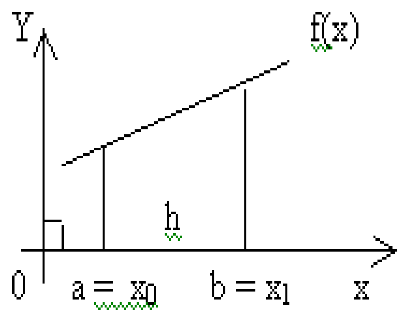
BAB 5 INTEGRASI NUMERIK

5.1 Aturan Trapesium

Diberikan dua buah titik data $(x_0,f(x_0))$ dan $(x_1,f(x_1))$. Karena f(x) melalui dua buah titik $(x_0,f(x_0))$ dan $(x_1,f(x_1))$, maka dipakai interpolasi berorde satu $f(x) \approx P_1(x)$.



$h = b - a.$

Menurut interpolasi beda terbagi Newton orde satu,

$P_1(x) = f_0 + f[x_0,x_1]\,(x-x_0).$

Dengan memakai $f(x) \approx P_1(x)$ diperoleh

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_1(x)dx$$

Jadi aturan trapesium adalah

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(f(a)+f(b)\right)}$$ dengan $h = b - a.$

Galat Aturan Trapesium

$$E \approx -\frac{1}{12}h^3 f''(t),\ o < t < h$$

$$\approx o(h^3)$$

Jadi, $\int_o^h f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f_o + f_h) + o(h^3).$

5.2 Komposisi Trapesium

Selang [a,b] dibagi menjadi n selang bagian dengan lebar selang $h = \frac{b-a}{n}$.

Berdasarkan aturan trapesium diperoleh

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{b} f(x)dx$$

$$\approx \frac{h}{2}\left(f(x) + f(x_1)\right) + \frac{h}{2}\left(f(x_1) + f(x_2)\right) + \cdots + \frac{h}{2}\left(f(x_{n-1}) + f(b)\right)$$

$$\approx \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b)\right) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}))$$

Jadi, $$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right).$$

Galat Aturan Komposisi Trapesium

Untuk n buah selang bagian, galat totalnya adalah

$$E_{tot} \approx \frac{-h^3}{12}\left(f_o'' + f_1'' + f_2'' + \cdots + f_{n-1}''\right)$$

$$\approx -\frac{h^2}{12}(b-a)f''(t)$$

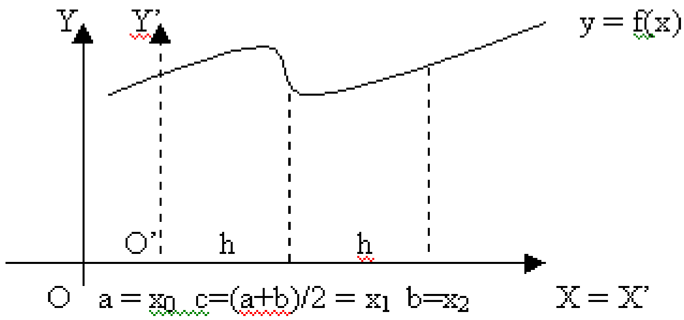
$$\approx o(h^2)$$

Jadi,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right) + o(h^2).$$

5.3 Aturan Simpson ($\frac{1}{3}$)

Apabila fungsi f(x) dihampiri dengan polinom interpolasi derajat 2, dibutuhkan 3 buah titik data misalkan (a, f(a)), (c,f(c)) dan (b,f(b)), dimana c = $\dfrac{a+b}{2}$.



