KULIAH PERTEMUAN 1

Teori dasar dalam analisa struktur mengenai hukum Hooke, teorema Betti, dan hukum timbal balik Maxwel

A. Lembar Informasi

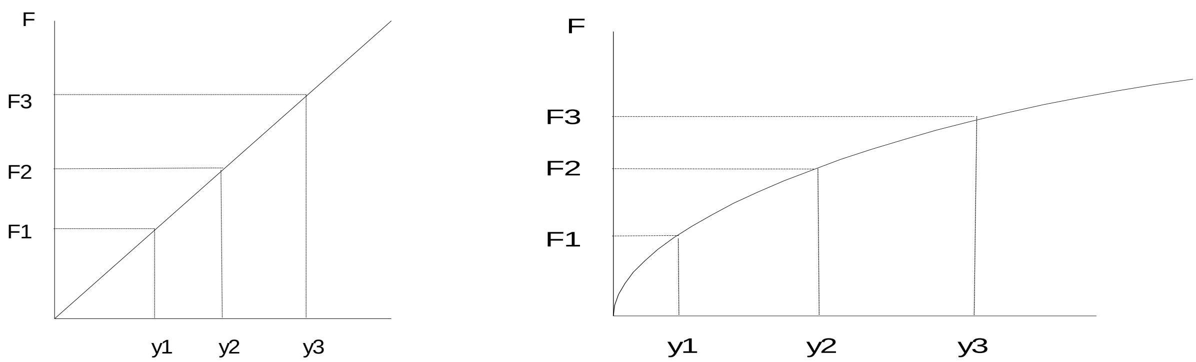
1. Kompetensi :

Setelah selesai mempelajari kuliah pertemuan ke-1 ini diharapkan mahasiswa Memahami teori dasar dalam analisa struktur mengenai hukum Hooke, teorema Betti, dan hukum timbal balik Maxwel

2. Materi Belajar

Hukum Hooke.

Salah satu prinsip dasar dari analisa struktur adalah hukum Hooke yang menyatakan bahwa pada suatu struktur : hubungan tegangan (*stress*) dan regangan (*strain*) adalah proporsional atau hubungan beban (*load*) dan deformasi (*deformations*) adalah proporsional. Struktur yang mengikuti hukum Hooke dikatakan elastis linier dimana hubungan F dan y berupa garis lurus. Lihat Gambar 1.1-a. , sedangkan struktur yang tidak mengikuti hukum Hooke dikatakan Elastis non linier, lihat Gambar 1.1-b.



(a) (b)

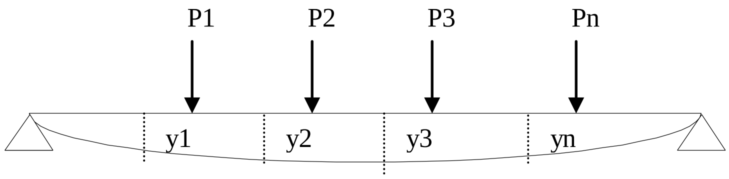
Gambar 1.1

dari gambar 1.1-a ,
$F = K\,y$, dimana F= beban , K = konstanta proporsional dan y = defleksi.
untuk $F_3 = (F_1+F_2) \longrightarrow y_3 = y_1 + y_2$

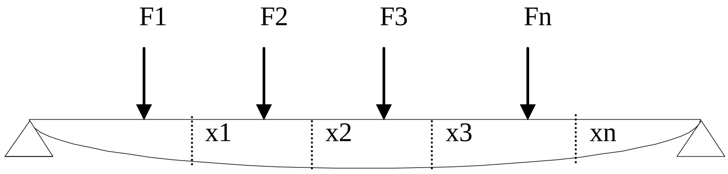
dari gambar 1.1-b ,
$F = K\,y^n$
Dimana : $F_1 = K\,y_1^n$
$F_2 = K\,y_2^n$
$F_3 = K\,y_3^n$
Dalam hal ini, $y_3^n \neq (y_1^n + y_2^n)$

Hukum Betti.

Jika suatu struktur elastis linier diberikan dua sistim beban terpisah P_1, P_2, P_3, … P_n, (gambar 1.2-a) dan F_1, F_2, F_3, …. F_n, (gambar 1.2-b) dimana gaya-gaya P menghasilkan deformasi y_1 , y_2 , y_3 … y_n dibawah kedudukan gaya-gaya F dan gaya-gaya F menghasilkan deformasi x_1, x_2, x_3, …. x_n, dibawah kedudukan gaya-gaya dari P,



Gambar 1.2-a



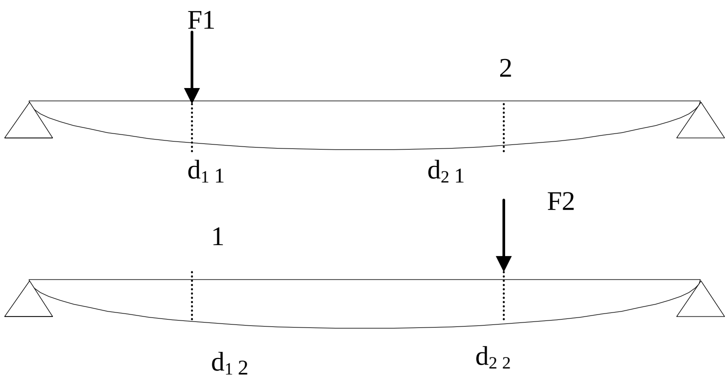
Gambar 1.2-b

Maka : $P_1\, x_1 + P_2\, x_2 + \ldots.\ P_n\, x_n = F_1\, y_1 + F_2\, y_2 + \ldots..\ F_n\, y_n$

Atau : " jika pada struktur elastis linier bekerja 2 sistem gaya, maka usaha yang dilakukan oleh sistem gaya 1 terhadap lendutan yang diakibatkan oleh sistem gaya 2 pada titik titik kerja gaya sistem 1 sama dengan usaha yang dilakukan oleh sistem gaya 2 terhadap lendutan yang disebabkan oleh sistem gaya 1 pada titik-titik kerja gaya sistem 2 "

Hukum Timbal Balik Maxwel (*Reciprocal theorem*)

Jika pada struktur linier elastis bekerja 2 gaya F1 , F2 pada titik 1 dan 2 , maka usaha yang dilakukan oleh gaya F1 terhadap lendutan pada titik 1 yang diakibatkan oleh F2 sama dengan usaha yang dilakukan oleh gaya F2 terhadap lendutan pada titik 2 yang diakibatkan oleh F1.



$F1 \,.\, d_{1\,2} = F2 \,.\, d_{2\,1}$

Jika F1 = F2 = 1, maka $d_{1\,2} = d_{2\,1}$

(hukum timbal balik Maxwell : menyatakan, pada struktur elastis linier maka deformasi pada titik 1 akibat gaya 1 unit pada titik 2 sama dengan deformasi pada titik 2 akibat gaya 1 unit pada titik 1.)
Demikian juga bila gaya satu unit tersebut dalam bentuk momen satu satuan.

KULIAH PERTEMUAN 2
Teori dasar dalam analisa struktur mengenai enersi regangan, prinsip virtual work, teori momen area dan prinsip Conjugate beam

A. Lembar Informasi

1. Kompetensi

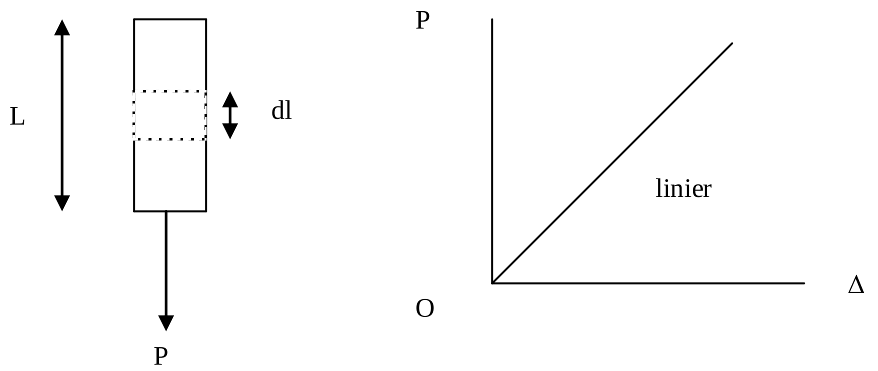
Setelah selesai mempelajari kuliah pertemuan ke-2 ini diharapkan mahasiswa memahami teori dasar dalam analisa struktur mengenai enersi regangan, prinsip virtual work, teori Castigliano, teori momen area dan prinsip Conjugate beam

2. Materi Belajar

ENERSI REGANGAN

Suatu struktur akan berdeformasi akibat pengaruh beban luarnya sehingga menghasilkan tegangan dan regangan (internal). Usaha akibat beban yang bekerja tersebut pada struktur akan tersimpan didalam struktur sebagai suatu enersi yang disebut " enersi regangan".

1. Enersi regangan akibat gaya aksial (Normal Force)



Enersi regangan sepanjang dl yang menghasilkan perubahan dΔ :

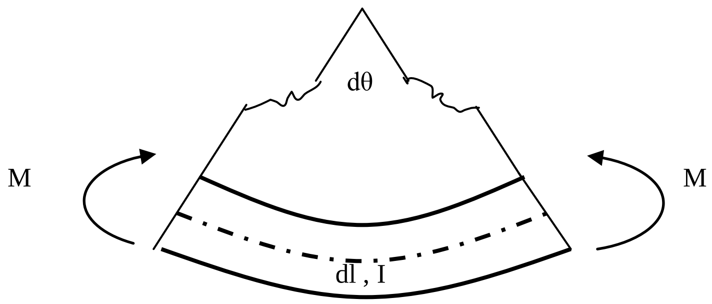
$dU_n = \frac{1}{2} P d\Delta = \frac{1}{2} P\left(\frac{Pdl}{AE}\right)$,

dimana A = luas penampang batang, E = modulus elastis
maka total sepanjang L , enersi regangan :

$U_n = \int_0^L \frac{P^2 dl}{2AE}$, dimana P, A, dan E. adalah konstan maka :

$$U_n = \frac{P^2 L}{2AE}$$

2. Enersi regangan akibat gaya Lentur



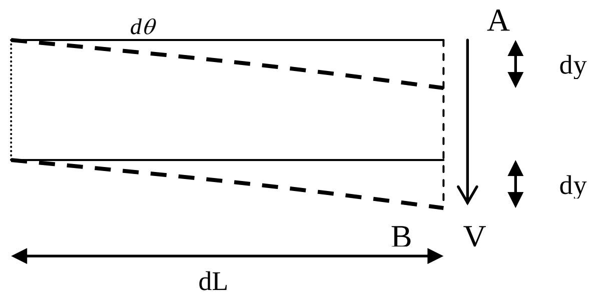
Rotasi relatif dθ dari kedua ujung elemen yang berhubungan dengan M :

