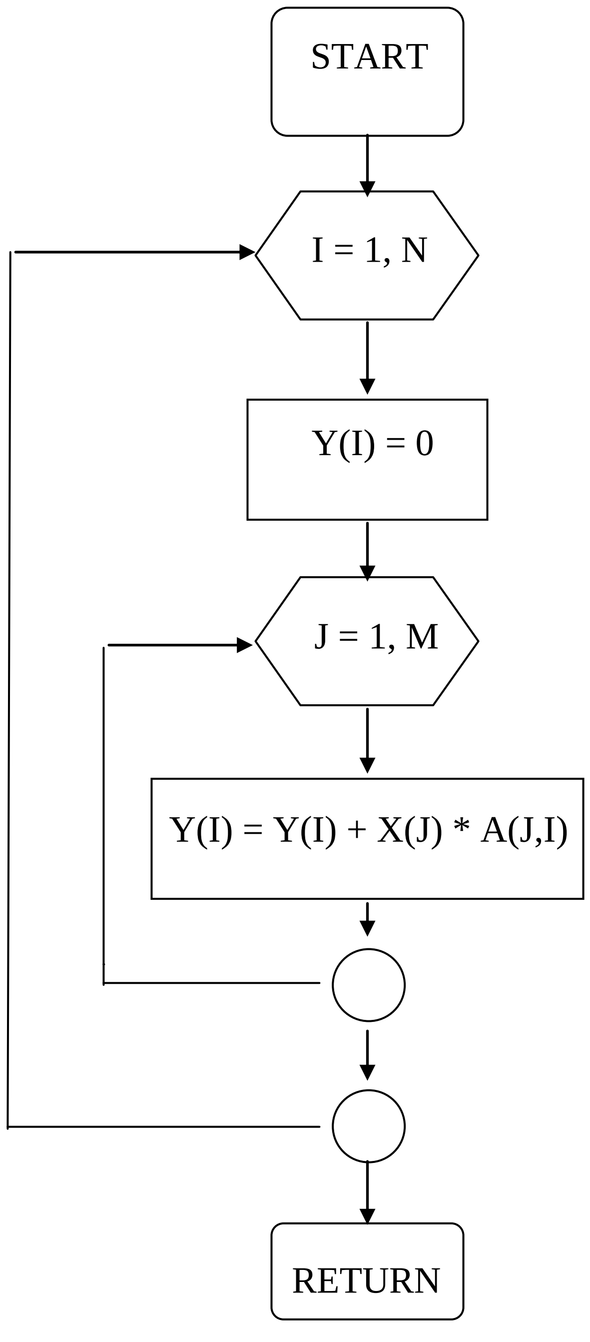
$$matriks\, A = \begin{pmatrix} a & a & \dots & a \\ a & a & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Perkalian antara keduanya dapat dikerjakan bila jumlah kolom dari matriks yang pertama sama dengan jumlah baris dari matriks yang kedua. Dalam bentuk umum dapat dituliskan:

$$\boxed{Y_i = \sum_{j=1}^{n} x_j a_{ji}} \quad \text{untuk } i = 1, 2, \dots, n$$

$$j = 1, 2, \dots, m.$$

Subroutine Perkalian Vektor Baris dengan Matriks



3.2 PEMBAGIAN DENGAN MATRIKS

Istilah pembagian dengan matriks tidak begitu populer. Untuk membagi matriks A dengan B dilakukan dengan cara sebagai berikut:

Untuk mencari $C = \frac{A}{B}$ dikerjakan C = A.B^{-1} , dengan B^{-1} adalah invers dari matriks B. Didefinisikan B.B^{-1} = I dengan I adalah matriks satuan.

3.3 DEKOMPOSISI MATRIKS

Suatu matriks A dapat didekomposisi menjadi matriks segitiga bawah (L) dan matriks atas (U), yaitu A = LU.

Dekomposisi tersebut unik bila diagonal utama matriks L atau U berharga satu. Misalkan kita mempunyai matriks A(4 x 4), maka:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Yang akan dicari adalah elemen-elemen dari matriks L dan U.

Bentuk umum dapat dirumuskan sebagai berikut:

$L_{i1} = a_{i1}$ untuk i = 1, n

$L_{ji} = a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk}.u_{ki}$ untuk i = 2, n

j = 2, n

KULIAH 4

3. DETERMINAN

3.1 Cara Sarrus

Untuk matriks $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, determinannya menurut Sarrus

dicari sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \text{Det (A)} = \; & (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ - \; & (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}) \end{aligned}$$

3.2 Cara Minor dan Kofaktor

$$\text{Det (A)} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \, K_{ij} \qquad j = 1, 2, ..., n$$

untuk $n > 1$.

