KULIAH PERTEMUAN 9
Analisa struktur statis tak tentu dengan metode consistent deformations pada balok dan portal

A. Lembar Informasi

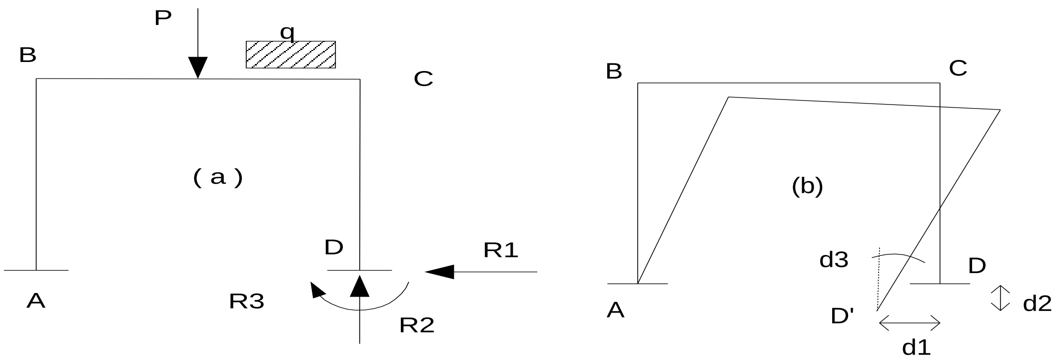
1. Kompetensi

Mahasiswa dapat menghitung reaksi perletakan dan menggambarkan bidang momen dan gaya lintang dari balok dan portal statis tak tentu dengan metode consistent deformations

2. Materi Belajar

METODE KONSISTEN DEFORMASI

Portal



Melihat struktur pada Gambar a. maka

Σ Reaksi perletakan = 6 , persamaan statis = 3 Tingkat kestatis taktentuannya , D_e = 3 , maka terdapat 3 redundant untuk menjadikan struktur statis tertentu.

Akibat masing-masing R_1, R_2 & R_3 dapat menimbulkan deformasi di D yaitu d_1, d_2 & d_3 , bila R_1, R_2 dan R_3 diberi gaya 1 satuan maka :

R_1 = 1 satuan → d_{11}, d_{12} & d_{13}

R_2 = 1 satuan → d_{21}, d_{22} & d_{23}

R_3 = 1 satuan → d_{31}, d_{32} & d_{33}

Syarat (kondisi batas)

Titik D = jepit → defleksi horisontal, vertikal dan putaran sudut = 0

$R_1.d_{11} + R_2 .d_{12} + R_3 + d_{13} + d_1 = 0$

$R_1.d_{21} + R_2 .d_{22} + R_3 + d_{23} + d_2 = 0$

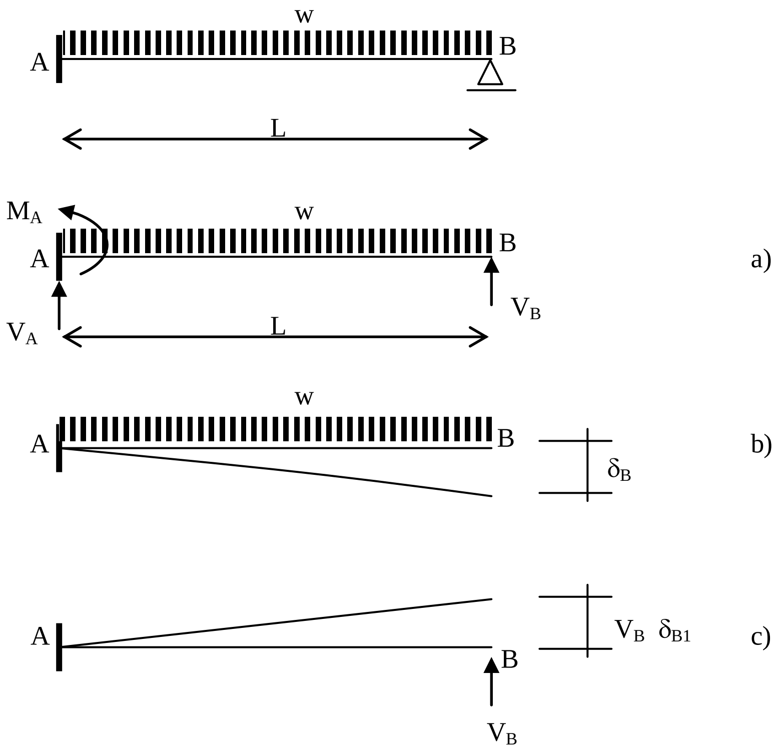
$R_1.d_{31} + R_2 .d_{32} + R_3 + d_{33} + d_3 = 0$

Dari persamaan diatas dapat di hitung R_1, R_2 & R_3 (ada 3 persamaan dengan 3 variabel yang belum diketahui)

Hukum Maxwell → $d_{ij} = d_{ji}$, maka dapat ditulis:

$$\left.\begin{aligned} R_1.d_{11} + R_2\,.d_{12} + R_3 + d_{13} + d_1 = 0 \\ R_1.d_{21} + R_2\,.d_{22} + R_3 + d_{23} + d_2 = 0 \\ R_1.d_{31} + R_2\,.d_{32} + R_3 + d_{33} + d_3 = 0 \end{aligned}\right\rangle \text{Penyelesaiannya dengan operasi matrix}$$

