BAB 3 INTERPOLASI

3.1 Beda Hingga

Andaikan diberikan suatu tabel nilai-nilai numeris $f_j = f(x_j)$ dari suatu fungsi f pada titik - titik yang berjarak sama: x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, $x_3 = x_0 + 3h$, ..., dengan $h > 0$ tetap

3.2.1 Beda - beda Maju (*Forward Difference*)

Beda-beda maju pertama secara umum ditulis: .

$$\boxed{\Delta f_m = f_{m+1} - f_m}$$

Beda dari beda-beda maju pertama disebut beda-beda maju kedua dan secara umum ditulis:

$$\boxed{\Delta^2 f_m = \Delta f_{m+1} - \Delta f_m}$$

Bentuk umumnya:

$$\boxed{\Delta^{n+1} f_m = \Delta^n f_{m+1} - \Delta^n f_m} \quad \text{untuk } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Tabel berikut menunjukkan beda-beda maju dari semua tingkat yang dapat

x	f	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
x_{-2}	f_{-2}				
		Δf_{-2}			
x_{-1}	f_{-1}		$\Delta^2 f_{-2}$		
		Δf_{-1}		$\Delta^3 f_{-2}$	
x_0	f_0		$\Delta^2 f_{-1}$		$\Delta^4 f_{-2}$
		Δf_0		$\Delta^3 f_{-1}$	
x_1	f_1		$\Delta^2 f_0$		
		Δf_1			
x_2	f_2				

3.2.2 Beda - beda Mundur (*Backward Difference*)

Beda-beda mundur pertama secara umum ditulis:

$$\boxed{\nabla f_m = f_m - f_{m-1}}$$

Beda dari beda-beda mundur pertama disebut beda-beda mundur kedua . Secara umum ditulis:

$$\boxed{\nabla^2 f_m = \nabla f_m - \nabla f_{m-1}}$$

Bentuk umumnya:

$$\boxed{\nabla^{n+1} f_m = \nabla^n f_m - \nabla^n f_{m-1}} \quad \text{untuk } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Tabel beda-beda mundur:

x	F	∇	∇^2	∇^3	∇^4
x_{-2}	f_{-2}				
		∇f_{-1}			
x_{-1}	f_{-1}		$\nabla^2 f_0$		
		∇f_0		$\nabla^3 f_1$	
x_0	f_0		$\nabla^2 f_1$		$\nabla^4 f_2$
		∇f_1		$\nabla^3 f_2$	
x_1	f_1		$\nabla^2 f_2$		
		∇f_2			
x_2	f_2				

3.2.3 Beda - beda Pusat

Beda-beda pusat pertama secara umum ditulis:

$$\delta f_{\frac{2m+1}{2}} = f_{m+1} - f_m$$

Beda dari beda-beda pusat pertama disebut beda-beda pusat kedua .

Secara umum ditulis:

$$\delta^2 f_m = \delta f_{\frac{2m+1}{2}} - \delta f_{\frac{2m-1}{2}}$$

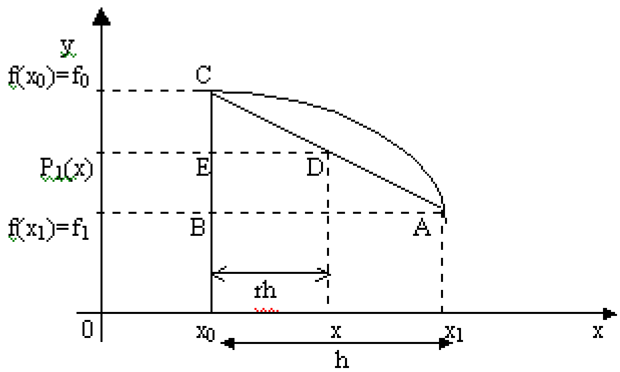
Tabel beda-beda pusat :

x	F	δ	δ^2	δ^3	δ^4
x_{-2}	f_{-2}				
		$\delta f_{-3/2}$			
x_{-1}	f_{-1}		$\delta^2 f_{-1}$		
		$\delta f_{-1/2}$		$\delta^3 f_{-1/2}$	
x_0	f_0		$\delta^2 f_0$		$\delta^4 f_0$
		$\delta f_{1/2}$		$\delta^3 f_{1/2}$	
x_1	f_1		$\delta^2 f_1$		
		$\delta f_{3/2}$			
x_2	f_2				

3.2 Interpolasi Linier dan Interpolasi Kuadrat

3.3.1 Interpolasi Linear

Bentuk interpolasi yang paling sederhana adalah menghubungkan dua titik data dengan garis lurus.