Kofaktor K_{ij} dapat dicari dengan mempergunakan minor M_{ij}

$$K_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

M_{ij} adalah minor dari koefisien A_{ij} yang merupakan nilai determinan setelah baris ke i dan kolom ke j dari matriks A dihilangkan.

3.3 Metoda CHIO untuk Menghitung Determinan

Andaikan kita ingin mencari nilai determinan dari suatu matriks

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Menurut Chio dekomposisi determinan di atas menjadi sub-determinan berderajat 2 dapat dilakukan sebagai berikut:

$$D = \frac{1}{a_{11}{}^{n-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{31} & a_{3n} \end{vmatrix} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{n1} & a_{n3} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{11}{}^{n-2}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} \\ a_{n-1,1} & \cdots & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

dan seterusnya.

KULIAH 5

3.4 Perhitungan Determinan dengan Operasi Baris Elementer

- Perhitungan dengan memanfaatkan komputer untuk matriks ukuran besar biasanya **tidak** memakai cara minor dan kofaktor karena jumlah operasinya demikian banyak.
- Metoda untuk program komputer adalah:
  1. Ubah determinan itu menjadi determinan segitiga bawah atau atas dengan menggunakan operasi baris elementer.
  2. Nilai determinan segitiga atas (bawah) adalah hasil perkalian dari unsur-unsur diagonalnya.

Catatan : Jika dari suatu determinan dilakukan pertukaran baris maka nilai determinan tersebut berubah tandanya.

Misalkan matriks

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

dengan operasi baris elementer direduksi menjadi matriks segitiga atas

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22}' & a_{23}' & a_{24}' \\ 0 & 0 & a_{33}'' & a_{34}'' \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}''' \end{pmatrix}$$

Maka:

$$\boxed{\text{Det (A)} = (a_{11})\,(a_{22}')\,(a_{33}'')\,(a_{44}''')}$$

3.5 Perhitungan Determinan dengan Dekomposisi LU

Andaikan A = LU

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinan dari matriks L dan U di atas dapat dicari dengan cara Sarrus:

Det L = l_{11}. l_{22} . l_{33} dan Det U = 1.1.1 = 1

Det A = det (LU) = det L . det U = l_{11} . l_{22} . l_{33}

Apabila matriks A berorde n maka

Det A = l_{11} . l_{22} . l_{33} . ... . l_{nn}

KULIAH 6

4. PERSAMAAN LINIER SIMULTAN

4.1 Bentuk umum suatu persamaan linier simultan orde N adalah:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2$$
$$... \qquad ...$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n$$

Apabila semua harga b_1, b_2, ... , $b_n = 0$, persamaan tersebut disebut persamaan linier simultan yang **homogen**.

Dalam bentuk matriks, penulisan persamaan linier simultan di atas dapat disederhanakan menjadi:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$$

atau disingkat menjadi: AX = B.

Dua hal khusus yang harus diperhatikan adalah:

1. SPL simultan mempunyai penyelesaian tunggal bila matriks A adalah *reguler atau non singular* yakni Det (A) $\neq 0$.
2. SPL simultan mempunyai penyelesaian yang tak tentu atau tak mungkin diselesaikan, bila matriks A adalah *singular*, yakni Det (A) = 0.

4.2 Penyelesaian Persamaan Linier Simultan dengan Metoda Cramer

Apabila peubah dari suatu SPL orde n adalah:

X_j untuk j = 1, 2, ..., n

dan persamaan linier simultan tersebut dituliskan dalam bentuk matriks sebagai:

AX = B

maka menurut metoda Cramer

$$\boxed{x_j = \frac{Det_j(A)}{Det(A)}}$$

dalam hal ini:

$$Det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & a \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Det $_j$ (A) adalah determinan yang didapat dengan mengganti kolom ke j dari Det (A) dengan vektor kolom B.

Jadi:

$$Det_j(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & .b_1.. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .b_2.. & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & a \\ a_{n1} & a_{n2} & .b_n.. & a_{nn} \end{vmatrix}$$

KULIAH 7

4.3 Penyelesaian Persamaan Linier Simultan dengan Eliminasi Gauss

Metoda eliminasi Gauss mempergunakan operasi baris elementer untuk menghapuskan semua elemen-elemen matriks yang berada di sebelah kiri diagonal utama matriks A(n x n).