Contoh 1. Hitung reaksi perletakan dan gambar bidang momen dari struktur di bawah ini :



Lihat gambar a) Balok memiliki tiga reaksi perletakan yaitu : V_A, M_A dan V_B

(jml reaksi perletakan 3), Persamaan statis untuk penyelesaiannya ada 2 (dua) , Σ_V = 0 dan Σ_M = 0 , maka D_e (Degree externally) = 3-2 = 1

Solusi :

Untuk menjadi struktur statis tertentu maka V_B dibuat sebagai redundant , sehingga struktur menjadi gambar b. serta gambar c.

1). Hilangkan V_B, timbul lendutan di B → δ_B , lihat Gambar b.

2). Struktur hanya diberi redundant V_B = 1 satuan, lihat Gambar c. , sehingga timbul lendutan V_B. δ_{B1}

Jadi lendutan δ_B akibat beban w harus sama dengan lendutan V_B δ_{B1} akibat beban V_B , (kondisi batas). Dimana: δ_{B1} adalah lendutan di B akibat gaya V_B = 1 satuan

$\delta_B = \dfrac{wL^4}{8EI}$ dan $\delta_{B1} = \dfrac{1.L^3}{3EI}$ (dapat dicari dengan metode conjugate beam)

Pada titik B → $\sum \delta v = 0$

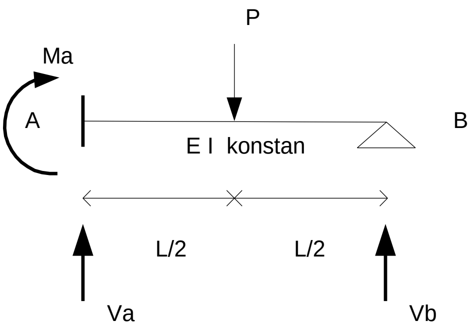
$$\delta_B = V_B.\delta_{B1} \rightarrow V_B = \frac{\delta_B}{\delta_{B1}} = \frac{wL^4}{8EI} / \frac{1.L^3}{3EI} = \frac{3wL}{8}$$

Untuk reaksi lainnya:

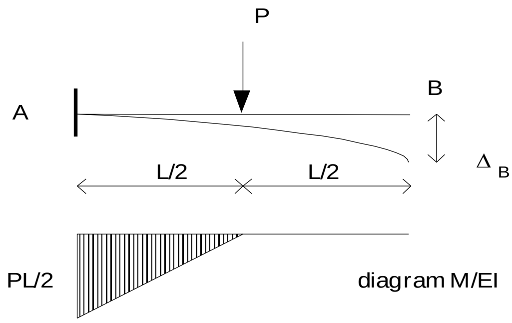
$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow M_A + V_B.L - wL.\frac{L}{2} = 0 \rightarrow M_A = \frac{1}{8}wL^2$$

$$\Sigma V = 0 \rightarrow V_A = wL - V_B = \frac{5}{8}wL$$

Contoh 2 :



(a)



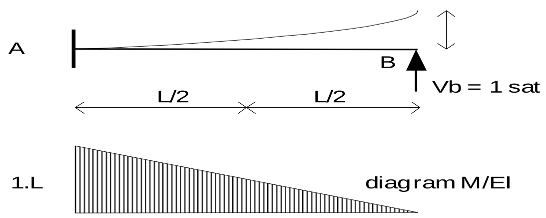
(b)

Σ reaksi perletakan = 3 yaitu V_a , V_b, M_a, sedang Σ keseimbangan statis = 2 (ΣV = 0 dan ΣM = 0)

Maka ada 1 redundant disini yaitu V_b , Lihat gambar (b) akibat beban luar timbul Δ_B dengan Moment area method : $\Delta_B = \left(\dfrac{P.L}{2EI}\right)\left(\dfrac{L}{2}\right).\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5}{6}L\right) = \dfrac{5P.L^3}{48EI}$,

$$\delta_B = \left(\frac{1}{EI}\right)(L)(1/2)\left(\frac{3}{2}L\right)$$

Lihat gambar (c), akibat beban 1 satuan di titik B



(c)

$V_B = 1\ satuan = \dfrac{L^3}{3EI}$, jadi: $\Delta_B = V_B.\delta_B$, $V_B = \dfrac{\Delta_B}{\delta_B} = \dfrac{5PL^3}{48EI} / \dfrac{L^3}{3EI} = V_B = 5/16\,P$

Dengan statika → $\Sigma V = 0$ → $V_A = P - V_B = 11/16\ P$

$\Sigma M_B = 0$ → $M_A = \dfrac{P.L}{2} - \dfrac{11}{16} P.L$

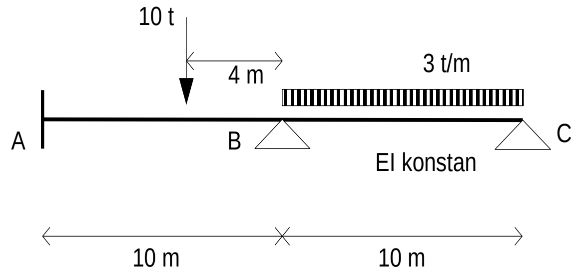
M_A - P. ½ L + V_A. L = 0

M_A = P. ½ L – V_A. L

M_A = - 3/16 P. L = 3/16 PL (Kekiri)