$d\theta = \dfrac{Mdl}{EI}$, I = momen inertia

$dUm = \frac{1}{2} M \, d\theta = \dfrac{M^2 dl}{2EI}$

sepanjang L : $Um = \int_0^L \dfrac{M^2 dl}{2EI} = \dfrac{M^2 L}{2EI}$

3. Enersi regangan akibat gaya Geser



Regangan geser $d\phi = \dfrac{dy}{dL} = \dfrac{f_s}{G} = \dfrac{V}{AG}$, dimana : G = modulus rigidity

Sepanjang kedalaman AB maka enersi regangan :

$dUs = \frac{1}{2} V \, dy = \dfrac{V^2 dl}{2GA}$

sepanjang L , maka : $Us = \int_0^L \dfrac{V^2 dl}{2GA} = \dfrac{V^2 L}{2GA}$

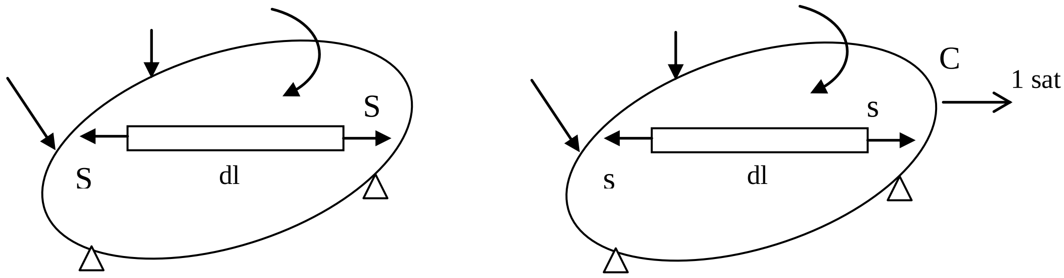
4. Enersi regangan akibat gaya Torsi

Dengan cara yang sama untuk batang yang bulat akibat beban torsi, maka enersi regangan : $U_t = \int_0^L \dfrac{T^2 dl}{2GJ} = \dfrac{T^2 L}{2GJ}$,

dimana : T = gaya torsi dan J = momen inersia polar penampang

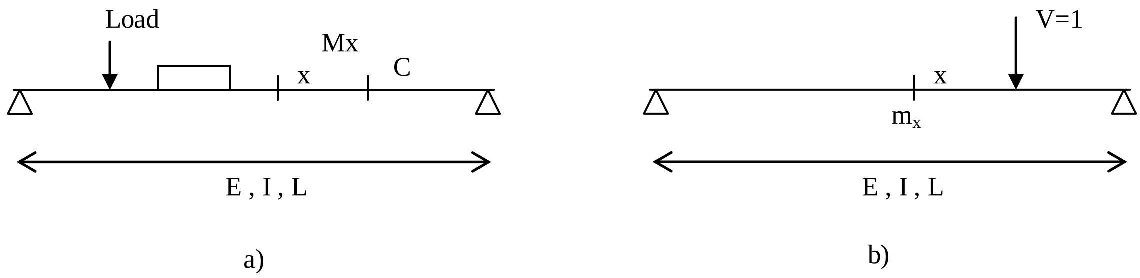
PRINSIP VIRTUAL WORK

Prinsip virtual work atau kerja virtuil pada dasarnya menerapkan beban satu satuan pada titik yang ditinjau untuk melihat pengaruh lendutan pada titik tersebut.



Suatu benda elastis dibebani P1, P2, M1 akan dicari peralihan horizontal di titik C (misalkan arah ke kanan).
Tinjau suatu elemen panjang dl, dimana luas penampang A , S = gaya yang bekerja pada elemen tersebut, maka perpanjangan pada elemen , $\Delta l = \frac{S\,dl}{AE}$
Di titik C diberi beban virtuil 1 satuan beban horizontal arahnya sama dengan arah peralihan yang dimisalkan. Pada elemen tesebut bekerja gaya sebesar *s*.
Jika beban aktual P1, P2, M1 disuperposisikan dengan beban virtual 1 satuan di titik C maka berlaku : $1.d_c^h = \sum_n \{s.(\frac{S\,dl}{AE})\}$, dimana $\sum_n$ = jumlah total dari seluruh elemen.
Untuk mengetahui besaran putaran sudut pada suatu titik maka pada titik tersebut diberi momen virtuil 1 satuan beban searah putaran sudutnya, pada elemen tersebut akan bekerja jaya sebesar *s*, maka berlaku : $1.\theta = \sum_n \{s.(\frac{S\,dl}{AE})\}$

Aplikasi prinsip virtual work pada balok.



Pada gambar a) balok diberi sistim beban terpusat dan merata, untuk menghitung defleksi vertical di titik C maka diperlukan balok yang sama dengan beban luar yang dihilangkan dan diberi beban 1 satuan arah vertical pada titik C, sedangkan untuk menghitung rotasi / putaran sudut di titik C maka beban virtual yang dipasang di titik C adalah beban momen 1 satuan.

Adapun keterangan rumus yang dipakai :

M_x = momen lentur pada setiap titik x akibat beban actual
M_x = momen lentur pada titik x akibat beban virtual yang dipasang.
I_x = momen inertia penampang dari balok di x
d_x = panjang elemen kecil dari balok di x
E = modulus elastis

Rotasi dθ , sepanjang dx, akibat momen actual M_x **:**

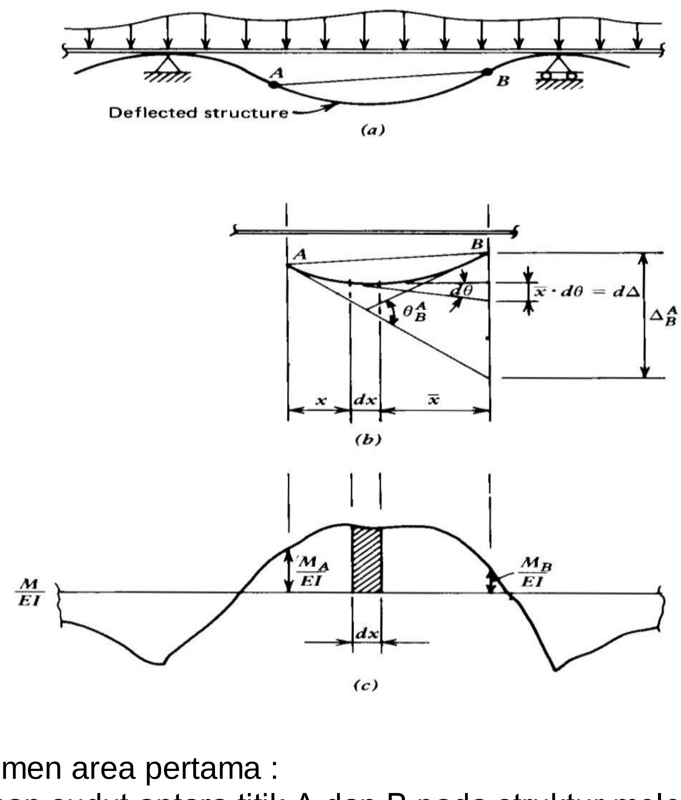
$$d\theta = \frac{M_x dx}{EI_x}$$

Persamaan usaha internal dan eksternal dari sistim virtual, dapat ditetapkan :

$$1.d_c^v = \int^L m_x (d\theta)$$

$$1.d_c^v = \int^L m_x (\frac{M_x dx}{EI_x})$$

TEORI MOMEN AREA



Teori momen area pertama :
“Perubahan sudut antara titik A dan B pada struktur melendut, atau kemiringan sudut pada titik B terhadap kemiringan sudut pada titik A. Didapat dengan menjumlahkan luas diagram M/EI dibawah kedua titik tersebut”.

Persamaan dasar : $d\theta = \frac{M}{EI} dx$

Putaran sudut pada balok yang melentur : $\theta_B^A = \int_A^B \frac{M}{EI} dx$

Teori momen area kedua :
"Lendutan pada titik B dari Struktur yang melendut dengan berpatokan pada garis tangent terhadap titik A dari struktur didapat dengan menjumlahkan statis momen dari luas diagram M/EI di bawah kedua titik tersebut".

Persamaan dasar $\alpha\Delta = \bar{x} \frac{M}{EI} dx$

Lendutan pada balok yang melentur $\Delta_A^B = \int_A^B \frac{M}{EI} \overline{X} dx$

KULIAH PERTEMUAN 3
Defleksi elastis rangka batang dengan metode unit load

A. Lembar Informasi

1. Kompetensi

Setelah selesai mempelajari kuliah pertemuan ke-3 ini diharapkan mahasiswa dapat menghitung defleksi pada rangka batang dengan metode unit load

2. Materi Belajar

DEFLEKSI ELASTIS PADA RANGKA BATANG (STATIS TERTENTU)

Defleksi pada rangka batang atau peralihan titik kumpul pada rangka batang dapat vertical dan horizontal, (pada vertikal biasanya disebut lendutan/penurunan). Untuk menghitung lendutan pada rangka batang dapat digunakan metoda : Unit Load Method, Angle Weights, Joint-displacment, Williot-Mohr (Graphical).

Adapun perbedaan fungsi pemakaian metode tersebut :

1. Unit Load Method

   Metode ini menggunakan beban 1 satuan yang akan menghasilkan satu komponen lendutan/ peralihan titik kumpul baik pada arah vertikal atau arah horizontal saja.

2. Angle Weights

   Metode yang memanfaatkan perubahan sudut yang dijadikan sebagai beban berdasarkan Conjugate beam, sehingga di dapat lendutan vertikal pada seluruh titik kumpul pada batang atas (upper chord) atau batang bawah (lower chord) dalam satu operasi perhitungan.

3. Joint-Displacement

   Peralihan titik kumpul arah Horizontal maupun Vertikal pada seluruh titik kumpul dapat dihasilkan dalam waktu yang sama (bersamaan).

4. Williot-Mohr (Graphical)

   Perhitungan secara grafis untuk peralihan titik kumpul baik arah Horizontal maupun Vertikal pada waktu yang sama (bersamaan).