Kurva f dihampiri oleh suatu talibusur pada dua nilai tabulasi yang berdekatan x_0 dan x_1. Kita akan menginterpolasi nilai f untuk $x = x_0 + rh$ dengan $0 \le r \le 1$. Karena segitiga DEC sebangun dengan segitiga ABC, maka berlaku:

$$\boxed{P_1(x) = f_0 + r.\Delta f_0}$$

3.3.2 Interpolasi Kuadrat

Jika tersedia tiga titik data (x_0,f_0), (x_1,f_1), dan (x_2,f_2), ini dapat dilaksanakan dengan polinom orde kedua (juga disebut polinom kuadrat atau parabola). Rumus interpolasi kuadrat tersebut juga dapat dinyatakan/ dikonstruksi dalam bentuk:

$$\boxed{p_2(x) = f_0 + r.\Delta f_0 + \frac{r(r-1)}{2}\Delta^2 f_0}$$

dengan $0 \le r \le 2$.

3.3 Interpolasi Beda-Maju dan Beda-Mundur Newton

Bila polinom interpolasi derajat n yang diinginkan, maka jumlah titik yang dibutuhkan harus (n+1) buah. Polinom interpolasi derajat n ini diberikan dalam rumus interpolasi beda-maju Newton:

$$\begin{aligned} f(x) \approx P_n(x) &= \sum_{s=0}^{n} \binom{r}{s} \Delta^s f_0 \\ &= f_0 + r \,.\, \Delta f_0 + \frac{r(r-1)}{2!} \Delta^2 f_0 \\ &\quad + \ldots + \frac{r(r-1)\ldots(r-n+1)}{n!} \Delta^n f_0 \end{aligned}$$

dengan $x = x_0 + rh$, $r = \dfrac{x - x_0}{h}$, $0 \le r \le n$.

Taksiran galat dalam menginterpolasi f(x) dengan polinom beda-maju Newton adalah

$$\varepsilon_n(x) = P_n(x) - f(x) = -(x - x_0)\ldots(x - x_n) \,.\, \frac{\Delta^{n+1} f_0}{h^{n+1}(n+1)!}$$

Suatu rumus yang serupa dengan rumus tadi tetapi melibatkan beda-mundur adalah rumus **interpolasi beda-mundur Newton**:

$$\begin{aligned} f(x) \approx P_n(x) &= f_0 + r.\ \nabla f_0 + \frac{r\ (r+1)}{2\ !} \nabla^2 f_0 + \ldots \\ &\quad + \frac{r\ (r+1)\ldots(r+n-1)}{n\ !} \nabla^n f_0 \end{aligned}$$

dengan $x = x_0 + rh$, $r = (x - x_0)/h$, $0 \le r \le n$.

3.4 Polinom Interpolasi Beda Terbagi Newton

Disini akan dibicarakan formula interpolasi dengan jarak antara nilai-nilai variabel bebas x_0, x_1, . . . , x_n tidak perlu sama. Definisikan terlebih dahulu beda-beda terbagi, yang secara iteratif dinyatakan oleh hubungan:

$$f[x_0,x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2] - f[x_0,x_1]}{x_2 - x_0}$$

. . . .

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_n] = \frac{f[x_1,x_2,\ldots,x_n] - f[x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

Tabel untuk beda-beda terbagi dari fungsi tersebut di atas adalah sebagai berikut:

x_k	$f(x_k)$	$f[x_k, x_{k+1}]$	f[. . . , . . . , . .]	f[… , … , …, ..]
x_0	$f(x_0)$			
		$f[x_0,x_1]$		
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0,x_1,x_2]$	
		$f[x_1,x_2]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1,x_2,x_3]$	
		$f[x_2,x_3]$		
x_3	$f(x_3)$			

3.5.1 Formula Interpolasi Ordo 1

Formula ini diturunkan dari

$$P_1(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\left(f(x_1) - f(x_0)\right)$$