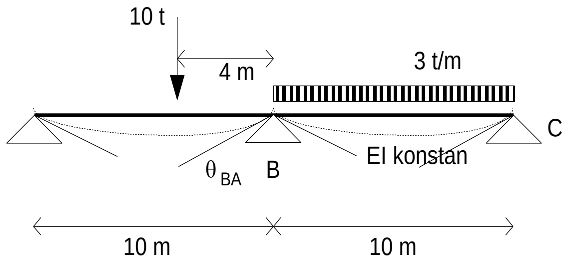
Contoh 3 : Penerapan pada balok menerus :

Analisa struktur berikut dan gambarkan bidang Momen (M) dan Lintang (D)

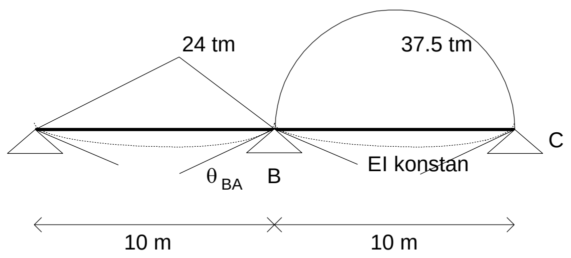


Solusi: Derajat ketidak statistentuannya 2, maka momen di A dan B dibuat sebagai redundant

Tahap 1.



Struktur dasar



Bidang M/EI sebagai beban pada conjugate beam

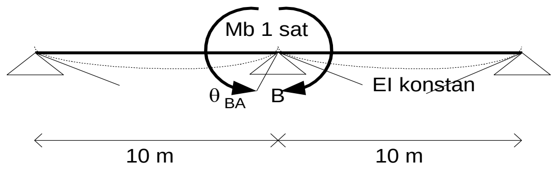
Menggunakan Conjugate Beam Method

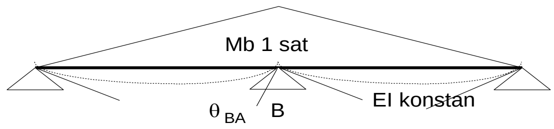
$$\theta_{BA} = \frac{\Delta_{AB}}{L_{AB}} = \frac{1}{10EI}\left[\frac{24\times 6}{2}\times\frac{2}{3}\times 6+\frac{24\times 4}{2}\times(6+\frac{4}{3})\right] = \frac{63{,}48}{EI}$$

$$\theta_{AB} = \frac{24\times 10}{2EI}-\frac{63{,}98}{EI} = \frac{56{,}02}{EI}$$

$$\theta_{BC} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}.10\times 37{,}5\right)/\,EI = \frac{125}{EI}$$

Tahap II , Pasang M_B = 1 satuan di B pada struktur dasar





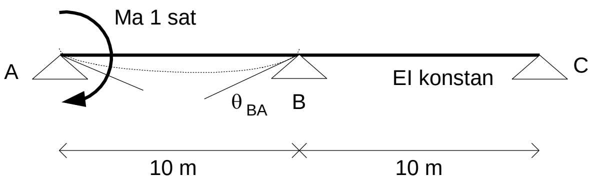
Bidang M/EI sebagai beban pada conjugate beam

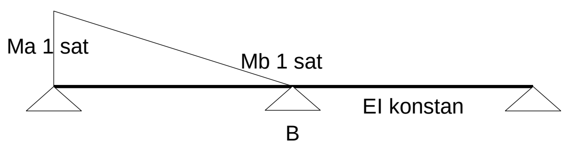
$$\theta^{I}_{BA} = 1/2.M_B(10)\frac{2}{3}10/10EI = \frac{M_B.10}{3EI}$$

$$\theta^{I}_{BC} = 1/2.M_B(10)\frac{2}{3}10/10\frac{1}{EI} = \frac{M_B.10}{3EI}$$

$$\theta^{I}_{AB} = \frac{1/2.M_B(10)}{EI} - \frac{M_B.10}{3EI} = \frac{1/6M_{B.}10}{EI}$$

Tahap III , Pasang M_A = 1 satuan di A pada struktur dasar





Bidang M/EI sebagai beban pada conjugate beam

$$\theta^{''}_{AB} = \Delta^{''}_{AB} / L_{AB}$$

$$\theta^{''}_{AB} = 1/2.M_A.10.2/3.10/10.EI = \frac{M_A.10}{3EI}$$

$$\theta^{''}_{BA} = 1/2.M_A.10 - \frac{M_A.10}{3EI} = \frac{M_A.10}{6EI}$$

Persamaan kompaktibilitas :