Dalam modul ini hanya dibahas dua metode yaitu Unit Load dan Angle Weights

1. UNIT LOAD MENTHOD

Metode ini hanya dapat menghitung satu komponen peralihan titik kumpul saja untuk satu kali perhitungan. (misal: vertikal atau horizontal)

$$\delta = \sum u_i \times (\Delta l)_i$$

Dimana:

δ = Peralihan vertikal atau horizontal titik kumpul.

u_i = Gaya batang akibat beban 1 satuan yang dipasang pada titik kumpul yang akan dicari peralihannya (arah beban sama dengan arah peralihan yang diminta)

Δl = Perpanjangan atau perpendekan batang akibat beban yang diketahui.

$$\Delta l = \frac{S.L}{A.E},$$

Dimana:

S = Gaya batang akibat beban yang bekerja.

L = Panjang Batang

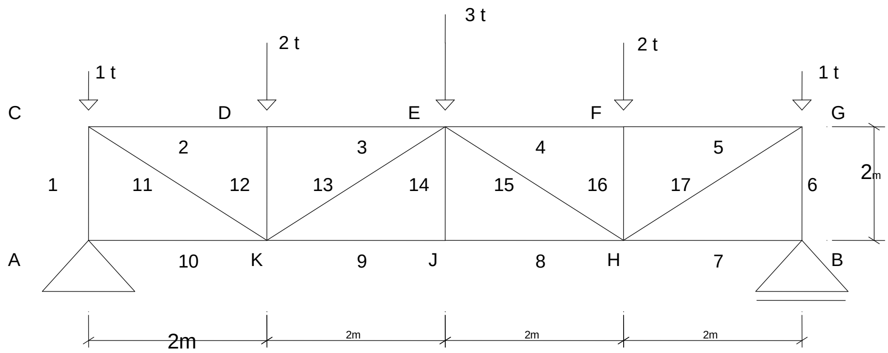
A = Luas Penampang Batang

E = Modulus Elastisitas Batang

Tahapan:

1. Menghitung gaya batang (S) akibat beban luar
2. Menghitung Δl tiap batang
3. Letakan P = 1 sat dititik kumpul yang akan dicari peralihannya dengan arah gaya yang sesuai dengan harapan atau peralihan yang dicari (vertikal/horizontal).
4. Menghitung gaya batang U akibat beban 1 satuan tersebut.
5. Hitung δ berdasarkan rumus $\delta = \sum ui \times (\Delta l)i$ 110
6.

Contoh: Perhitungan defleksi pada titik kumpul



Diketahui semua batang : A = 6,16 cm^2 , E = 2,1.10^6 Kg/cm^2

Hitung peralihan titik kumpul

a) K_V (arah vertikal)

b) D_H (arah horizontal)

Solusi:

1. Hitung gaya-gaya batang akibat beban luar (lihat tabel), misal: S_1 = - 4,5 ton S_2 s/d S_7 ditabel.
2. Δl pada batang 1 → Δl_1 = $\frac{-4{,}5ton \times 2m}{6{,}16cm^2 \times 2{,}1.10^6 kg/cm^2}$ =

   $\frac{-4500kg \times 200cm}{6{,}16cm^2 \times 2{,}1.10^6 kg/cm^2} = -0{,}0696cm$ (perpendekan)
3. Pasang beban 1 satuan di titik K arah vertikal (bawah) dan di D arah horizontal (kiri)
4. Hitung gaya batang akibat 1 satuan di titik sehingga didapat Ui untuk δ di Kv, juga untuk di titik D hingga didapat Ui Untuk δ di D_H.
5. Menghitung δ (lihat tabel).
6. Hasil dari Tabel, di dapat: δ di Kv = 0,404303 cm (arah ke bawah, sesuai pemisalan), δ di D_H = 0,1329 cm (arah kanan, kebalikan dari pemisalan).

TABEL PERALIHAN TITIK KUMPUL

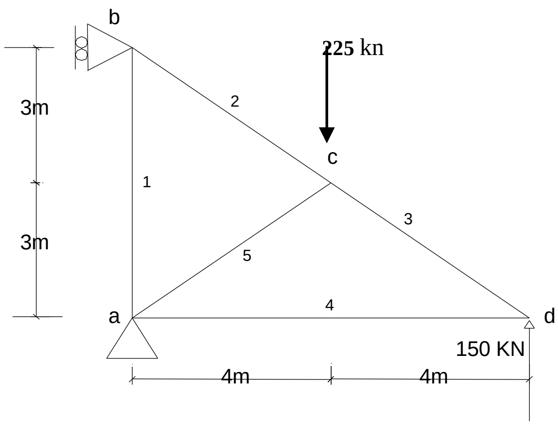
No Batang	**Panjang L (cm)**	**Gaya btg S (ton)**	**Δl (cm) (3)**	**U untuk Kv (4)**	**U untuk Dh (5)**	**Kv (cm) (3)*(4)**	**Dh (3)*(5)**
1	200	-4,5	-0,0696	-0,75	-0,25	0,0522	0,0174
2	200	-3,5	-0,0541	-0,75	-0,25	0,0406	0,0135
3	200	-3,5	-0,0541	-0,75	0,75	0,0406	-0,0406
4	200	-3,5	-0,0541	-0,25	0,25	0,0135	-0,0135
5	200	-3,5	-0,0541	-0,25	0,25	0,0135	-0,0135
6	200	-4,5	-0,0696	-0,25	0,25	0,0174	-0,0174
7	200	0	0,0000	0	0	0,0000	0,0000
8	200	5,1	0,0788	0,5	-0,5	0,0394	-0,0394
9	200	5,1	0,0788	0,5	-0,5	0,0394	-0,0394
10	200	0	0,0000	0	-1	0,0000	0,0000
11	283	4,95	0,1083	1,06	0,35	0,1148	0,0379
12	200	-2	-0,0309	0	0	0,0000	0,0000
13	283	-2,2	-0,0481	0,35	-0.35	-0,0168	0,0168
14	200	0	0,0000	0	0	0,0000	0,0000
15	283	-2,2	-0,0481	-0,35	0,35	0,0168	-0,0168
16	200	-2	-0,0309	0	0	0,0000	0,0000
17	283	4.95	0,1083	0,35	-0,35	0,0379	-0,0379
				TOTAL		0,4093 cm	-0,1330 cm
				Nilainya ARAH		0,4093 cm Kebawah	0,1330 cm Kekanan

B. Lembar Latihan

LENDUTAN (UNIT LOAD METHOD)

Hitung Lendutan di arah Vertikal dan Horizontal pada titik C dari struktur berikut :

Dimana : semua batang dengan A = 25 cm^2 dan E = 2.10^6 kg/cm^2 = 200.10^9 Pa N/m^2



Yang harus di hitung :

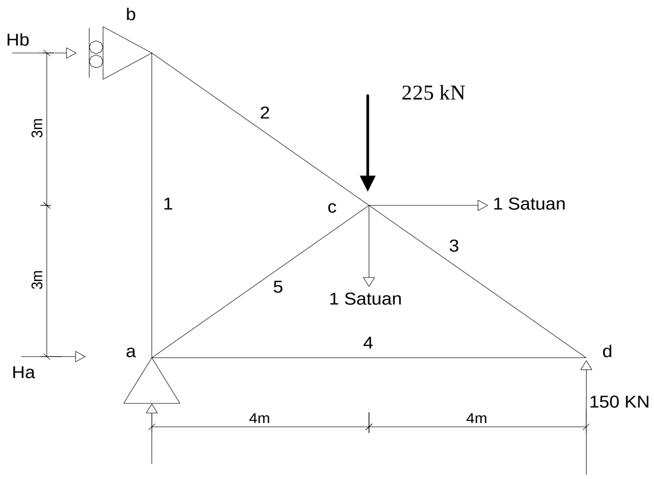
- Gaya batang akibat beban luar
- Gaya batang akibat beban 1 satuan di titik C dengan arah horizontal untuk lendutan ke arah horizontal dan 1 satuan beban di titik C arah vertikal untuk lendutan arah vertikal.

Solusi :

Hitung Gaya batang akibat beban luar (hasil lihat tabel)

Hitung Δ l tiap batang, $\Delta \text{l} = \dfrac{S.L}{E.A}$ (hasil lihat tabel)

Gaya batang akibat beban 1 satuan di C arah vertikal (hasil lihat tabel)



Tabel Gaya batang akibat beban luar dan akibat beban 1 satuan di C arah Y

Batang	S (KN) Gaya Batang Aktual	Δl (mm)	U Gaya Batang Virtual	Ui Δl
1	37.50	0.45	0.5	0.2250
2	- 62.50	- 0.625	- 0.833	0.5208
3	- 250	- 2.5	0	0
4	200	3.2	0	0
5	- 187.5	- 1.875	0.833	- 1.5625
			Σ nilai	-0.8167 0.8167 mm (arah ke atas)

Dengan cara sama untuk lendutan pada titik C arah Horizontal, maka :

Tabel gaya batang akibat beban luar dan akibat beban 1 satuan di C arah horizontal.

Batang	S	Δl	U	Ui Δl
1	37.50	0.45	- 0.38	- 0.1688
2	- 62.50	- 0.625	0.63	- 0.3906
3	- 250	- 2.5	0	0
4	200	3.2	0	0
5	- 187.5	- 1.875	0.63	- 1.1719
			Σ nilai	- 1.7313 mm 1.7313 mm (arah ke kiri)

KULIAH PERTEMUAN 4

Defleksi elastis rangka batang dengan metode angle weights

A. Lembar Informasi

1. Kompetensi

Mahasiswa dapat menghitung defleksi pada rangka batang dengan metode angle weights

2. Materi Belajar

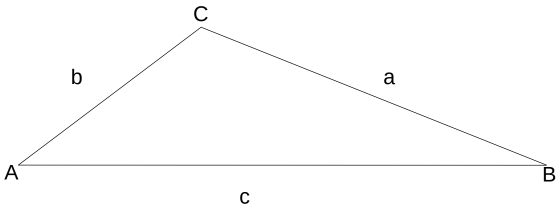
ANGLE WEIGHTS

(Untuk Penurunan Rangka Batang, Statis Tertentu)

Rumus yang dipakai (sebagai patokan pada Δ ABC)

catatan: penurunan rumus lihat hal 55-57 Chu Kia Wang

Perubahan sudut :



$$\Delta A = (\varepsilon_A - \varepsilon_B) \text{ Cotg } C + (\varepsilon_A - \varepsilon_C) \text{ Cotg } B$$

$$\Delta B = (\varepsilon_B - \varepsilon_C) \text{ Cotg } A + (\varepsilon_B - \varepsilon_A) \text{ Cotg } C$$

