BAB 2 AKAR PERSAMAAN TAKLINIER

2.1 Persamaan f(x) dapat berbentuk sebagai berikut:

1) Persamaan aljabar.

Contoh 2.1: Persamaan polinom orde > 2

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ . \ . \ . + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ dengan

$a_n \neq 0$ dan $n > 2$.

2) Persamaan transenden, persamaan yang mengandung fungsi-fungsi trigonometri, logaritma, atau eksponen.

Contoh 2.2: $e^x + \cos x = 0$

$\ln x - 4 = 0$

3) Persamaan campuran, persamaan yang mengandung persamaan polinom maupun persamaan transenden.

Contoh 2.3: $x^2 \sin x + 5 = 0$

$x^3 + 2 \ln x = 0$

2.2 Lokalisasi Akar

Lokalisasi akar diperlukan untuk mendapatkan nilai tebakan awal

2.2.1 Lokalisasi Akar Secara Grafik

Lokalisasi akar secara grafik ini diterapkan untuk persamaan yang mudah digambarkan grafiknya. Cara ini dibedakan lagi atas cara grafik tunggal dan grafik ganda. Dari kalkulus telah diketahui bahwa akar persamaan adalah tempat grafik fungsi memotong sumbu x. Ketentuan ini dipakai pada cara grafik tunggal. Sedangkan pada cara grafik ganda, akar adalah absis titik potong grafik kedua fungsi tersebut.

2.2.2 Lokalisasi Akar Secara Tabulasi

2.2.3 Lokalisasi Akar untuk Persamaan Polinom

Persamaan polinom berderajat n mempunyai bentuk baku:

$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ dengan $a_n \neq 0$.

p(x) = 0 mempunyai tepat n buah akar, termasuk akar yang berupa bilangan imajiner. Untuk melokasikan akar-akarnya yang real digunakan beberapa sifat akar, yakni:

1) Aturan tanda Descartes

2) Selang Akar

Andaikan $r = 1 + \underset{1 \le k \le n}{maksimum} \left\{ \left| \frac{a_k}{a_n} \right| \right\}$

dengan a_k adalah koefisien p(x) dan a_n koefisien pangkat tertinggi dari p(x), maka semua akar p(x) akan terletak pada selang [-r, r].

2.3. Metode-metode Pengurung

2.3.1 Metode Bagidua (*Bisection Method*)

Metode ini didasarkan pada teorema nilai antara untuk fungsi kontinu, yang menyatakan pada suatu selang [a,b] sedemikian sehingga titik-titik ujung f berlawanan tanda, misalnya f(a) < 0 dan f(b) > 0, harus mengandung suatu akar.

Mula-mula tentukan titik tengah selang [a,b] atau selang [a,b] dibagi dua sama panjang, sebut titik tengahnya T.

$$f(a).f(T) \begin{cases} < 0, \text{ berarti akar pada } [a, T] \\ = 0, \text{ berarti akarnya } T \\ > 0, \text{ berarti akarnya pada } [T, b] \end{cases}$$

Proses ini dilanjutkan sampai lebar selang yang ditinjau cukup kecil yaitu, jika $|b - a| < \varepsilon$ (epsilon). ε nilainya mendekati nol, yang pengambilannya menentukan sejauh mana ketelitian yang diharapkan. Semakin kecil ε semakin teliti hampiran akar yang diperoleh.

Algoritma Metode Bagidua

Masukan: f(x), a, b, ε

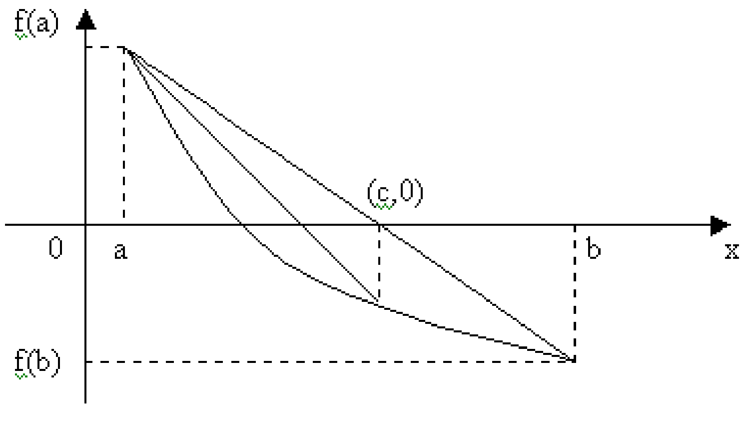
Keluaran: akar

Langkah-langkah:

1. $T \longleftarrow \dfrac{a + b}{2}$
2. Jika $f(a).f(T) < 0$ maka $b \Leftarrow T$, jika tidak $a \Leftarrow T$
3. Jika $|b - a| < \varepsilon$ maka akar $\longleftarrow$ T. Selesai
4. Ulangi kembali ke langkah 1.