<u>i) putraran sudut (slope) pada perletakan A (jepit) harus nol</u>

$$\theta_{BA} + \theta^{'}_{AB} + \theta^{''}_{AB} = 0$$

$$56{,}02 + \frac{10M_B}{6} + \frac{10M_A}{3} = 0 \quad \text{...(1)}$$

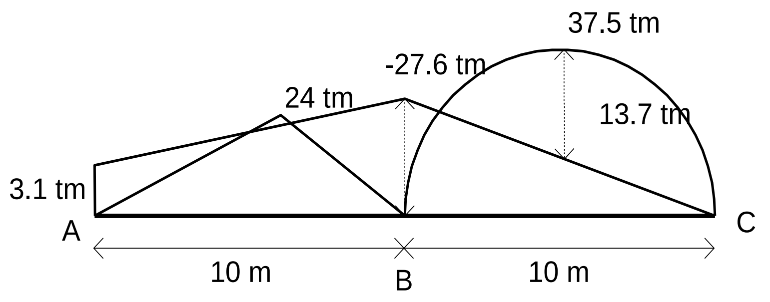
<u>ii) pada perletakan B total putaran sudut (slope) yang balok menerus harus nol.</u>

$$\theta_{BA} + \theta'_{BA} + \theta''_{BA} + \theta_{BC} + \theta'_{BC} = 0$$

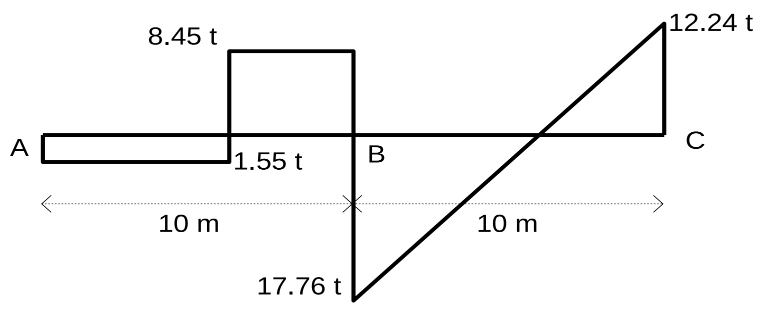
$$63{,}98 + \frac{10M_B}{3} + \frac{10M_A}{6} + 125 + \frac{10M_B}{3} = 0 \quad \text{..................................(2)}$$

Dari persamaan (1) dan (2) didapat M_A = -3,10 t.m dan M_B = -27,6 t.m

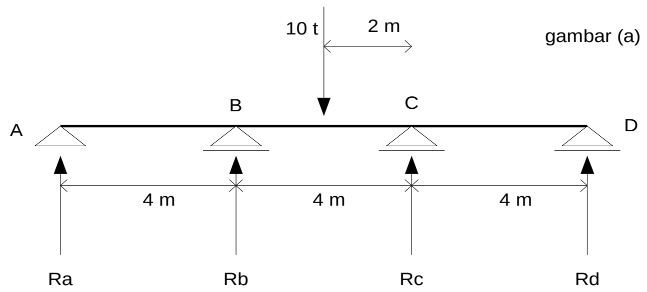
Hasil diagram momen lentur (Bending momen diagram) :



Hasil diagram gaya geser / lintang (Shear forced diagram) :



Contoh 3. Lihat struktur balok menerus di bawah ini, Gambarkan bid Momen (BMD) dan bid Geser (SFD) :

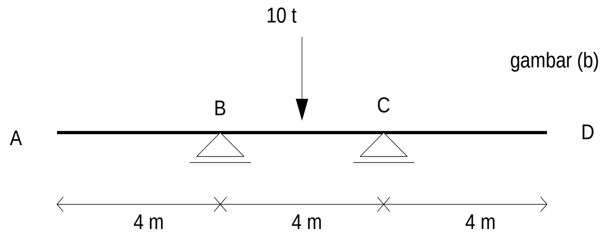


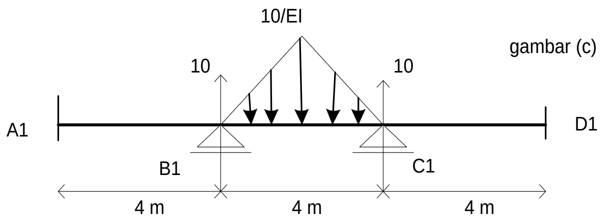
Σ Reaksi perletakan = 4 , Σ persamaan statis = 2 , ($\Sigma V = 0$, $\Sigma M = 0$)

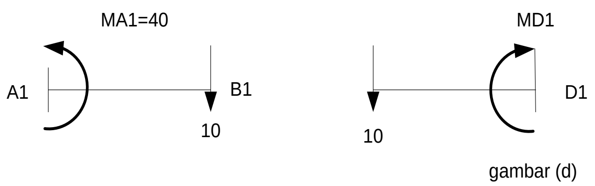
Jadi derajat ketidak statistentuan (degree of indeterminancy) = 4 – 2 = 2

Maka R_A & R_D → REDUNDANT

Tahap (i) , Akibat beban timbul (gambar b), bidang momen sebagai beban M/EI pada <u>Conjugate beam</u> (gambar c)