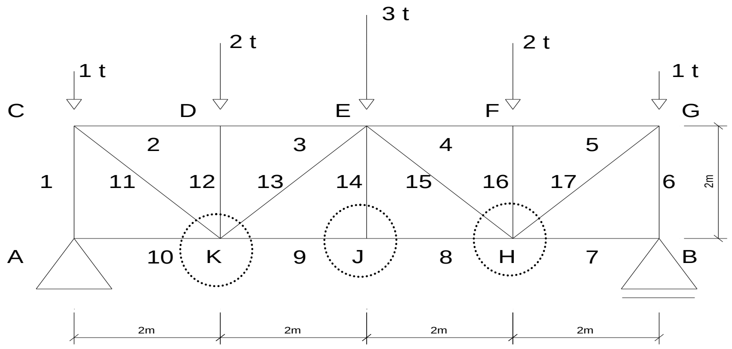
$$\Delta C = (\varepsilon_C - \varepsilon_A) \text{ Cotg } B + (\varepsilon_C - \varepsilon_B) \text{ Cotg } A$$

Dimana, ε_A = regangan panjang batang a = $\dfrac{\Delta l_a}{l_a}$

Tahapan perhitungan dalam menghitung lendutan rangka batang sebagai berikut :

1. Menghitung gaya-gaya batang S , akibat beban luar (ton)
2. Menghitung perpanjangan batang $\Delta l = \dfrac{S.L}{E.A}$ (cm), akibat beban luar
3. Menghitung regangan $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l}$ (dibuat dalam satuan 10^{-4})
4. Menghitung perubahan sudut pada titik kumpul yang akan dicari lendutannya (vertikal)
5. Menghitung lendutan pada titik kumpul berdasarkan “conjugate beam method” (harga perubahan sudut dijadikan beban luarnya).

Contoh:



Diketahui : seluruh batang luas penampang = A = 6,16 cm^2 , E = $2,1.10^6$ kg/cm

Hitung peralihan vertikal di titik J, K, H.

Solusi:

1). Gaya batang S akibat beban luar.

No	S (ton)	No	S (ton)	No	S (ton)
1	4.5	6	-4.5	12	2
2	-3.5	7	0	13	-2.12
3	-3.5	8	5	14	0
4	-3.5	9	5	15	-2.12
5	-3.5	10	0	16	-2
		11	4.95	17	4.95

2). Pertambahan panjang batang Δ l = $\frac{S.L}{E.A}$

No	L (cm)	Δl (cm)	No	L (cm)	Δl (cm)
1	200	-0.0696	11	283	0.1083
2	200	-0.0541	12	200	-0.0309
3	200	-0.0541	13	283	-0.0481
4	200	-0.0541	14	200	0
5	200	-0.0541	15	283	-0.0481
6	200	-0.0696	16	200	-0.0309
7	200	0	17	283	0.1083
8	200	0.0788			
9	200	0.0788			
10	200	0			

3). Regangan $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$

No	ε	No	ε
1	$\frac{-0.0696}{200} = -3.48.10^{-4}$	11	$3.829.10^{-4}$
2	$-2.705.10^{-4}$	12	$-1.545.10^{-4}$
3	$-2.705.10^{-4}$	13	$-1.701.10^{-4}$
4	$-2.705.10^{-4}$	14	0
5	$-2.705.10^{-4}$	15	$-1.701.10^{-4}$
6	$-3.48.10^{-4}$	16	$-1.545.10^{-4}$
7	0	17	$3.829.10^{-4}$
8	$3.94.10^{-4}$		
9	$3.94.10^{-4}$		
10	0		

4. Perubahan sudut pada titik kumpul

Titik K

segitiga CKA → $\Delta K_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_{10})$ Cotg A + $(\varepsilon_1 - \varepsilon_{11})$ Cotg C

= (-3.48-0) (0) + (-3.48 – 3.829) (1) = -7.309

segitiga DKC → $\Delta K_2 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_{11})$ Cotg C + $(\varepsilon_2 - \varepsilon_{12})$ Cotg D

= (-2.705-3.829) (1) + (-2.705 – (-1.545)) (0) = -6

segitiga DKE → $\Delta K_3 = (\varepsilon_3 - \varepsilon_{12})$ Cotg D + $(\varepsilon_3 - \varepsilon_{13})$ Cotg E

= (-2.705+1.545) (0) + (-2.705 + 1.701) (1) = -1.004

segitiga EKJ → $\Delta K_4 = (\varepsilon_{14} - \varepsilon_{13})$ Cotg E + $(\varepsilon_{14} - \varepsilon_9)$ Cotg J

= (0+1.701) (1) + (0– 3.94) (0) = 1.701

Jadi $\Delta K = \Delta K_1 + \Delta K_2 + \Delta K_3 + \Delta K_4 = -13.146 \times 10^{-4}$

Titik J

segitiga KJE → ΔJ_I = (-1.701-3.94) (1) + (1.701-0) (1) = -7.342

segitiga HJE → ΔJ_2 = (-1.701-0) (1) + (1.701-3.94) (1) = -7.342

Jadi $\Delta J = -7.342 - 7.342 = -14.684.10^{-4}$

Titik H

segitiga EHJ → ΔH_I = (0+1.701) (1) + (0– 3.94) (0) = 1.701

segitiga FHE → ΔH_2 = (-2.705-1.545) (0) + (-2.705 +1.701) (1) = -1.004

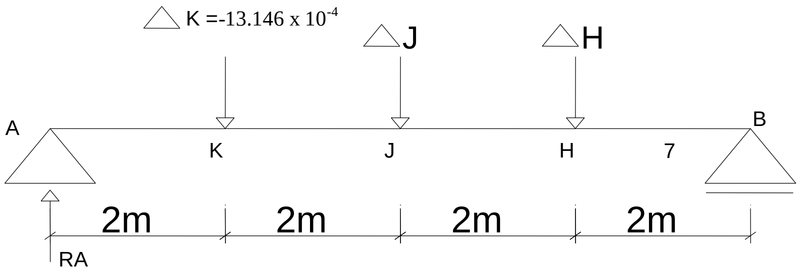
segitiga FHG → ΔH_3 = (-2.705+3.829) (1) + (-2.705 + 1.545) (0) = -6.594

segitiga GHB → ΔH_4 = (-3.48-0) (0) + (-3.483.829) (1) = -7.309

Jadi ΔH = -13.146.10^{-4}

5. Conjugate truss

Lendutan di titik K, J, H di hitung berdasarkan "Conjugate Beam method" dimana perubahan sudut ditiap titik yang ditinjau menjadi beban pada balok AB yang merupakan lower chord dari rangka batang.



untuk perhitungan *Lendutannya dapat dihitung dari momen di titik yang dicari lendutannya* akibat beban conjugate.

$\Sigma M_B = 0$ → RA.8 - (13.146.10^{-4}) (6) – (14.684.10^{-4}) (4) - (13.146.10^{-4}) (2) = 0

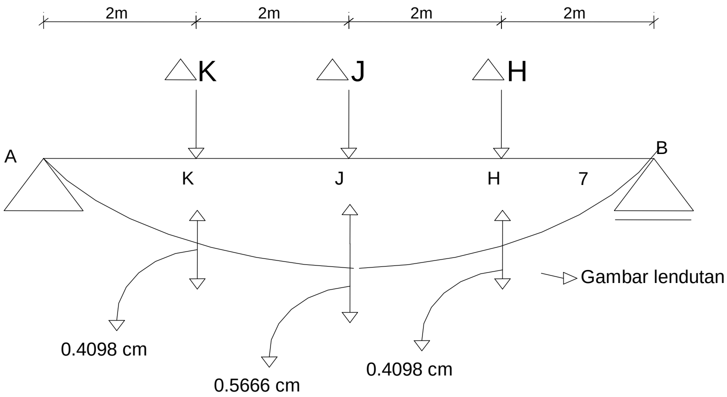
Maka : RA = 20.488.10^{-4}

Momen di dititik K. → lendutan vertikal di K = ΔKv = Ra x 200 cm = 20.488.10^{-4} . 200 cm = 0.4098 cm

M_J → lendutan vertikal di J = ΔJv = Ra x jarak – ΔK x jarak = 20.488.10^{-4} (400) - 13.146.10^{-4} (200) = 0.5566 cm

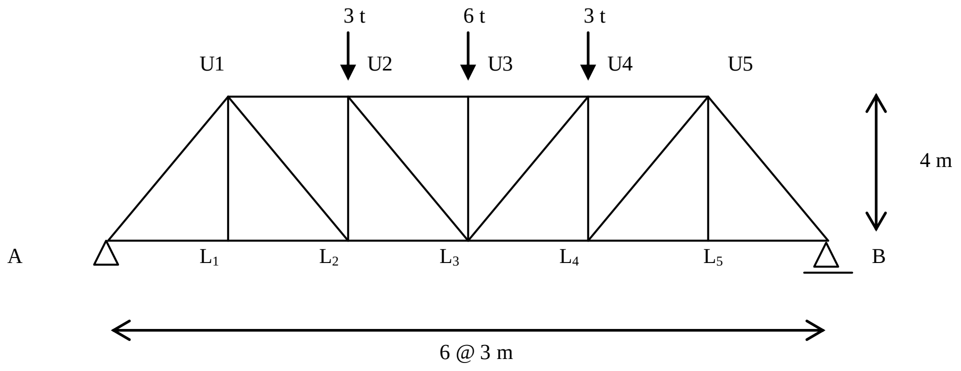
M_H → lendutan vertikal di H = ΔHv = 20.488.10^{-4} (600) - 13.146.10^{-4} (400) = 0.4098 cm

Sehingga hasil lendutan elastis batang dapat dilihat pada gambar di bawah ini :


2m
2m
2m
2m
K
J
H
A
B
K
J
H
7
Gambar lendutan
0.4098 cm
0.5666 cm
0.4098 cm

B. Lembar Latihan

Hitung lendutan vertikal di titik L_1 , L_2 , L_3 , L_4 , L_5 pada struktur rangka berikut :
Dimana : batang diagonal luas penampang A = 200 cm^2 , batang tegak luas penampang A= 120 cm^2 , batang horisontal luas penampang A = 150 cm^2 , E = 2.1 x 10^6 kg/cm^2



KULIAH PERTEMUAN 5
Defleksi elastis pada balok dengan metode Integrasi

A. Lembar Informasi

1. Kompetensi

Setelah selesai mempelajari kuliah pertemuan ke-5 ini diharapkan mahasiswa dapat menghitung defleksi elastis pada balok dan portal dengan metode Integrasi