Dengan polinomial Lagrange yang melalui titik-titik (a,f(a)), (c,f(c)), dan (b,f(b)) diperoleh:

$$P_2(x) \approx \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} f(a) + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} f(b) + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} f(c) .$$

Substitusikan ke dalam $I = \int_a^b f(x)dx$ akan diperoleh

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b P_2(x)dx$$

$$= \int_a^b \left[\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} f(a) + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} f(b) + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} f(c) \right] dx$$

Sumbu y ditranslasikan sehingga berimpit dengan titik a, maka diperoleh:

$$I = \int_o^{2h} \left[\frac{(x-2h)(x-h)}{(o-2h)(o-h)} f(a) + \frac{(x-o)(x-h)}{(2h-o)(2h-h)} f(b) + \frac{(x-o)(x-2h)}{(h-o)(h-2h)} f(c) \right] dx$$

$$I = \frac{1}{3} h \left[f(a) + 4f(c) + f(b) \right]$$

Jadi,

$$\boxed{I = \frac{1}{3} h \left[f_o + 4f_1 + f_2 \right].}$$

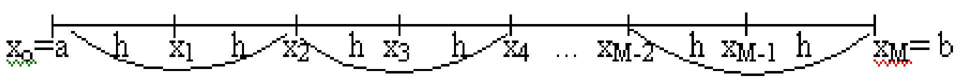
Galat aturan Simpson ($\frac{1}{3}$)

Galat aturan Simpson ($\frac{1}{3}$) adalah

$$E = \frac{32h^5}{120} f_o^{(4)} - \frac{20h^5}{72} f_o^{(4)} + \cdots - = -\frac{1}{90} h^5 f_o^{(4)} = o(h^5)$$

5.4 Aturan Komposisi Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$

Selang [a,b] dipartisi menjadi (M+1) titik dengan M genap, dengan lebar selang bagiannya h = $\left(\frac{b-a}{M}\right)$.



Berdasarkan aturan Simpson diperoleh

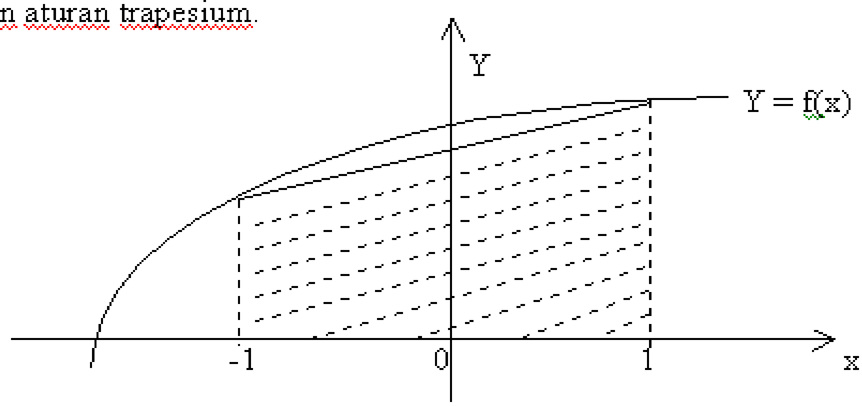
$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_2} f(x)dx \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{M-2}}^{b} fx)dx$$

$$I = \frac{4}{3}[f(a) + 4f_1 + f_2] + \frac{4}{3}[f_2 + 4f_3 + f_4] + \cdots + \frac{4}{3}[f_{M-2} + 4f_{M-1} + f_b]$$

$$\boxed{I = \frac{4}{3}\left[f(a) + f(b) + 4\sum_{\substack{i=1 \\ di=2}}^{M-1} f(x_i) + 2\sum_{\substack{i=2 \\ di=2}}^{M-2} f(x_i)\right]}$$

5.5 Kuadratur Gauss - Legendre

Kita ingin menghitung luas daerah di bawah kurva Y = f(x) pada $-1 \le x \le 1$ dengan aturan trapesium.



$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(1)+f(-1)] \approx f(1)+f(-1)$$ dengan $h = (1-(-1)) = 2$.

Persamaan $I \approx f(1) + f(-1)$ dapat ditulis sebagai $I \approx W_1 f(a) + W_2 f(b)$

dengan $a = -1$, $b = 1$, $W_1 = W_2 = \frac{h}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

Luas daerah yang dihitung sekarang adalah luas daerah di bawah garis lurus yang dinyatakan sebagai

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx \approx W_1 f(x_1) + W_2 f(x_2)$$

dengan W_1, W_2, x_1, dan x_2 adalah sembarang nilai. Kita harus memilih W_1, W_2, x_1, dan x_2 sedemikian sehingga galat integrasinya minimum. Persamaan ini dinamakan **persamaan kuadratur Gauss**.