$M_{A1} = d_A$, Lendutan di A akibat beban luar

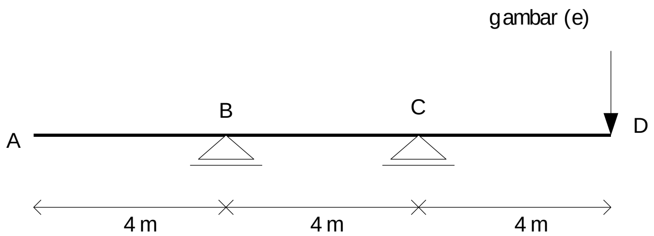
$M_{D1} = d_D$, Lendutan di D akibat beban luar

$$V_{B1} = V_{C1} = \frac{1}{2}\left(\frac{10 \times 2}{EI}\right) = \frac{10}{EI}$$

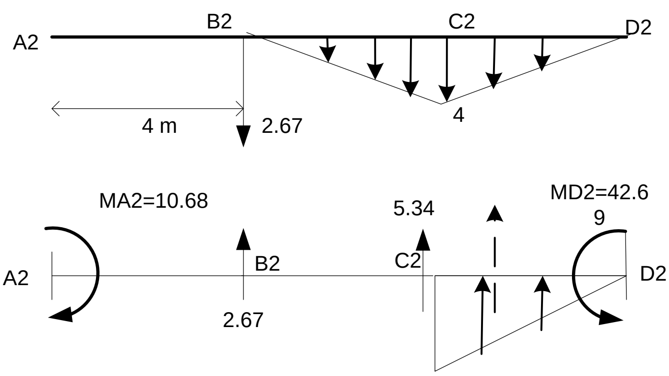
$$M_{D1} = \frac{10 \times 4}{EI} = \frac{40}{EI}$$

$$M_{A1} = \frac{10 \times 4}{EI} = \frac{40}{EI}$$

Tahap (ii), Pasang beban 1 satuan di D diagram M/EI di buat beban conjugate beam



gambar (f)



$M_{A2} = d_A^{'}$, lendutan di A akibat beban 1 satuan di D, $M_{D2} = d_D^{'}$

$$V_{B2} = \frac{1}{3}\left(\frac{4 \times 4}{2\ EI}\right) = \frac{2{,}67}{EI}\ , \qquad V_{D2} = \frac{2}{3}\left(\frac{4 \times 4}{2\ EI}\right) = \frac{5{,}34}{EI}$$

$$M_{A2} = \frac{2{,}67 \times 4}{EI} = \frac{10{,}68}{EI}$$ (searah jarum jam)

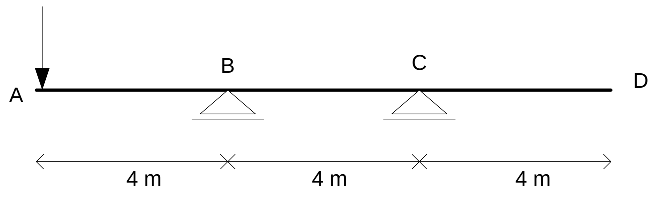
$$M_{D2} = \left[-(5{,}34 \times 4) - (\frac{4 \times 4}{2} \times \frac{2}{3}.4)\right]\frac{1}{EI} = -\frac{42{,}69}{EI}$$ (kebalikan arah jarum jam)

Jika 1 unit load di D tadi merupakan nilai R_D maka momen :

$$M_{D2} = -\frac{42{,}69}{EI} R_D$$

$$M_{A2} = \frac{10{,}68}{EI} R_D$$

Tahap (iii) , Pasang beban 1 satuan di A , dengan cara yang sama seperti cara pada tahap (ii) didapat :



$$M_{D3} = -\frac{10{,}68}{EI} R_A$$

$$M_{A3} = \frac{42{,}69}{EI} R_A$$

Persamaan kompakbilitas:

dmana R_A & R_B merupakan reaksi sebenarnya pada balok.

Dititik A :

$$\frac{1}{EI}(-40+10{,}68R_D+42{,}69R_A)=0$$

Dititik D

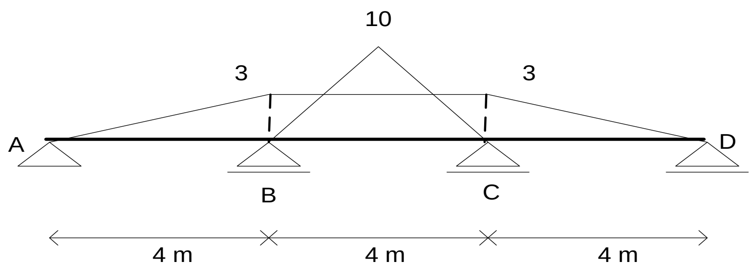
$$\frac{1}{EI}(40-42{,}69R_D-10{,}68R_A)=0$$

$R_A = 0{,}75$

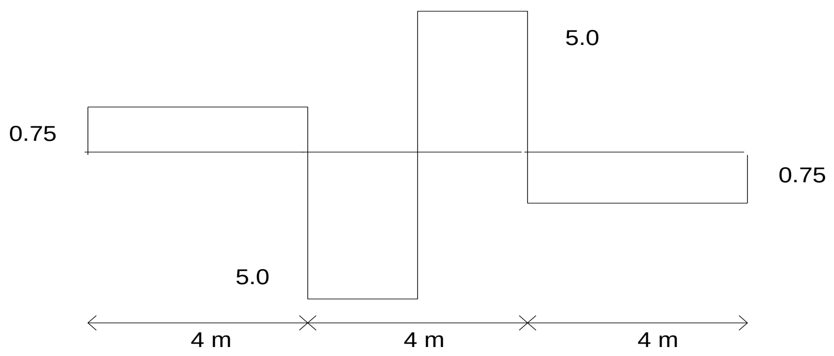
$R_D = 0{,}75$

Dengan nilai R_A =0.75 maka : M_{BA} = 0,75 x 4 = 3 t.m (= - M_{CD})

Superposisi akibat beban luar dan redundant.