2. Materi Belajar

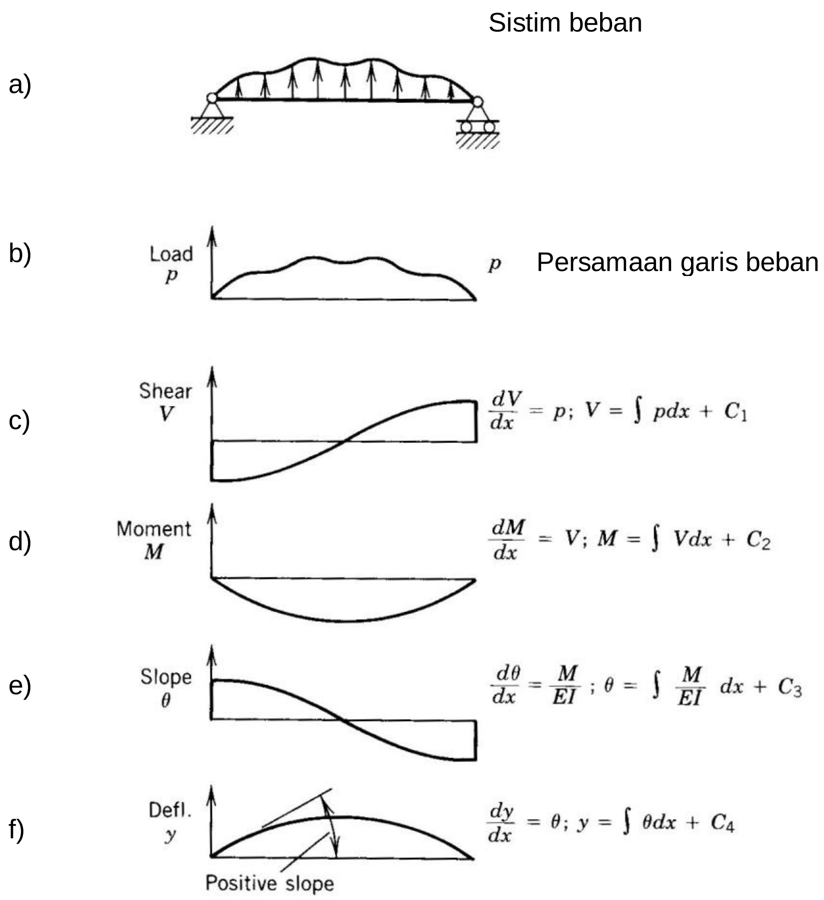
METODE INTEGRASI

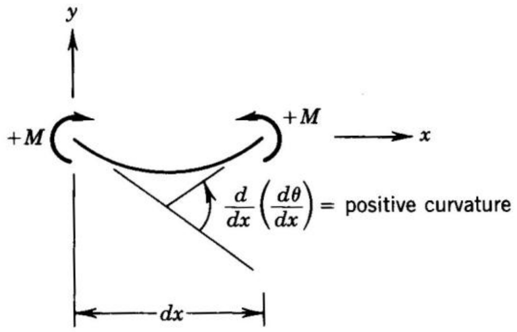
Untuk putaran sudut (Sudut kemiringan)

Persamaan dasar : $d\theta = \frac{M}{EI} dx$, diintegralkan $\theta = \int \frac{M}{EI} dx + C_3$

Untuk lendutan struktur : dy = θ dx , diintegralkan $y = \int \theta \, dx + C_4$

<u>Secara Umum</u>



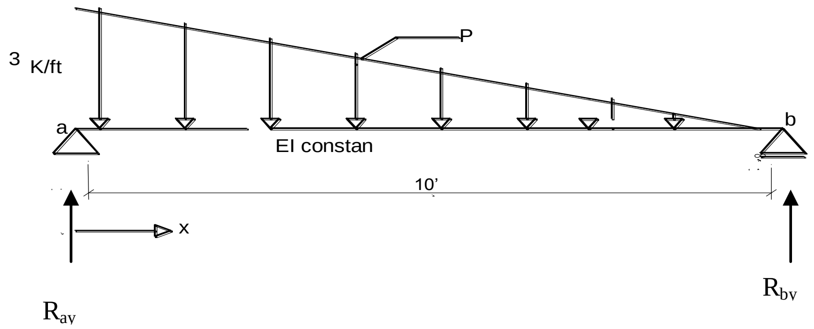


Hubungan antara momen positif dan kelengkungan (curvature) positif

Pada gambar a) menunjukan balok yang diberi sembarang beban, b) beban yang memiliki persamaan garis beban, c) menetukan gaya geser dari persamaan garis beban $\frac{dv}{dx} = p;\ V = \int pdx + C_1$, d) menentukan momen dari persamaan gaya geser $\frac{dm}{dx} = V;\ M = \int vdx + C_2$, e) menentukan putaran sudut dari persamaan momen $\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI};\ \theta = \int \frac{M}{EI} + C_3$, f) menentukan lendutan/defleksi dari persamaan putaran sudut $\frac{dy}{dx} = \theta;\ y = \int \theta dx + C_4$

Penerapan pada Balok.

Contoh 1. Struktur dibawah ini menerima beban merata segitiga dengan q max = 3 k/ft , Tentukan persamaan kemiringan sudut batang (θ) dan persamaan lendutan (y).



Solusi :

Reaksi : R_{ay} = 10 k dan R_{by} = 5 k

Persamaan beban : p = 0.3x - 3

Persamaan geser:

$$V = \int Pdx + C_1$$

$$= \int (0.3x - 3)dx + C_1$$

= $0.15\,x^2 - 3\,x + C_1$ pada x = 0 → V = C_1 ; 10 = C_1, Jadi C_1 = 10

V = 0.15 x^2 – 3 x + 10 , contoh jika x = 5' , V = 0.15 5^2 – 3.(5)+ 10 =....

Persamaan momen :

$$M = \int V dx + C_2$$
$$= \int (0.15x^2 - 3x + 10) dx + C_2$$

M = 0.05 x^3 – 1.5 x^2 + 10 x + C_2 ,pada x = 0 → M = C_2 ; nilai momen di titik A = 0 karena perletakan sendi tidak menahan momen = $C_{2,}$ Jadi C_2 = 0
M = 0.05 x^3 – 1.5 x^2 + 10 x , jika x=5' , maka M = 0.05 . 5^3 – 1.5 . 5^2 + 10 . 5 = 18.75k.ft

Kemiringan sudut :

$$\theta = \int \frac{M}{EI} dx + C_3 = \frac{1}{EI} \int M dx + C_3 = \frac{1}{EI} \int (0.05x^3 - 1.5x^2 + 10x) dx + C_3$$
$$= \frac{1}{EI} (0.0125x^4 - 0.5x^3 + 5x^2) + C_3$$

Lendutan Batang:

$$y = \int \theta dx + C_4 = \int \left[\frac{1}{EI} \left(0.0125x^4 - 0.5x^3 + 5x^2 \right) + C_3 \right] dx + C_4$$
$$y = \frac{1}{EI} (0.0025x^5 - 0.125x^4 + 1.667x^3) + C_3 x + C_4$$

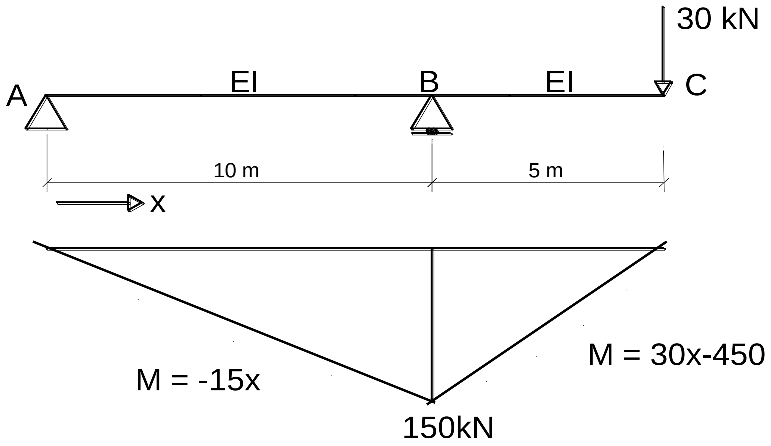
Kondisi batas: y (x = 0) nilainya 0 (nol) → C_4 = 0
y (x = 10) nilainya 0 (nol) maka persamaan :

$$0 = \frac{1}{EI} (0.0025(10)^5 - 0.125(10)^4 + 1.667(10)^3) + C_3.(10) + C_4$$ maka nilai $C_3 = \frac{-66.7}{EI}$

Hasil akhir untuk kemiringan sdt dan lendutan sebagai berikut :

$$\theta = \frac{1}{EI} (0.0125x^4 0.5x^3 + 5x^2 - 66.7)$$
$$y = \frac{1}{EI} (0.0025x^5 0.125x^4 + 1.667x^3 - 66.7x)$$

Contoh 2. Tentukan kemiringan sudut dan lendutan untuk balok dibawah ini, dengan batang yang prismatis dan EI = konstan



Solusi :

Untuk struktur tersebut dimulai dengan menggambarkan bidang momennya, dan dicari persamaan garis dari momen tersebut.