Dengan cara koefisien tak tentu, dan diuji dengan monomial 1, x, x^2, dan x^3, karena $I = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ eksak untuk empat fungsi tersebut, diperoleh:

Diperoleh $$\boxed{I = \int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-\sqrt{\frac{1}{3}}) + f(\sqrt{\frac{1}{3}})}$$

Persamaan ini dinamakan **metode Gauss-Legendre 2 titik**.

5.5.1 Metode Gauss-Legendre 3-titik

Metode Gauss-Legendre 3 titik dapat ditulis sebagai

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx \approx W_1 f(x_1) + W_2 f(x_2) + W_3 f(x_3)$$

Parameter x_1, x_2, x_3, W_1, W_2, dan W_3 dapat dicari dengan fungsi $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = x^4$, dan $f(x) = x^5$, karena kuadratur Gauss bernilai eksak untuk fungsi-fungsi tersebut.

Jadi,

$$\boxed{I = \int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{5}{9}.f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}.f(0) + \frac{5}{9}.f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)}$$

5.5.2 Metode Gauss-Legendre n-titik

Aturan Gauss-Legendre umum n-titik eksak untuk polinom berderajat kurang dari atau sama dengan (2n-1). Metode Gauss-Legendre n-titik

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx W_1 f(x_1) + W_2 f(x_2) + \cdots + W_n f(x_n)$$

Absis-absis x_n dan bobot-bobot W_n yang dipakai telah ditabulasikan. Tabel berikut ini memberikan nilai-nilai x_n dan W_n sampai 6 titik.

Metode Gauss-Legendre n-titik

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx W_1 f(x_1) + W_2 f(x_2) + \cdots + W_n f(x_n)$$

n	**Bobot W_n**	**Absis x_n**	**Galat pemotongan**
2	1,00000000 1,00000000	-0,57735027 0,57735027	$\approx f^{(4)}(c)$
3	0,55555556 0,88888889 0,55555556	-0,77459667 0 0,77459667	$\approx f^{(6)}(c)$
4	0,34785485 0,65214515 0,65214515 0,34785485	-0,86113631 -0,33998104 0,33998104 0,86113631	$\approx f^{(8)}(c)$
5	0,23692689 0,47862867 0,56888889 0,47862867 0,23692689	-0,90617985 -0,53846931 0 0,53846931 0,90617985	$\approx f^{(10)}(c)$
6	0,17132449 0,36076157 0,46791393 0,46791393 0,36076157 0,17132449	-0,93246951 -0,66120939 -0,23861919 0,23861919 0,66120939 0,93246951	$\approx f^{(12)}(c)$

5.6 Transformasi Selang dari $\int_a^b f(x)dx$ ke dalam $\int_{-1}^{1} f(z)dz$

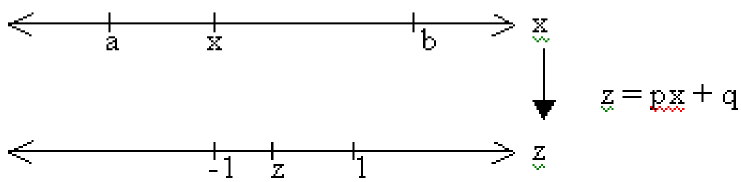
Untuk menghitung integrasi $I = \int_a^b f(x)dx$ kita harus melakukan transformasi:

a) selang [a,b] ke dalam [-1,1]

b) peubah x ke dalam peubah z

c) diferensial dx ke dalam dz

Perhatikan diagram garis berikut :



Dari kedua diagram garis itu ambil transformasi **z = px + q**.

Diperoleh:

$$x = \frac{b-a}{2}z + \frac{b+a}{2}$$

Juga diperoleh diferensialnya yaitu dx = $\frac{b-a}{2}dz$.

Substitusikan x dan dx ke $I = \int_a^b f(x)dx$ diperoleh

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}z + \frac{b+a}{2}\right)dz}$$