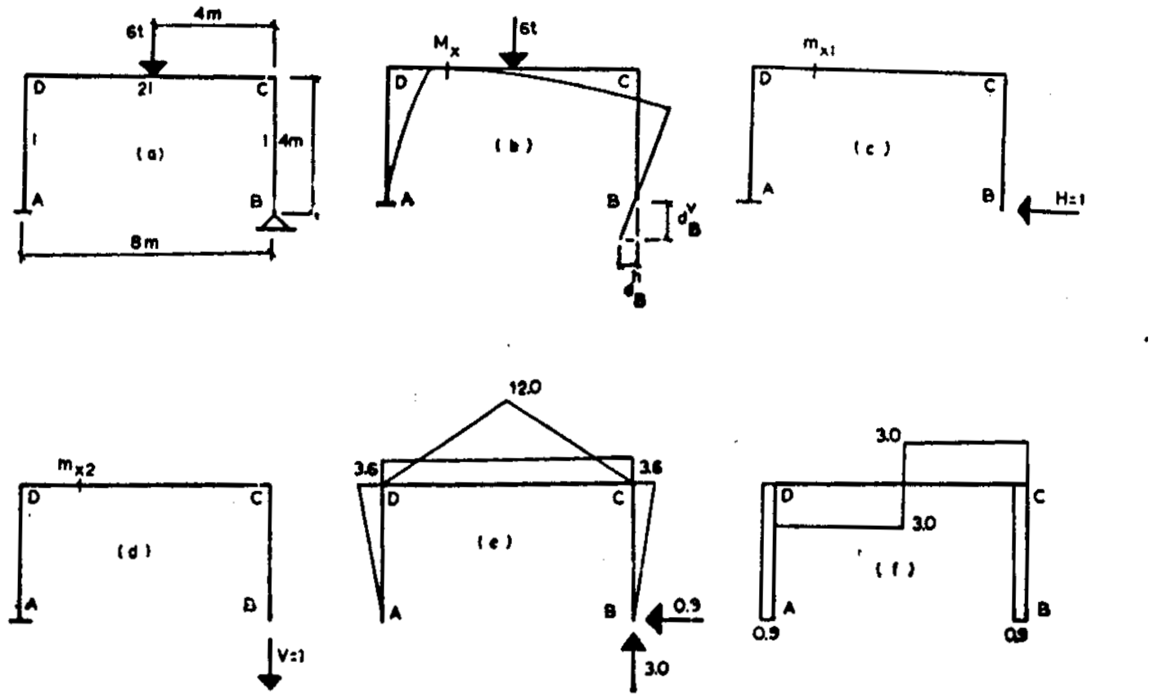
Bidang M



Bidang D

Contoh 4. Penerapan pada portal

Analisa portal dibawah ini dan gambarkan bidang momen M dan bidang lintang D.



Persamaan kompaktibilitas

H_B dan V_B pada perletakan B → sebagai redundant

$$d_B^h + H_{B1}^h.d_{B1}^h + V_B d_{B2}^h = 0 \text{.........................(i)}$$

$$d_B^V + H_{B1}.d_{B1}^v + V_B d_{B2}^v = 0 \text{.........................(ii)}$$

Dimana :

$d_B^h =$ defleksi/lendutan Horizontal di B akibat beban yang ada

$d_B^V =$ defleksi/lendutan vertikal di B akibat beban yang ada

$d_{B1}^h =$ defleksi/lendutan Horizontal di B akibat beban 1 unit load horisontal (gambar c)

$d_{B1}^V =$ defleksi/lendutan vertikal di B akibat beban 1 unit load horisontal (gambar c)

$d_{B2}^h =$ defleksi/lendutan Horizontal di B akibat beban 1 unit load vertikal (gambar d)

$d_{B2}^V =$ defleksi/lendutan vertikal di B akibat beban 1 unit load vertikal (gambar d)

Bila :

M_X = Momen pada setiap penampang x (gambar b)

M_{X1} = Momen di X akibat H = 1 unit beban. (gambar c)