Daerah AB : x= 0 s/d x=10'

$$\theta = \int \frac{M}{EI} dx + C_3^I = \frac{1}{EI} \int (-15x) dx + C_3 = \frac{-7.5x^2}{EI} + C_3$$

$$y = \int \theta dx + C_4 = \int \left(\frac{-7.5x^2}{EI} + C_3 \right) + C_4$$

$$= \frac{-2.5x^3}{EI} + C_3 x + C_4$$

Daerah BC :

$$\theta = \int \frac{M}{EI} dx + C_3^I = \frac{1}{EI} \int (30x - 450) dx + C_3^I$$

$$= \frac{15x^2}{EI} - \frac{450x}{EI} + C_3^I$$

$$y = \int \theta dx + C_4^I = \int \left(\frac{15x^2}{EI} - \frac{450x}{EI} + C_3^I \right) dx + C_4^I$$

$$= \frac{5x^3}{EI} - \frac{225x^2}{EI} + C_3^I + C_4^I$$

Untuk menentukan C_3, C_4, C_3', C_4' harus dilihat kondisi batas dan kondisi kesinambungannya , pada tumpuan sendi tidak ada lendutan :

Daerah AB → Y (x = 0) , Maka $C_4 = 0$

$y\ (x = 10) = \dfrac{-2.5(10)^3}{EI} + C_3(10) + C_4 = 0$, Maka $C_3 = \dfrac{250}{EI}$

Daerah BC → $y(x = 10) = \dfrac{5(10)^3}{EI} - \dfrac{225(10)^2}{EI} + C_3^{'}(10) + C_4 = 0$

Maka 10 C_3' + C_4' = (-5000 + 22500)/EI = $\frac{17500}{EI}$ ....*)

θ $_{(X = 0)}$ (Pada AB) = θ $_{(X = 10)}$ (Pada BC) → Kondisi keseimbangan

$$\frac{-7.5x^2}{EI} + C_3 = \frac{15x^2}{EI} - \frac{450x}{EI} + C_3^{'}$$

$$\frac{1}{EI}(-7.5(10)^2 + 250) = \frac{1}{EI}(15(10)^2 - 450(10)) + C_3^{'}$$

$$\frac{-500}{EI} = \frac{-3000}{EI} + C_3^I \rightarrow C_3^I = \frac{2500}{EI}$$

*) 10 C^I_3 + C^I_4 = $\frac{17500}{EI} --> C_4^I = \frac{17500}{EI} - \frac{25000}{EI} = -\frac{7500}{EI}$

Maka hasilnya :

Daerah AB → θ = $\frac{1}{EI}(-7.5x^2 + 250)$

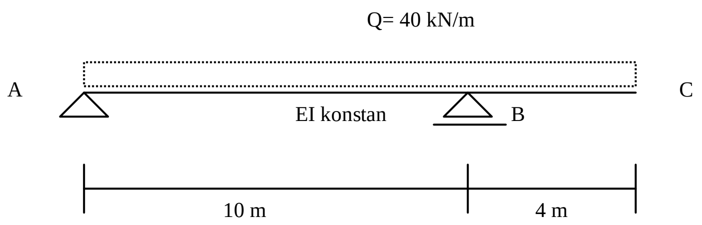
Y = $\frac{1}{EI}(-2.5x^3 + 250x)$

Daerah BC → θ = $\frac{1}{EI}(15x^2 - 450x + 2500)$

Y = $\frac{1}{EI}(5x^3 + 225x^2 + 2500x - 7500)$

B. Lembar Latihan

Hitung slope dan deflection di titik C dari struktur dibawah ini :



KULIAH PERTEMUAN 6
Defleksi elastis pada balok dengan metode momen area

A. Lembar Informasi

1. Kompetensi
Mahasiswa dapat menghitung defleksi elastis pada balok dengan metode momen area

2. Materi Belajar

Berdasarkan teori momen area I (pertama) :

Persamaan dasar : $d\theta = \frac{M}{EI}dx$

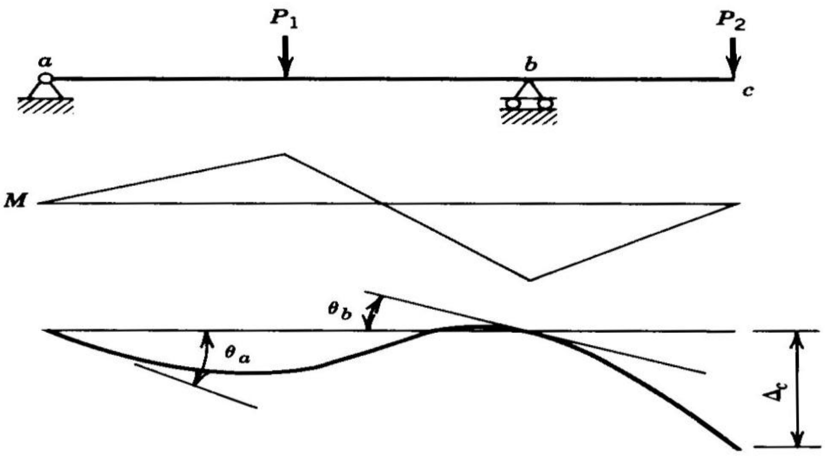
Putaran sudut pada balok yang melentur : $\theta_B^A = \int_A^B \frac{M}{EI}dx$

Berdasarkan teori momen area II (kedua) :

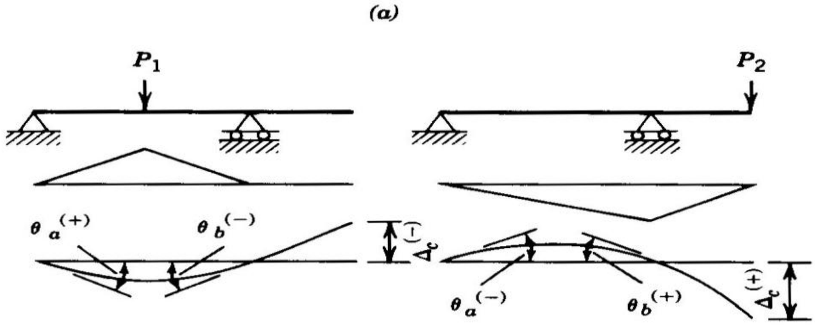
Persamaan dasar $d\Delta = \bar{x}\frac{M}{EI}dx$

Lendutan pada balok yang melentur $\Delta_A^B = \int_A^B \frac{M}{EI}\bar{x}dx$

Untuk memudahkan dalam perhitungan dapat digunakan perjanjian tanda :



(a)

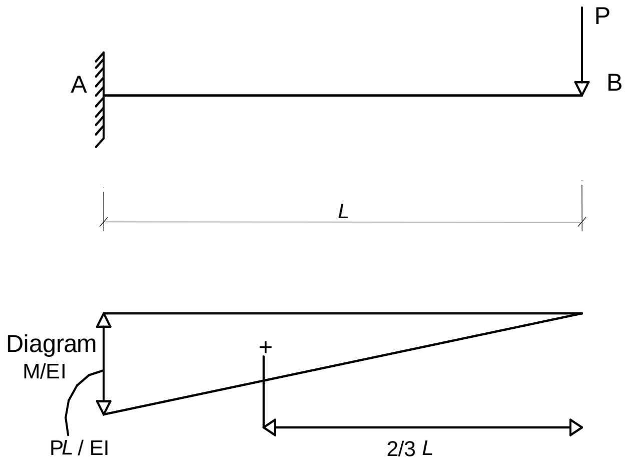


(b)

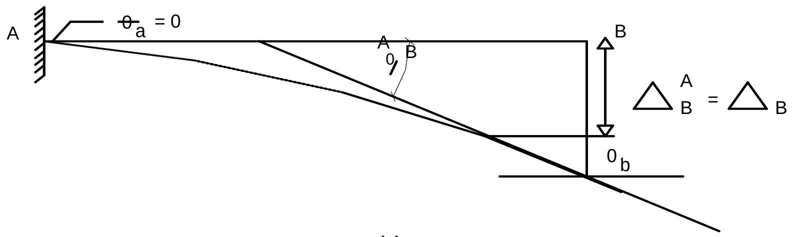
Gambar a) diatas menunjukan pembebanan dan displacement yang positif

Gambar b) Kontribusi displacement dari beban masing-masing.

Contoh 1 : Tentukan displacement vertikal dan kemiringan sudut di titik B dari struktur kantilever dibawah ini.



a)



b)

Tahap pertama kita harus dapat menggambarkan <u>bidang momen</u> akibat beban luar , dalam hal ini gambarkan dalam bidang M/EI (gambar a), kemudian gambarkan struktur terdefleksinya (gambar b), semua displacement dari gambar adalah positif.

Catatan: kemiringan sudut di titik A pasti nol (jepit)

Menurut Teori Momen Area ke 1

$$\theta_B^A = \int_A^B \frac{M}{EI}\,dx$$

$$\theta_B^A = \frac{1}{2}\left(\frac{Pl}{EI}\right)l = \frac{Pl^2}{2EI}$$

$$\theta_B = \theta_A + \theta_B^A = 0 + \frac{Pl^2}{2EI} = \frac{Pl^2}{2EI}$$

($\theta_B = \theta_A$ ditambah luas diagram momen antara A dan B)

Struktur melendut lihat gambar b.

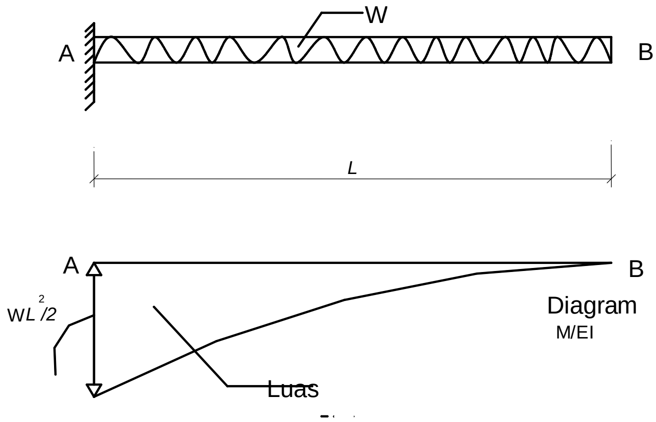
Menurut Teori Momen Area ke 2

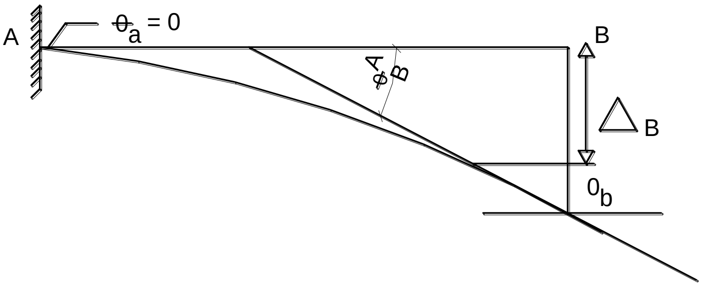
$$\Delta_A^B = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{Pl}{EI}\right)l\right] \times \frac{2}{3}l = \frac{Pl^3}{3EI}$$

$$\Delta_B = \Delta_B^A = \frac{Pl^3}{3EI}$$ (arah ke bawah)

(Δ_B = lendutan di B dari tangent di A)

Contoh 2. Struktur cantilever ini dibebani beban merata w, tentukan putaran sudut dan lendutan di titik B.





$$EI\ \ \theta_B = \theta_A + \theta_B^A = 0 + \frac{1}{3}\left(\frac{wL^2}{2}\right).L = \frac{1}{6}wL^3$$ (searah putaran jam)

$$\theta_B = \tfrac{1}{6}\,wL^3\,/\,EI$$

$$EI\ \ \Delta_B = \left(\frac{wL^3}{6}\right)\left(\tfrac{3}{4}L\right) = \frac{wL^4}{8}$$

$$\Delta_B = \frac{1}{8}.\frac{wL^4}{EI}$$ (arah ke bawah)

Contoh 3. Struktur dibawah ini dibebani beban P, tentukan putaran sudut dan lendutan di titik C.

