1 DEFINISI DAN AKSIOMA ALJABAR BOOLEAN

DEFINISI

DEFINISI 1.1

Aljabar Boolean adalah sistem aljabar yang berisi set S dengan dua operasi biner yakni penjumlahan (+) dan perkalian (.) yang didefinisikan pada set itu sehingga memenuhi ketentuan berikut:

1. Tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian, ada unsur identitas penjumlahan dan perkalian, memenuhi sifat komutatif penjumlahan dan perkalian, memenuhi sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan, memenuhi sifat distributif penjumlahan terhadap perkalian, untuk setiap unsur S mempunyai komplemen terhadap operasi penjumlahan dan perkalian, dan memenuhi sifat asosiatif penjumlahan dan perkalian.
2. Setiap unsur S adalah 'idempotent', yaitu jika $a \in S$, maka $a.a = a$ dan $a + a = a$.

Untuk setiap $x, y, z \in S$, berlaku

(a) Sifat tertutup: $x + y \in S$ dan $x . y \in S$

(b) Sifat komutatif

$x + y = y + x$

$x . y = y . x$

(c) Sifat distributif

$x. (y + z) = x . y + x . z$

$(x + y) . z = (x . z) + (y . z)$

$x + (y . z) = (x + y) . (x + z)$

$(x \cdot y) + z = (x + z) \cdot (y + z)$

(d) Unsur identitas/kesatuan

Terdapat unsur 0 (unsur kesatuan tambah atau unsur nol) dan 1 (unsur kesatuan kali atau unsur satuan) yang memenuhi

$x + 0 = 0 + x = x$ dan $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ untuk setiap $x \in \boldsymbol{S}$

(e) Sifat komplemen

Untuk setiap $x \in S$**,** terdapat $x' \in S$ sehingga $x + x' = 1$ dan $x \cdot x' = 0$.

(f) Sifat asosiatif

$x + (y + z) = (x + y) + z$

$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

PRINSIP DUALITAS

DEFINISI 1.2

Misalkan A adalah kesamaan tentang aljabar Boolean yang melibatkan operasi +, . , dan komplemen. Jika pernyataan A^* diperoleh dengan cara mengganti . dengan +, + dengan . , 0 dengan 1, 1 dengan 0, maka kesamaan A^* juga benar. A^* disebut sebagai **dual** dari A.

Teorema 1.1 (Hukum Idempotent)

Untuk setiap unsur x berlaku $x + x = x$ dan $x \cdot x = x$.

Teorema 1.2 (Hukum Dominansi)

Untuk setiap unsur x berlaku $x + 1 = 1$ dan $x \cdot 0 = 0$.

Teorema 1.3 (Hukum Penyerapan)

Untuk setiap unsur x dan y berlaku $x + x.y = x$ dan $x \cdot (x + y) = x$.

Teorema 1.4 (Hukum de Morgan)

Untuk setiap unsur x dan y berlaku $(x \,.\, y)' = x' + y'$ dan $(x + y)' = x' \,.\, y'$.

Teorema 1.5 (Hukum 0/1)

$0' = 1$ dan $1' = 0$

Teorema 1.6 (Hukum Involusi)

$(x')' = x$

Teorema 1.7

Jika suatu aljabar Boolean berisi paling sedikit dua unsur yang berbeda x dan y, maka $x \neq y$.

Bukti Teorema 1.1

$x + x = (x + x)(1)$	identitas
$= (x + x)(x + x')$	komplemen
$= x + (x \,.\, x')$	distributif
$= x + 0$	komplemen
$= x$	identitas

Bukti Teorema 1.2

$x + 1 = x + (x + x')$	komplemen
$= (x + x) + x'$	asosiatif
$= x + x'$	teorema 1.1 (idempoten)
$= 1$	komplemen

Bukti Teorema 1.4 $(x \,.\, y)' = x' + y'$

Diketahui: $(x.y)(x.y)' = 0$ komplemen

Perlihatkan: $(x.y)(x' + y') = 0$

Bukti: $(x.y)(x' + y') =$	$x.y.x' + x.y.y'$	distributif
	$= x.x'.y + x.y.y'$	komutatif
	$= 0.y + x.0$	komplemen
	$= 0 + 0$	dominansi
	$= 0$	identitas

Jadi, $(x \,.\, y)' = x' + y'$.

ATURAN <= (Lebih Kecil Daripada)

Definisi 1.3

x dan y adalah unsur-unsur dari aljabar Boolean. Dinyatakan bahwa x lebih kecil daripada y ($x <=$ y) jika dan hanya jika $x + y = y$.

Teorema 1.7

<= adalah suatu bagian dari urutan.

Bukti

Dari **Teorema 1.1 :** $x + x = x$, sehingga $x <= x$.

Jika $x <= y$, maka $x + y = y$.

Jika $y <= x$, maka $y + x = x$.

Sehingga jika $x <= y$ dan $y <= x$, maka $x = y$.

Dapat disimpulkan:

$x <= y$ dan $y <= z$, maka $x + y = y$ dan $y + z = z$.

$x + z = x + (y + z) = (x + y) + z = y + z = z$.

Sehingga $x <= z$.

Teorema 1.8

Jika x, y dan z adalah unsur-unsur dari aljabar Boolean, maka <= mempunyai sifat-sifat berikut ini:

(i) Jika $x <= y$ dan $x <= z$, maka $x <= yz$.

(ii) Jika $x <= y$, maka $x <= y + z$ untuk elemen z.

(iii) Jika $x <= y$, maka $xz <= y$ untuk elemen z.

(iv) $x <= y$ jika dan hanya jika $y' <= x'$.

Bukti:

(i) Jika $x <= y$, maka $x + y = y$.

Jika $x <= z$, maka $x + z = z$.

$x + yz = (x + y)(x + z) = yz$. distributif

Jadi, $x <= yz$.

(ii) Jika $x <= y$, maka $x + y = y$.

$x + (y + z) = (x + y) + z = y + z$. asosiatif

Jadi, $x <= y + z$.

(iii) Jika $x <= y$, maka $x + y = y$.

Menurut hukum penyerapan: $x = x + xz = xz + x <= y$???

(iv) Jika $x <= y$, maka $x + y = y$ dan $y' = (x + y)'$.

$y' + x' = (x + y)' + x' = ((x + y)x)'$. de Morgan ???

Soal-Soal

1. Buktikan bahwa untuk sembarang unsur a dan b dari aljabar Boolean berlaku: $a + a'b = a + b$ dan $a(a' + b) = ab$.
2. Buktikan Teorema 1.6
3. Buktikan kebenaran hukum de Morgan, jika diketahui bahwa:

$(xy)(xy)' = 0$ dan $(xy) + (xy)' = 1$.