Dalam pelaksanaan metoda ini, matriks A(n x n) ini dijadikan A(n x n+1) karena vektor kolom b_n diletakkan di dalam kolom n+1.

Secara simbolis. Metoda eleminasi Gauss ini dapat diterangkan sebagai berikut:

Misalkan suatu persamaan linier simultan, dituliskan dalam bentuk persamaan matriks sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Untuk mencari harga-harga x_1, x_2, ..., x_n, matriks lengkap

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

direduksi sehingga hasil akhirnya menjadi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}' & \cdots & a_{2n}' & b_2' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{\,n} & b_n^{\,n} \end{pmatrix}$$

Dari matriks terakhir ini diperoleh:

$$x_n = \frac{b_n^{\,n}}{a_{nn}^{\,n}}$$

Dengan subtitusi mundur berturut-turut diperoleh nilai-nilai x_{n-1}, x_{n-2}, ... , x_2, x_1 .

4.4 Penyelesaian Persamaan Linier Simultan dengan Gauss-Jordan

Langkah-langkah yang dilakukan adalah:

- Bentuk matriks A(n x n) menjadi A(n x n+1) dengan meletakkan vektor kolom b_n pada kolom ke n+1 matriks A(n x n+1).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

- Dengan operasi baris elementer, matriks tersebut direduksi sehingga dihasilkan bentuk terakhir matriks tersebut adalah:

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{\ n} & 0 & \dots & 0 & b_1^{\ n} \\ 0 & a_{22}^{\ n} & \dots & 0 & b_2^{\ n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{\ n} & b_n^{\ n} \end{pmatrix}$$

- Dari hasil terakhir ini, sudah dapat disimpulkan bahwa:

$x_1 = b_1^n / a_{11}^n$

$x_2 = b_2n \ / a_{22}^n$

...

$x_n = b_n^n / a_{nn}^n$

Metoda Gauss dan Gauss-Jordan akan berfungsi dengan baik bila pivot a_{ii} adalah harga elemen yang **terbesar** dalam baris ke-i.

KULIAH 8

4.5 Penyelesaian Persamaan Linier Simultan dengan Metoda Gauss-Seidel

Metoda Gauss-Seidel ini sangat cocok untuk penyelesaian matriks berukuran besar, atau yang banyak mempunyai elemen berharga nol terserak (*Sparse*).

Cara memakai metoda Gauss-Seidel

- Tuliskan SPL

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\ldots \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n
\end{array}
$$

dalam bentuk sebagai berikut:

$$
\begin{array}{l}
x_1 = (1/a_{11})(b_1 \qquad - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ldots \qquad - a_{1n}x_n) \\
x_2 = (1/a_{22})(b_2 - a_{21}x_1 \qquad - a_{23}x_3 - \ldots \qquad - a_{2n}x_n) \\
\ldots \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\
x_{n-1} = (1/a_{n-1})(b_{n-1} - a_{n-1,1}x_1 - \ldots \qquad - a_{n-1,n-2}x_{n-2} - a_{n-1,n}x_n) \\
x_n = (1/a_{nn})(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots \qquad - a_{n,n-1}x_{n-1})
\end{array}
$$

- Kemudian dilakukan terkaan dari nilai awal, misalnya:

$$X_1^{(0)} = 0,\ x_2^{(0)} = 0,\ \ldots,\ x_n^{(0)} = 0.$$

Substitusikan nilai-nilai awal itu ke SPL bentuk terakhir, didapat

$$X_1^{(1)} = b_1/a_{11},\ x_2 = \ldots = x_n = 0$$

Substitusikan nilai-nilai ini ke baris 2 bentuk terakhir, didapat

$$X_2^{(1)} = (1/a_{22})(b_2 - a_{21}(b_1/a_{11}))$$

Demikian seterusnya sampai didapat

$X_n^{(1)} = (1/a_{nn})(b_n - a_{n1}(b_1/a_{11}) - ...a_{n,n-1}x_{n-1}^{(1)})$

- Berikutnya proses iterasi ke-2, ke-3, ..., sampai ke-n banyaknya iterasi yang diminta.