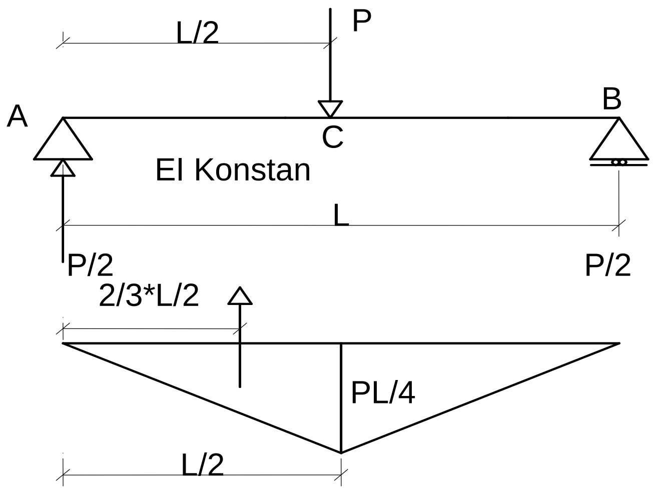
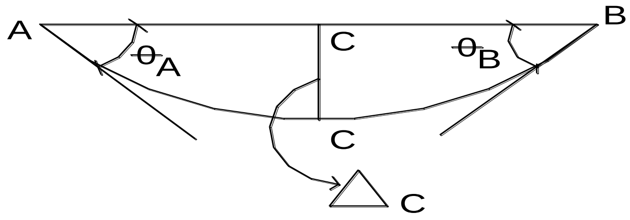


Diagram M/EI



Slope dan defleksi

(EI θ_A = EI θ_C ditambah luas diagram M dari titik A ke C)

EI $\theta_A = 0 + \frac{1}{2} . \frac{PL}{4} . \frac{L}{2} = \frac{PL^2}{16}$

$\theta_A = \frac{PL^2}{16EI}$ (Searah jarum jam)

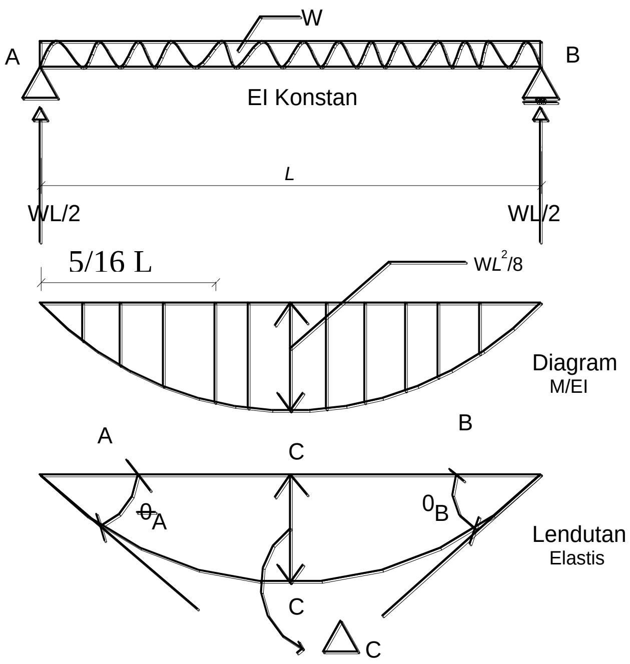
$\theta_B = \frac{PL^2}{16EI}$ (Kebalikan arah jarum jam)

Lendutan elastis

EI $\Delta_C = \left(\frac{PL^2}{16}\right) * 2/3 * \left(\frac{L}{2}\right) = \frac{PL^3}{48}$

$\Delta_C = \frac{1}{48} \frac{PL^3}{EI}$ (kebawah)

Contoh 4 : Balok diatas dua tumpuan dengan beban merata w sepanjang bentang, Hitung putaran sudut di titik A , θ_A , dan di titik B , θ_B



EI θ_A = EI θ_C + luas M/EI antara A dan C

EI θ_A = $0 + \frac{2}{3}\left(\frac{wL^2}{8}\right)\frac{L}{2} = \frac{wL^3}{24}$

$\theta_A = \frac{wL^3}{24EI}$ (searah jarum jam)

$\theta_B = \frac{wL^3}{24EI}$ (kebalikan arah jarum jam)

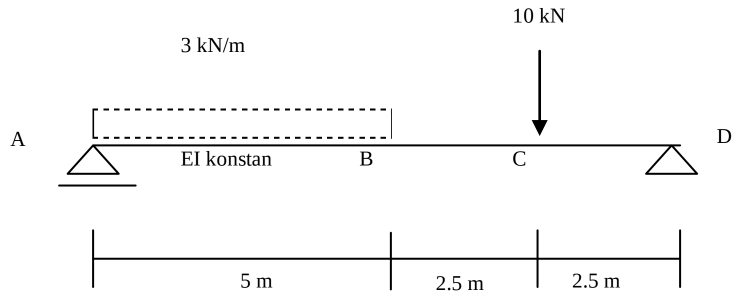
EI Δ_C = defleksi A dari tangent di C

$$= \left(\frac{wL^3}{24}\right)\left(\frac{5L}{16}\right) = \left(\frac{5wL^4}{384}\right)$$

Δ_C = $\left(\frac{5wL^4}{384}\right)$ (arah bawah)

B. Lembar Latihan

Hitung slope di titik A dan D, serta deflection di titik B dan C dari struktur dibawah ini :
Dimana : $I = 200 \times 10^6$ mm^4 = 200. 10^2 cm^4, E = 70 GPa. =70.000 MPa.



KULIAH PERTEMUAN 7
Defleksi elastis pada balok dengan metode conjugate beam

A. Lembar Informasi

1. Kompetensi

Mahasiswa dapat menghitung defleksi elastis pada balok dengan metode conjugate beam

2. Materi Belajar

METODE CONJUGATE BEAM

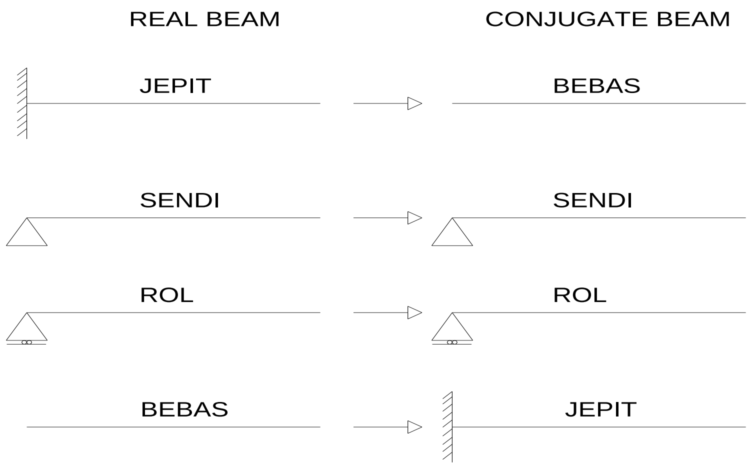
Prinsip dasar:

- Bidang momen (M/EI) dibuat sebagai beban pada Conjugate beam.
- Hasil gaya geser dan momen pada conjugate beam merupakan nilai slope (kemiringgan sudut) dan deflection (defleksi) pada balok sebenarnya.

Tahapan:

1. Hitung dan gambarkan bidang momen akibat beban luar pada balok sebenarnya (real beam).
2. Hasil bidang momen (M/EI) di jadikan beban pada balok conjugate (imajinary beam) , dimana perletakan aktual dirubah menjadi perletakan pada balok imajinari sesuai ketentuan dibawah ini :

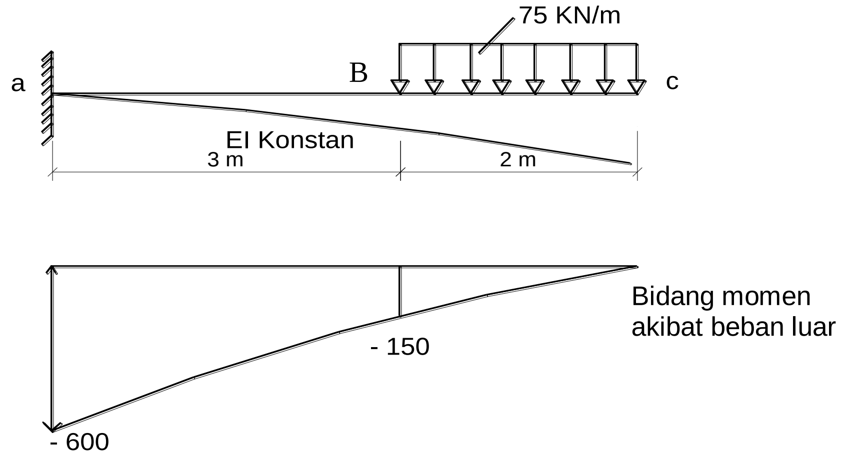
   Ketentuan conjugate beam (boundary condition)



3. - Menghitung gaya geser (shear) pada balok conjugate yang merupakan nilai slope pada balok sebenarnya.
   - Menghitung momen (moment) pada balok conjugate yang merupakan nilai deflection pada balok sebenarnya.