2.3.2 Metode Posisi Palsu (*False Position Method*)

Metode ini populer dengan nama bahasa Latinnya metode regula falsi. Metode posisi palsu memanfaatkan wawasan grafis ini dengan cara menetapkan hampiran akar sebagai perpotongan antara garis yang melalui titik-titik (a,f(a)) dan (b,f(b)) dengan sumbu x. Andaikan titik potong tersebut adalah (c,0).



Metode Regula Falsi:

$$\boxed{c = b - f(b).\frac{b - a}{f(b) - f(a)}}$$

Iterasi akan dihentikan bilamana dua hampiran akar yang beruntun sudah hampir sama nilainya. Hal ini biasanya dinyatakan dengan notasi: $\left|\dfrac{c - clama}{c}\right| \le \varepsilon$.

Algoritma Metode Posisi Palsu

Masukan: $f(x)$, a, b, ε

Keluaran: akar

Langkah-langkah:

1. $clama \Longleftarrow 2b - a$
2. $c \Longleftarrow b - f(b)\dfrac{b-a}{f(b)-f(a)}$
3. Jika $f(a).f(c) < 0$ maka $b \Leftarrow c$, jika tidak $a \Leftarrow c$
4. Jika $\left|\dfrac{c - clama}{c}\right| \leq \varepsilon$ maka akar $\Leftarrow$ c. Selesai
5. Jika tidak, $clama \Longleftarrow c$, kembali ke langkah 2.

2.4 Metode Terbuka

Metode terbuka didasarkan pada rumus yang memerlukan satu atau dua nilai tebakan awal yang tidak perlu mengurung akar.

2.4.1 Metode Iterasi Titik Tetap

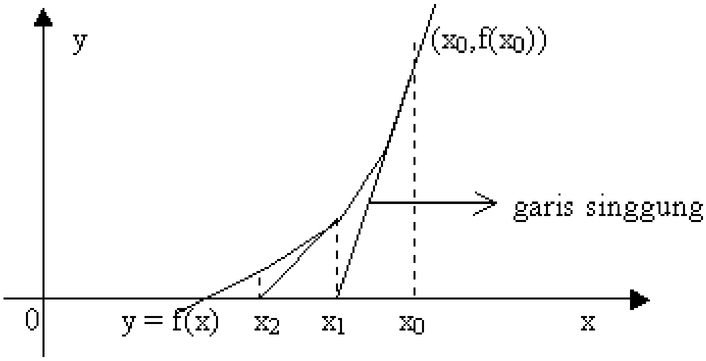
Menyusun kembali fungsi $f(x) = 0$ menjadi $x = g(x)$. Jika diberikan nilai terkaan awal x_i rumus ini dapat dipakai untuk menghitung taksiran baru x_{i+1}, seperti terungkap pada rumus iterasi:

$$x_{i+1} = g(x_i) \text{ dengan } i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Umumnya, ada beberapa cara penulisan ulang yang berbeda dari $f(x) = 0$ ke dalam bentuk $x = g(x)$. Tetapi tidak semuanya memberikan iterasi yang berhasil. Kekonvergenan hanya terjadi bilamana $\mathbf{|g'(x)| < 1}$.

2.4.2 Metode Newton - Raphson

Metode Newton-Raphson adalah metode iterasi lain untuk memecahkan persamaan f(x) = 0, dengan f diasumsikan mempunyai turunan kontinu f'.



Secara umum, pada iterasi ke n+1 diperoleh:

$$\boxed{\mathbf{x_{n+1}} = \mathbf{x_n} - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

<u>**Algoritma Metode Newton-Raphson**</u>

Masukan: f(x), f'(x), x_0, ε, Maks (maksimum banyaknya iterasi)
Keluaran: akar
Langkah-langkah:

1. Iterasi = 1
2. Jika $f'(x_0) = 0$ maka proses gagal. Selesai.
3. xbaru $\Longleftarrow$ $x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
4. Jika $\left|\dfrac{\text{xbaru} - x_0}{\text{xbaru}}\right| < \varepsilon$ maka akar $\Leftarrow$ xbaru. Selesai.
5. x_0 $\Longleftarrow$ xbaru
6. Iterasi $\Longleftarrow$ Iterasi + 1
7. Jika Iterasi $\leq$ Maks, kembali ke langkah 2)
8. Proses belum konvergen/divergen. Selesai.

2.4.3 Metode Secant

Bila $f'(x_{k-1})$ sukar dicari, terutama fungsi yang bentuknya rumit, alternatif lain untuk masalah seperti ini digunakan metode Secant. Metode ini dapat diturunkan dari metode Newton-Raphson dengan mengganti $f'(x_n)$ dengan beda hingga terbagi, yaitu:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

sehingga diperoleh rumus untuk iterasi metode secant

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}}$$

Secara geometri x_{n+1} merupakan perpotongan antara sumbu x dan talibusur kurva $f(x)$ yang berpadanan terhadap x_{n-1} dan x_n.

Kondisi berhenti dinyatakan bila

$$|x_{r+1} - x_r| < \varepsilon$$

atau dengan menggunakan galat relatif hampiran

$$\left|\frac{x_{r+1} - x_r}{x_{r+1}}\right| < \delta$$

dengan ε dan δ telah ditetapkan.