4.6 Matriks Tridiagonal dan Algoritma Thomas

Algoritma Thomas sangat cocok untuk menyelesaikan persamaan linier simultan yang dapat dibentuk menjadi matriks tridiagonal. Persamaan semacam ini banyak dijumpai dalam perhitungan numerik persamaan diferensial parsial dengan metoda beda berhingga ataupun elemen berhingga.

Misalkan persamaan matriks: AX = B

atau

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0\ldots & .a_{32}.. & .a_{33}.. & .a_{34}.. \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Matriks yang paling kiri hanya mempunyai harga di tridiagonal, sedangkan elemen-elemen di luar itu bernilai nol. Vektor kolom $X(x_1,x_2,x_3,x_4)$ diketahui.

Penyelesaian (*) dapat dilakukan dengan cara mendekomposisi matriks tridiagonal A menjadi:

A = LU

atau

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0\ldots & .a_{32}.. & .a_{33}.. & .a_{34}.. \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ 0\ldots & .l_{32}.. & .l_{33}.. & 0 \\ 0 & 0 & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u_{23} & 0 \\ 0\ldots & .0.. & .1.. & .u_{34}.. \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (**)$$

Apabila kedua matriks di ruas kanan dikalikan akan didapat bentuk umum

$l_{ij} = a_{11}$		
$lij = a_{ji}$	untuk	$i = 2, n$
		$j = 1, n-1$
$l_{ii} = a_{ii} - l_{ij}\ u_{ji}$	untuk	$i = 2, n$
		$j = i-1, n-1$
$u_{ij} = a_{ji} / l_{ii}$	untuk	$i = 1, n-1$
		$j = i+1, n$

Untuk menyelesaikan persamaan (**) terlebih dahulu harus didefinisikan vektor kolom

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

yang memenuhi persamaan: LY = B.

Kalau diselesaikan akan didapat bentuk umum

$Y_1 = b_1 / a_{11}$

$Y_i = (b_i - l_{ij}y_j) / l_{ii}$ untuk $y_i = 2, n$

$j = i-1, n-1$

Karena B = LY maka didapat AX = LY

LUX = LY atau UX = Y .

KULIAH 9

4.7 Penyelesaian Persamaan Linier Simultan dengan Cara Dekomposisi

Tinjau persamaan linier simultan: AX = B atau

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{24} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{41} & a_{42} & \dots & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_4 \end{pmatrix}$$

Dekomposisi matriks A menjadi perkalian antara matriks segitiga bawah (L) dan matriks segitiga atas (U):

A = LU

yang mana

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & .l_{32} & .l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix} \text{ dan } U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & .u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Untuk menyelesaikan persamaan matriks AX = B didefinisikan suatu vektor kolom Y yang memenuhi persamaan

LY = B

sehingga persamaan itu dapat dituliskan

LUX = LY atau UX = Y

Persamaan LY = B dalam bentuk umum dapat dituliskan rumus rekursi sebagai berikut:

$$\boxed{\begin{aligned} y_i &= \frac{1}{l_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j\right) \quad untuk \;\; i = 2,n \\ y_i &= \frac{b_i}{l_{ii}} \quad untuk \;\; i = 1 \end{aligned}}$$

4.8 Persamaan Linier Simultan Homogen

Bentuk umum persamaan linier simultan homogen:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\
\ldots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0
\end{array}
$$

Penyelesaian yang memenuhi persamaan di atas adalah:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$$

dinamakan penyelesaian “trivial”.

Persamaan tersebut mungkin mempunyai penyelesaian yang **tidak trivial** apabila jumlah persamaan **lebih sedikit** daripada jumlah peubah yang akan dicari.

KULIAH 10

5. MATRIKS INVERSI

Invers matriks A adalah A^{-1} sehingga memenuhi

$$A.\ A^{-1} = A^{-1}.\ A = I$$

Untuk mencari jumlah operasi, dapat dipakai cara lain yakni mencari matriks inversi dengan transformasi elementer.

Bila A adalah suatu matriks persegi non singular ukuran n x n, maka:

A | I akan dapat ditransformasikan menjadi I | A^{-1}

Misalnya dengan mempergunakan operasi baris elementer.

5.1 Inversi dari Matriks Segitiga Bawah

Bentuk umumnya:

$b_{ii} = 1 / a_{ii}$	untuk i dari 1 sampai n
$b_{ij} = -\ b_{ii}\ (\sum_{k=j}^{i-1} a_{ik} b_{kj})$	untuk i = 2 sampai n
	j = 1 sampai n.