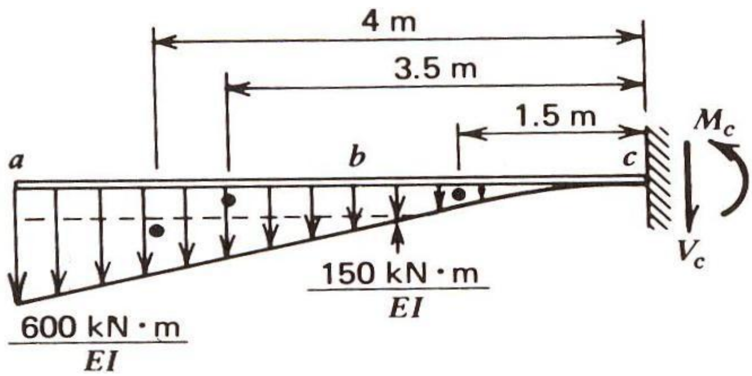
Contoh 1 : Hitung slope dan deflection pada ujung bebas c dari struktur dibawah ini, dan gambar diagram gaya geser dan diagram momen conjugate beam

Dimana : E = 200 GPa, I = 1000.10^{-6} m^4 , EI = 200.000 kN.m^2



Tahap pertama kita buat diagram bidang momen akibat beban luar pada real beam kemudian diagram momen tersebut dibuat sebagai beban M/EI pada conjugate beam. Maka : hasil momen pada balok conjugate yang didapat merupakan Δ dari real beam, serta hasil shear yang didapat pada balok conjugate merupakan nilai θ dari real beam

Balok konjugate dan pembebanannya adalah :



Perubahan perletakan pada balok konjugate :

Balok Sebenarnya		Conjugate Beam
Jepit	→	Bebas
Bebas	→	Jepit

Analisis pada balok konjugate :

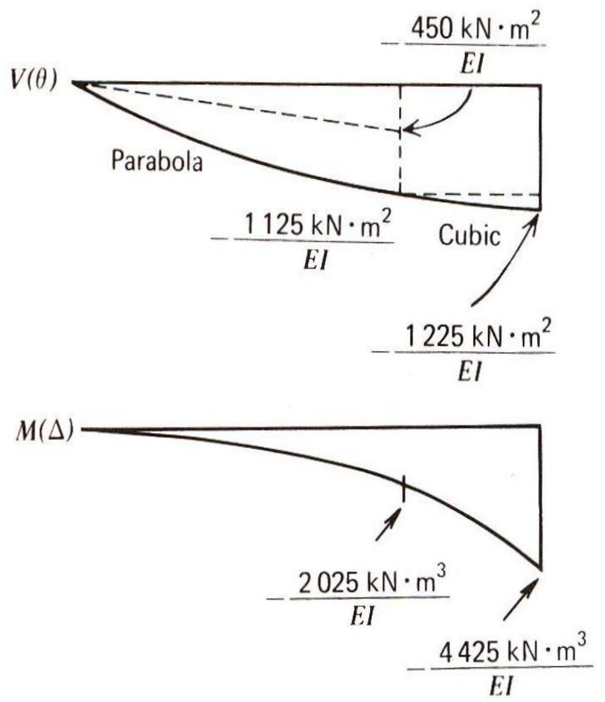
Σ $P_y = 0$: $\quad V_C + \left(\frac{150}{EI}\right)3 + \frac{1}{2}\left(\frac{450}{EI}\right)3 + \frac{1}{3}\left(\frac{150}{EI}\right)2 = 0$

$V_C = \frac{-1225}{EI} KN.m^2 = \theta_C$ (pada balok sebenarnya)

Σ $M_C = 0$: $\quad M_C + \left(\frac{150}{EI}\right)3 \times 3.5 + \frac{1}{2}\left(\frac{450}{EI}\right)3 \times 4 + \frac{1}{3}\left(\frac{150}{EI}\right)2 \times 1.5 = 0$

$M_C = \frac{-4225}{EI} KN.m^3 = \Delta_C$ (pada balok sebenarnya)

Diagram gaya geser pada Conjugate Beam (= θ untuk balok real) dan diagram momen untuk Conjugate Beam (Δ untuk real beam)

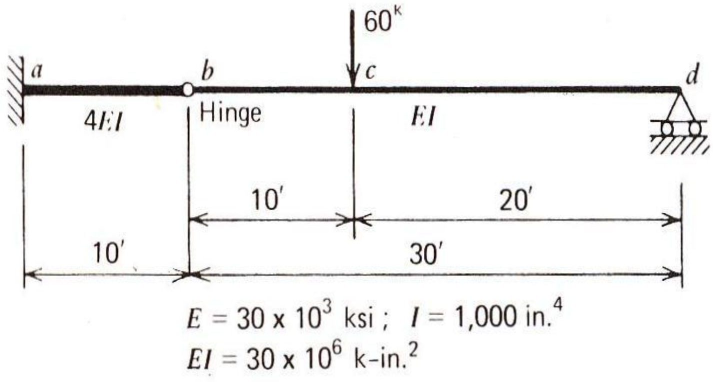


Maksimum Slope di C → $\theta_C = \frac{-1225}{200.000} = -0.00613$ radian

Maksimum lendutan Δ → $\Delta_C = \frac{-4425}{200.000} = -0.0221m$ = - 22.1 mm

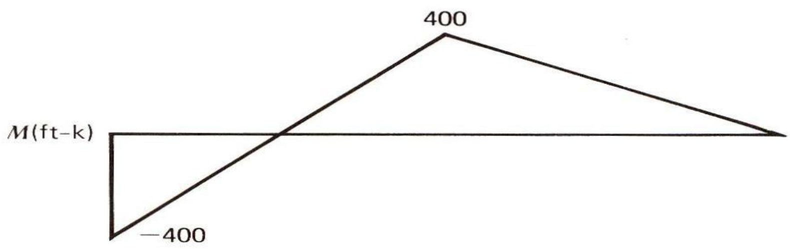
(tanda negatif menunjukan lendutan kebawah)

Contoh 2 : Perhatikan stuktur dibawah ini , hitung slope θ_C dan deflection $\Delta_{C.}$

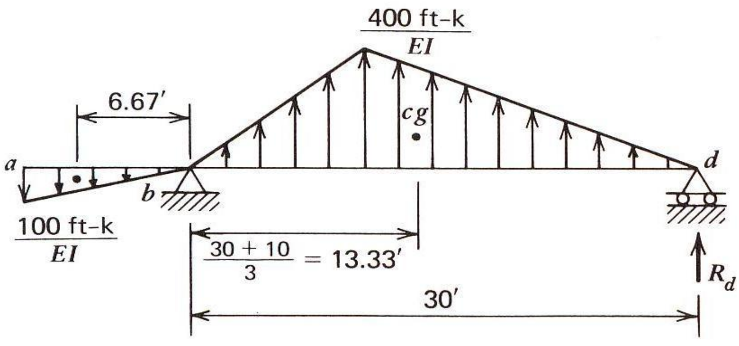


ksi = kip/in^2

Bidang momen



Conjugate Beam dan Pembebanan



Perubahan perletakan pada balok konjugate :

Real beam	conjugate beam
Hinge(=Sendi)→	Sendi
Rol →	Rol
Jepit →	Bebas

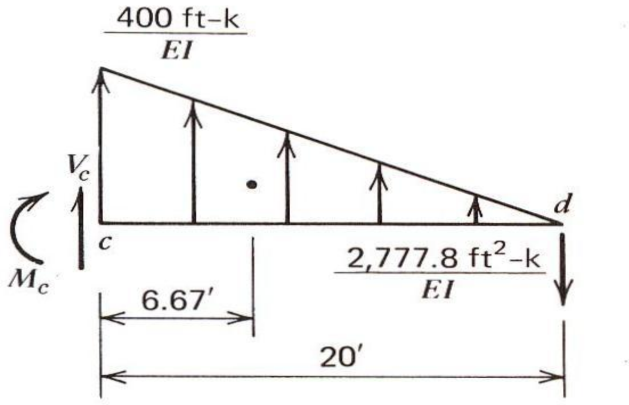
Maka :

$$\sum M_b = 0 \rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{100}{EI}\right)10 \times 6.67 + \frac{1}{2}\left(\frac{400}{EI}\right)30 \times 13.33 + R_d \times 30 = 0$$

$Rd = \dfrac{-2777.8}{EI}$ ft^2- k (Tanda negatif berarti R_d ke bawah)

Perhitungan lendutan

Tinjauan bagian CD



Catatan :
1 ft = 30.5 cm = 12 in
1 ft^2 = 144 in^2
1 ft^2 = 1728 in^3

Σ P_y = 0 : $V_C + \frac{1}{2}\left(\frac{400}{EI}\right)20 - \frac{2777.8}{EI} = 0$

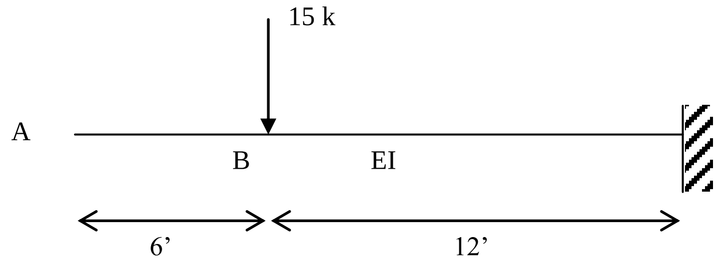
$V_C = \dfrac{-1222.2}{EI}\, ft^2 - k \rightarrow \theta_C = \dfrac{-1222.2 \times 144}{30 \times 10^6} = -0.005867 rad$

Σ M_C = 0 : $M_C - \frac{1}{2}\left(\frac{400}{EI}\right)20 \times 6.67 + \left(\frac{2777.8}{EI}\right)20 = 0$

$M_C = \dfrac{-28876}{EI}\, ft^3 - k \rightarrow \Delta_C = \dfrac{-28876 \times 1728}{30 \times 10^6} = -1.66$ in = -0.65 cm

B. Lembar Latihan

Hitung slope dan deflection di titik A dan titik B dari struktur di bawah ini , dimana I = 2000 in^4 dan E = 10 x 10^3 ksi.

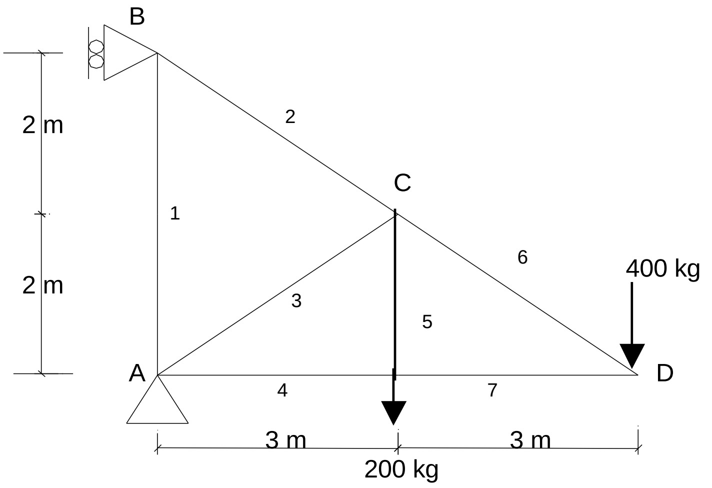


KULIAH PERTEMUAN 8

Evaluasi tengah semester (UTS)

SOAL UTS.
WAKTU : 100 MENIT

Soal No. 1 : Hitung lendutan vertikal di D dai struktur dibawah ini, dimana semua batang A = 30 cm^2 dan E = 2 x 10^6 kg/cm^2, dengan metode Unit Load.



Soal No. 2 : Hitung slope dan deflectionl di C dari struktur dibawah ini, dengan metode Conjugate Beam