Jadi diperoleh:

$$\boxed{P_1(x) = f_0 + (x - x_0).\ f[x_0,x_1]}$$

3.5.2 Formula Interpolasi Ordo 2

Secara umum interpolasi ordo 2 dinyatakan dengan:

$f(x) \approx P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Persamaan tersebut ekuivalen dengan polinomial $P_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$. Jadi diperoleh:

$$\boxed{P_2(x_2) = f_0 + (x - x_0) \,.\, f[x_0,x_1] + (x - x_0)(x - x_1) \,.\, f[x_0,x_1,x_2].}$$

Secara umum sampai dengan ordo n, kita peroleh formula interpolasi beda terbagi Newton sebagai berikut:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) = P_n(x) = f_0 &+ (x - x_0) \,.\, f[x_0,x_1] \\ &+ (x - x_0)(x - x_1) \,.\, f[x_0,x_1,x_2] + \ldots + \\ &(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) \,.\, f[x_0,x_1,\ldots,x_n] \end{aligned}}$$

Algoritma Polinom Beda Terbagi Newton

Formula interpolasi beda terbagi Newton tersebut di atas dapat ditulis sebagai berikut:

$$f(x) = f_0 + \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \right) . f[x_0,\ldots,x_i]$$

Misalkan: f(x) ialah pbagi

f_0 ialah b_0

$\prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$ ialah faktor

$\sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=o}^{i-1} (x - x_j) \right) . f[x_0,\ldots,x_i]$ ialah suku.

Masukan : n, x_i, $f(x_i)$ dengan $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

x, ε

Langkah-langkah:

$b_0 \leftarrow f(x_0) = f_0$

$pbagi \leftarrow b_0$

$faktor \leftarrow 1$

Untuk $i = 1, 2, \ldots, n$, lakukan

$b_i \leftarrow f(x_i)$

Untuk $j = i\text{-}1, i\text{-}2, \ldots, 0$, lakukan

$$b_j \leftarrow \frac{b_{j+1} - b_j}{x_i - x_j}$$

$faktor \leftarrow faktor \cdot (x - x_{i-1})$

$suku \leftarrow b_0 \cdot faktor$

$pbagi \leftarrow pbagi + suku$

Jika $|suku| \le \varepsilon$, selesai.

3.4 Polinom Interpolasi Lagrange

3.6.1 Polinom Interpolasi Lagrange Ordo 1

Perhatikan kembali formula polinom interpolasi Newton ordo 1:

$$f(x) \approx P_1(x) = f_0 + (x - x_0) \cdot f[x_0,x_1] \qquad (1).$$

$$f[x_0,x_1] = \frac{f_1}{x_1 - x_0} + \frac{f_0}{x_0 - x_1}$$

Bentuk terakhir ini disubstitusikan ke persamaan (1) sehingga diperoleh:

$$P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} . f_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} . f_1$$

$$= \sum_{i=0}^{1} \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) . f_i$$

3.6.2 Polinom Interpolasi Lagrange Ordo 2

Beda-beda terbagi ordo 2 dirumuskan ulang sebagai berikut:

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2] - f[x_0,x_1]}{x_2 - x_0}$$

$$= \frac{f_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \frac{f_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \frac{f_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Bentuk terakhir ini disubstitusikan ke formula interpolasi Newton ordo 2 sehingga diperoleh:

$$P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}.f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}.f_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.f_2$$

$$= \sum_{i=0}^{2} \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right).f_i$$

Secara umum sampai dengan ordo n, kita peroleh formula interpolasi Lagrange sebagai berikut:

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right).f_i = \sum_{i=0}^{n} L_i(x).f_i}$$

Algoritma Polinom Interpolasi Lagrange

Masukan: n, x_i, $f(x_i)$ dengan i = 0, 1, 2, . . . , n
x

Langkah-langkah:

plag ⟵ 0

Untuk i = 0, 1, 2, . . . , n lakukan:

faktor ⟵ 1

Untuk j = 0, 1, 2, . . . , n

Jika j ≠ i , faktor ⟵ faktor . $\dfrac{x - x_j}{x_i - x_j}$

plag ⟵ plag + faktor . $f(x_i)$