5.2 Inversi dari Matriks Segitiga Atas

Elemen-elemen b_{ij} dapat dirumuskan secara lebih umum dan dapat dikelompokkan menjadi 4 grup.

Grup pertama:

$b_{ii} = 1 / a_{ii}$ untuk $i = 1, N.$

Grup kedua:

$b_{ij} = - a_{ij}\, b_{ij} / a_{ii}$ untuk $i = 1, N\text{-}1$

$j = i + 1$

Grup ketiga:

$$b_{ij} = -\frac{1}{a_{ii}} \sum_{k=2}^{j} a_{ik} b_{kj}$$ untuk $i = 1, N\text{-}2$

$j = i+2, N$

Grup keempat:

$$b_{ij} = -\frac{1}{a_{ii}} \sum_{k=2}^{j} a_{ik} b_{kj}$$ untuk $i = 1, N\text{-}3$

$j = i + 3$

KULIAH 11

5.3 Mencari Matriks Inversi dengan Metoda Doolittle

Ada dua macam pemfaktoran A menjadi LU yaitu:

1. Metode pemfaktoran Doolittle
2. Metode pemfaktoran Crout

Pemfaktoran Doolittle, mensyaratkan elemen diagonal L semuanya 1 dan elemen diagonal U taknol.

Misalkan untuk matriks A(3x3) dapat ditulis sebagai

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Untuk menyusun algoritma pemfaktoran Doolittle perhatikan uraian berikut ini.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} l_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix}$$

Menurut kesamaan matriks, kita peroleh:

I. $a_{11} = u_{11}$; $a_{12} = u_{12}$; $a_{13} = u_{13}$

$$a_{21} = l_{21}\mathrm{u}_{11} \quad \leftrightarrow \quad l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} = \frac{\mathrm{a}_{21}}{\mathrm{a}_{11}}$$

$$a_{31} = l_{31}\mathrm{u}_{11} \quad \leftrightarrow \quad l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} = \frac{\mathrm{a}_{31}}{\mathrm{a}_{11}}$$

II. $l_{21}u_{12} + u_{22} = a_{22} \quad \leftrightarrow \quad u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12}$

$l_{21}u_{13} + u_{23} = a_{23} \quad \leftrightarrow \quad u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13}$

$l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = a_{32} \quad \leftrightarrow \quad l_{32} = \dfrac{a_{32} - l_{31}a_{12}}{u_{22}}$

III. $l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = a_{33} \quad \leftrightarrow \quad u_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23}$

Algoritma Pemfaktoran Doolittle

Masukkan : n, a_{ij} , i, j = 1, 2, ..., n.

Keluaran : L_{nxn} , U_{nxn}

Langkah-langkah:

I. Untuk j = 1, 2, ... , n

  $u_{1j} \longleftarrow a_{1j}$

  $l_{jj} \longleftarrow 1$

 Untuk i = 2, 3, ..., n

  Untuk j = 1, 2, ..., i-1

   Suku $\longleftarrow$ 0

   Untuk k = 1, 2, ... , j-1

    Suku $\longleftarrow$ suku + $l_{ik} \cdot u_{kj}$

   lij $\longleftarrow$ $(a_{ij}$ - suku$)/u_{jj}$

  Untuk k = i, i+1, ... , n

   Suku $\longleftarrow$ 0

   Untuk m = 1, 2, ... , i - 1

    Suku $\longleftarrow$ suku + $l_{im} \cdot u_{mk}$

   $u_{ik} \longleftarrow a_{ik}$ - suku

II. LY = C dengan substitusi maju

III. UX = Y dengan substitusi mundur

5.5 Mencari Matriks Inversi dengan Metoda Crout

Pemfaktoran Crout, mensyaratkan elemen diagonal L taknol dan semua elemen diagonal U bernilai 1.

Misalkan untuk matriks A(3x3) dapat ditulis sebagai

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a23 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Penyusunan algoritma pemfaktoran Crout dilakukan seperti penyusunan algoritma pemfaktoran Doolittle.

5.6 Mencari Matriks Inversi dengan Metoda Cholesky

Metoda Cholesky sangat bermanfaat untuk mencari inversi dari matriks simetris dengan elemen-elemen diagonal utama berharga positif. Metoda ini juga memanfaatkan teknik dokomposisi A = LU, akan tetapi karena untuk matriks simetris $A = A^T$ maka

$$LU = (LU)^T \quad \text{atau} \quad LU = U^T L^T$$

yang berarti: $L = U^T$ dan $U = L^T$.