M_{X2} = Momen di X akibat V = 1 unit beban. (gambar d)

$$d_B^H = \int \frac{M_X M_{X1}}{EI} dx = \int_0^4 \frac{6 \times 4}{2EI} dx + \int_0^4 \frac{24(4-x)dy}{EI}$$

$$H_B.d_{B1}^h = H_B \int \frac{(m_{x1})^2}{EI} dx =^{(1.x)^2} (1.4)^2 = H_B \left[\int_0^4 \frac{x^2 dx}{EI} + \int_0^8 \frac{4^2 dx}{2EI} + \int_0^4 \frac{(4-x)^2}{EI} dx \right]$$

$$V_B.d_{B2}^h = V_B \int \frac{m_{x1} m_{x2}}{EI} dx = V_B \left[\int_0^8 \frac{4xdx}{2EI} + \int_0^4 \frac{8(4-x)}{EI} dx \right]$$

$$d_B^V = \int \frac{m_{x1} m_{x2}}{EI} dx = \left[\int_0^4 \frac{6x(x+4)dx}{EI} + \int_0^4 \frac{24(8)}{EI} dx \right]$$

$$H_B.d_{B1}^h = H_B \int \frac{m_{x1} m_{x2}}{EI} dx = H_B \left[\int_0^8 \frac{4xdx}{2EI} + \int_0^4 \frac{8(4-x)}{EI} dx \right]$$

$$V_B.d_{B2}^v = V_B \int \frac{m_{x1}}{EI} dx = V_B \left[\int_0^8 \frac{4xdx}{2EI} + \int_0^4 \frac{8^2 dx}{EI} \right]$$

Setelah di intergalkan maka hasil persamaan kompabilitas :

288 + 106,6 H_B + 128,0 V_B = 0 ....(i)

928 + 128,0 H_B + 341,3 V_B = 0 ....(ii)

Dengan penyelesaian persamaan simultan :

V_B = -3,00 t (tanda negatif → arah ke atas)

H_B = 0,90 t (tanda positif → arah sesuai pemisalan)

Hasil bidang momen BMD dapat dilihat pada Gambar e. , sedang hasil bidang lintang SFD dapat dilihat pada Gambar f. (halaman sebelumnya).

KULIAH PERTEMUAN 10
Analisa struktur statis tak tentu dengan metode Slope deflection Equation pada balok menerus

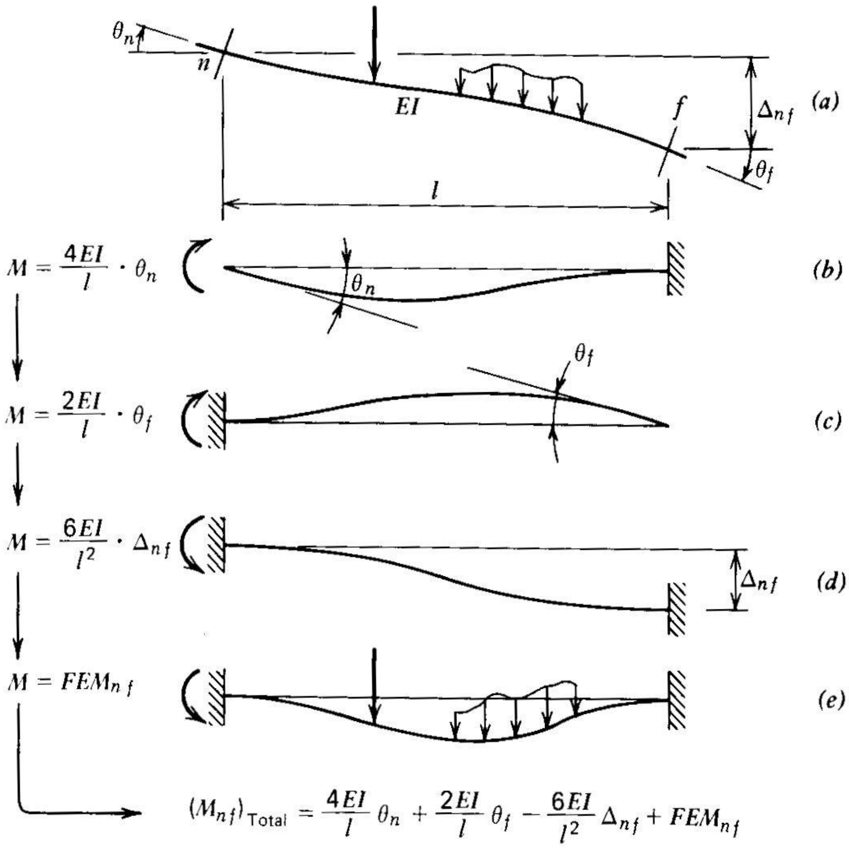
A. Lembar Informasi

1. Kompetensi
Mahasiswa mampu menghitung momen ujung batang dari balok menerus statis tak tentu dengan metode slope deflection equations

2. Materi Belajar

SLOPE DEFLECTION EQUATION

Suatu balok nf dibebani sistim beban p & q (lihat Gambar a)



Dari gambar b , momen akibat θn diujung batang n dimana $\theta_f = \Delta_{nf} = FEM_{nf} = 0$

Dari gambar c , momen diujung batang n akibat θ_f di ujung batang f

Dari gambar d , momen diujung batang n akibat penurunan Δ_{nf} ujung batang f sebesar Δ_{nf}