Jadi dekomposisi

$$A = LU = L L^T$$

maka

$$A^{-1} = (L L^T)^{-1} = (L^T)^{-1} L^{-1}$$

atau

$$A^{-1} = (L^{-1})^T L^{-1}$$

Dalam bentuk umum metoda Cholesky dapat dituliskan

$l_{i1} = a_{i1} / l_{11}$	untuk i = 1, n
$l_{ij} = \frac{1}{l_{ij}}[\, a_{ij} - \sum_{k=i}^{j-i} l_{ik} l_{jk} \,]$	untuk i = 3, n j = 2, n-1
$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^{\;2}}$	untuk i = 1, n

KULIAH 12

6. MATRIKS TRANSPOSE DAN MATRIKS ADJOINT

Andaikan diketahui matriks

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

• Transpose dari matriks A adalah

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

• Adjoint dari matriks A ditulis Adj (A), adalah suatu matriks yang elemen-elemennya terdiri dari **transpose** dari semua **kofaktor** elemen-elemen matriks A.

Matriks adjoint hanya didefinisikan untuk matriks kuadrat.

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{21} & k_{31} \\ k_{12} & k_{22} & k_{32} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{pmatrix}$$

Dalam hal ini:

$k_{11} = (-1)^{1+1}$ Det(M_{11}), M_{11} adalah minor dari koefisien a_{11}

$k_{12} = (-1)^{1+2}$ Det(M_{12}), M_{12} adalah minor dari koefisien a_{12}

dan seterusnya.

Perhitungan matriks adjoint dengan konsep di atas kurang efisien karena jumlah operasinya cukup besar.

Konsep lain yang lebih baik adalah dengan mempergunakan matriks inversi.

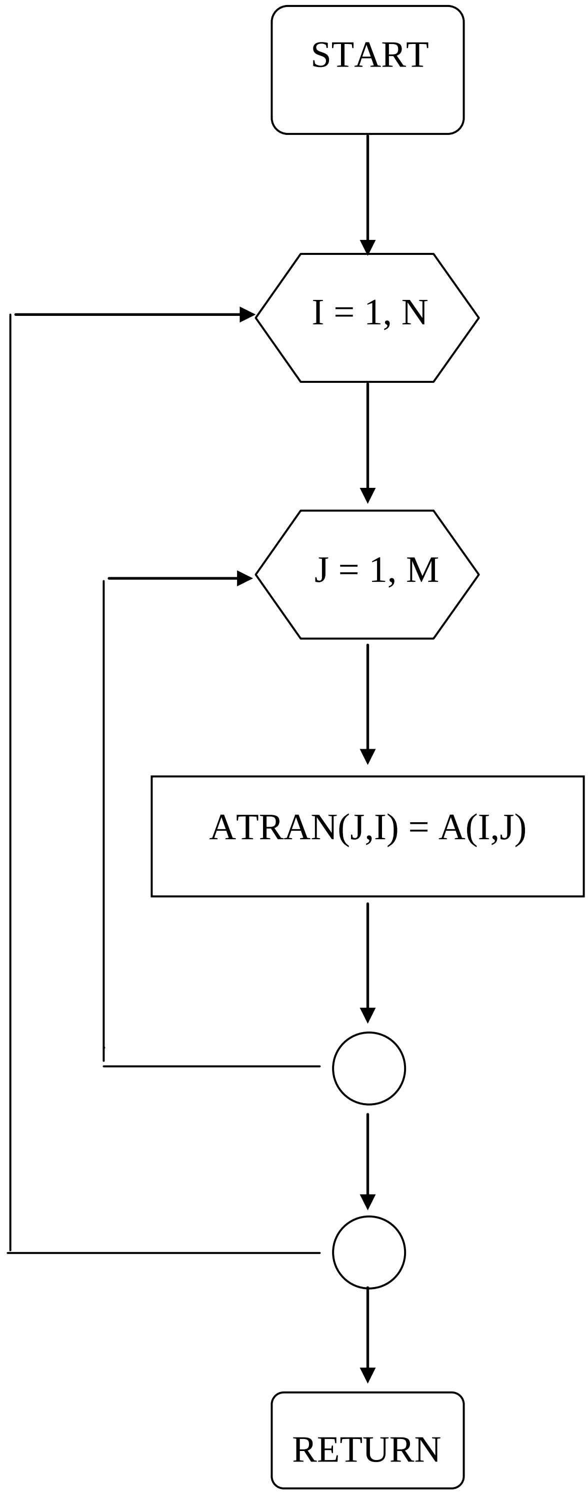
Karena untuk setiap matriks kuadrat berlaku aturan:

A. Adj (A) = Det(A).I

Maka dapat dituliskan

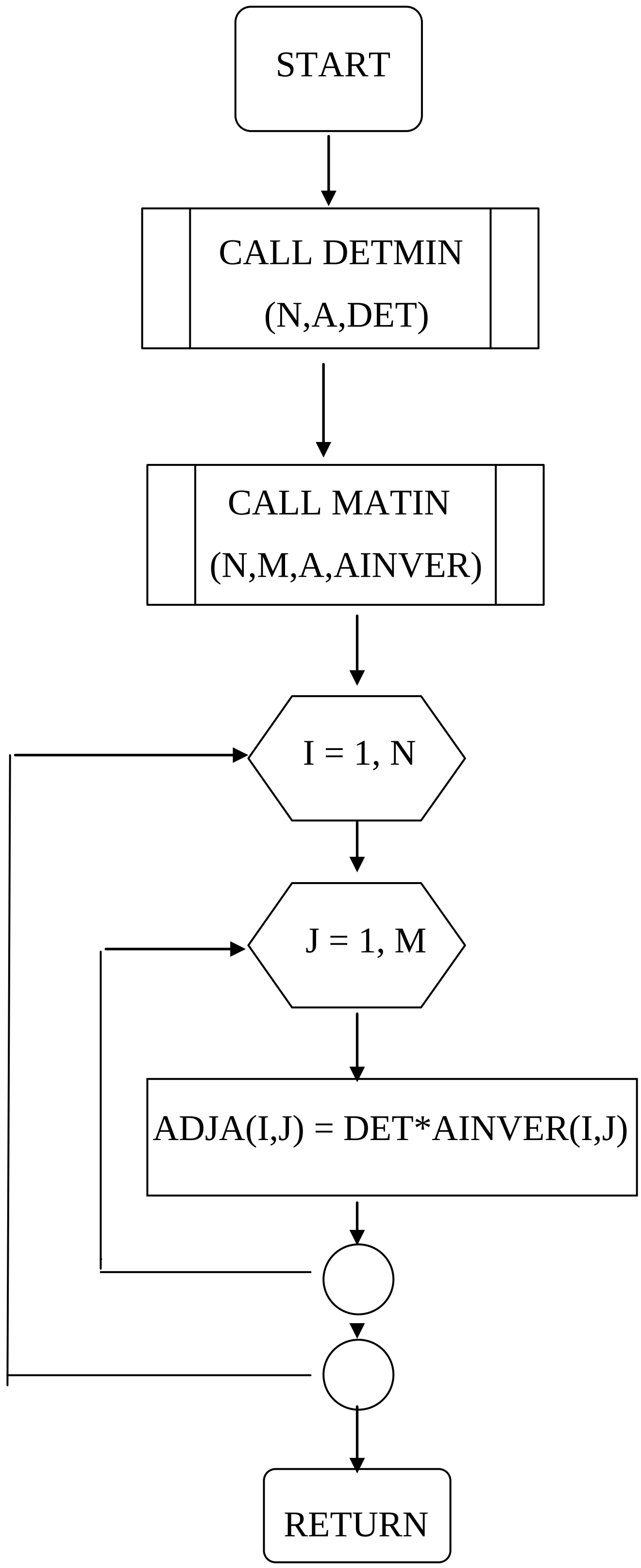
$$\text{Adj (A)} = \text{Det (A)}.A^{-1}$$

Diagram Alir Transpose Matriks



KULIAH 13

Diagram Alir Perhitungan Matriks Adjoint



Subprogram Subroutine Adjoint

```
SUB ADJOIN (N, A, ADJA)
'========================================
' CONTOH SUBPROGRAM SUBROUTINE ADJOINT
' NAMA PROGRAM : ADJOINT.BAS
'========================================
 DIM A(N,N), ADJA(N,N)
'SUBROUTINE LAIN YANG DIPERLUKAN: DETMIN, MATIN
CALL DETMIN(N, A, DET)
CALL MATIN(N, M, A, AINVER)
FOR I = 1 TO N
    FOR J = 1 TO M
        ADJA(I, J) = DET * AINVER(I, J)
    NEXT J
NEXT I
END SUB
```

KULIAH 14

7. AKAR KARAKTERISTIK

7.1 Nilai Karakteristik (Harga Eigen) dan Vektor Karakteristik (Vektor Eigen)

Nilai karakteristik dapat diartikan sebagai suatu nilai (skalar) λ yang berpasangan dengan vektor $X \neq 0$ dan memenuhi persamaan matriks:

$$AX = \lambda X \qquad (*)$$

Dalam hal ini: A adalah matriks kuadrat

X adalah vektor karakteristik

Keduanya: λ dan X disebut akar-akar karakteristik.

Persamaan (*) dapat dituliskan sebagai:

$$[\, A - \lambda\, I \,]\, [\, X \,] = [\, 0 \,] \qquad (**)$$

Menyusun Persamaan Karakteristik dengan Metoda Le Verrier-Faddeev

Menurut teorema Newton, untuk suatu matriks A jumlah dari harga-harga eigen sama dengan jumlah dari elemen-elemen diagonal yang dinamakan **trace** atau **Spur** dari matriks A.

Jadi:

$$\text{Trace (A)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,.$$

Dapat ditulis:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = trace\,(\mathrm{A})$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{\,2} = trace\,(\mathrm{A}^2)$$

$$\ldots$$

$$S_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{\,k} = trace\,(\mathrm{A}^k)$$

Untuk mempermudah perhitungan selanjutnya Faddeev mengembangkan cara sebagai berikut:

$A_1 = A$	;	Trace $(A_1) = P_1$	;	$B_1 = A_1 - P_1 I$
$A_2 = AB_1$	;	Trace $(A_2) = 2P_2$	;	$B_2 = A_2 - P_2 I$
...		...		...
$A_n = AB_{n-1}$	;	Trace $(A_n) = nP_n$	;	$B_n = A_n - P_n I$

Persamaan karakteristiknya:

$$\boxed{(-1)^n \, [\, \lambda^n - P_1\, \lambda^{n-1} - P_2\, \lambda^{n-2} - \ldots - P_n \,] = 0}$$

7.2 Harga Eigen dan Vektor Eigen dari Matriks Ordo 3

Harga Eigen

Tinjau persamaan linier simultan sebagai berikut:

$$a_{11}\, x_1 \;+\; a_{12}\, x_2 \;+\; a_{13}\, x_3 \;=\; b_1$$
$$a_{21}\, x_1 \;+\; a_{22}\, x_2 \;+\; a_{23}\, x_3 \;=\; b_2$$
$$a_{31}\, x_1 \;+\; a_{32}\, x_2 \;+\; a_{33}\, x_3 \;=\; b_3$$

atau

$$AX = B$$

Dalam persoalan mencari harga eigen maka B = λ I yang mana

$$\lambda\, I = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

sehingga menjadi

$$[\, A - \lambda\, I \,]\,[\, X \,] = [\, 0 \,]$$

yang merupakan persamaan linier simultan homogen.

Persamaan itu dapat dibentuk menjadi

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (@)$$

Nilai determinan [A - λ I] membentuk polinomial berderajat 3 dalam λ:

$$\alpha_0 \lambda^3 + \alpha_1 \lambda^2 + \alpha_2 \lambda + \alpha_3 = 0$$

Vektor Eigen

Tulis (@) dalam bentuk

$$\begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}' & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Karena penyelesaian non-trivial hanya dapat diberikan dalam bentuk perbandingan $x_1 : x_2 : x_3$ maka kita dapat memilih terlebih dahulu harga awal, misalnya: $x_1 = 1$ sehingga persamaan itu berubah menjadi

$$a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 = -\, a_{11}'$$
$$a_{22}'\, x_2 + a_{23}\, x_3 = -\, a_{21}$$
$$a_{32}\, x_2 + a_{33}'\, x_3 = -\, a_{31}$$

Didapatkan:

$$x_2 = \frac{-a_{11}' - a_{13}x_3}{a_{12}} = \frac{-a_{21} - a_{23}x_3}{a_{22}'}$$

$$x_3 = \frac{a_{12}a_{21} - a_{22}'a_{11}'}{a_{13}a_{12} - a_{12}a_{23}}$$

Nilai-nilai x_1, x_2, dan x_3 dalam hal ini menjadi vektor eigen yang berhubungan dengan harga eigen λ.