Dari gambar e , momen diujung batang n berupa momen primer akibat beban luar

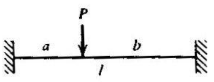
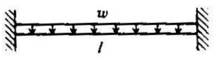
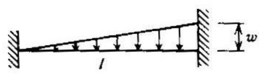
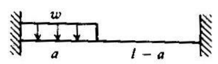
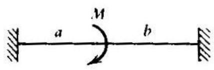
Maka :

$$M_{nf} = \frac{4EI}{L}\theta_n + \frac{2EI}{L}\theta_f - \frac{6EI}{L^2}\Delta_{nf} + FEM_{nf}$$

atau pada batang AB

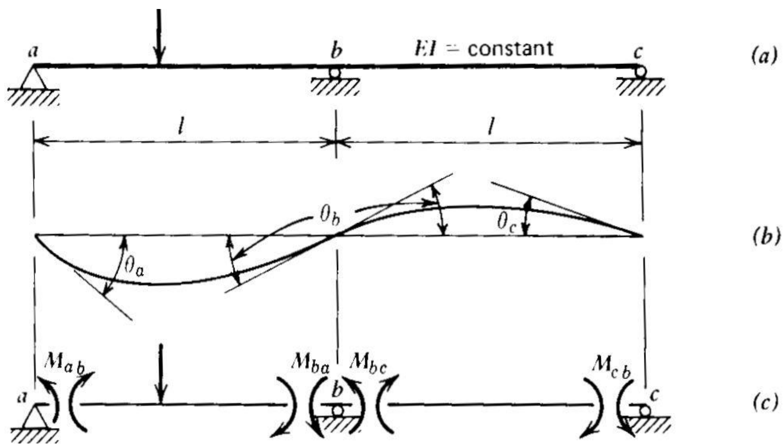
$$M_{AB} = 2EK_{ab}(2\theta_a + \theta_b - 3\frac{\Delta_{ab}}{L}) + FEM_{ab} \quad , \quad K = \frac{I}{L}$$

Dimana FEM_{ab}= momen primer akibat beban luar untuk beberapa type pembebanan lihat Tabel berikut :

Loading	M_{AB}	M_{BA}
	$\frac{-Pab^2}{l^2}$	$\frac{+Pa^2b}{l^2}$
	$\frac{-wl^2}{12}$	$\frac{+wl^2}{12}$
	$\frac{-wl^2}{30}$	$\frac{+wl^2}{20}$
	$\frac{-wa^2}{12}\left(6 - 8\frac{a}{l} + \frac{3a^2}{l^2}\right)$	$\frac{+wa^3}{12l}\left(4 - 3\frac{a}{l}\right)$
	$+b(2a - b)\frac{M}{l^2}$	$+a(2b - a)\frac{M}{l^2}$

Penerapan Pada Balok

Lihat struktur dibawah ini :



Dari struktur diatas :

a). Balok statis tak tentu tingkat satu

b). Boundary Conditions perletakan a, b & c tidak terjadi penurunan jadi $\Delta_{ab} = \Delta_{bc} = 0$ pada ketiga perletakan terjadi putaran sudut θ_a, θ_b & θ_c

Maka persamaan slope deflection pada tiap batang :

$M_{ab} = 2\ EK_{ab}\ (2\ \theta_a + \theta_b) + FEM_{ab}$; $\Delta_{ab} = 0$

$M_{ba} = 2\ EK_{ab}\ (2\ \theta_b + \theta_a) + FEM_{ba}$; $\Delta_{ba} = 0$

$M_{bc} = 2\ EK_{bc}\ (2\ \theta_b + \theta_c)$; $\Delta_{bc} = 0$ & $FEM_{bc} = 0$

$M_{cb} = 2\ EK_{bc}\ (2\ \theta_c + \theta_b)$; $\Delta_{cb} = 0$ & $FEM_{cb} = 0$

Persamaan keseimbangan momen pada tiap titik joint

$\Sigma M_a = M_{ab} = 0$ (nol = perletakan sendi)

$\Sigma M_b = M_{ba} + M_{bc} = 0$ (nol = perletakan rol)

$\Sigma M_c = M_{bc} = 0$ (nol = perletakan rol)

Maka persamaan menjadi :

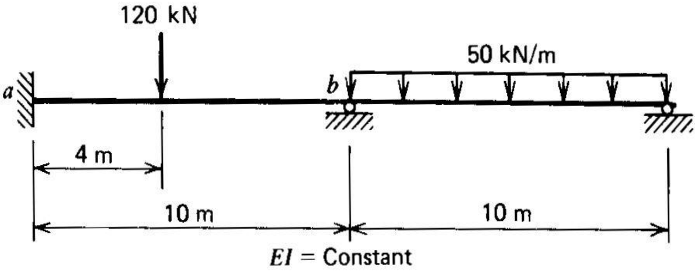
$$\begin{aligned}
4\ EK_{ab}\ \theta_a + 2\ EK_{ab}\ \theta_b \quad &= -FEM_{ab} \\
2\ EK_{ab}\ \theta_a + (4\ EK_{ab} + 4\ EK_{bc})\ \theta_b + 2\ EK_{bc}\ \theta_c &= -FEM_{ba} \\
2\ EK_{bc}\ \theta_b + 4\ EK_{bc}\ \theta_c &= 0
\end{aligned}$$

Dalam bentuk matrix :

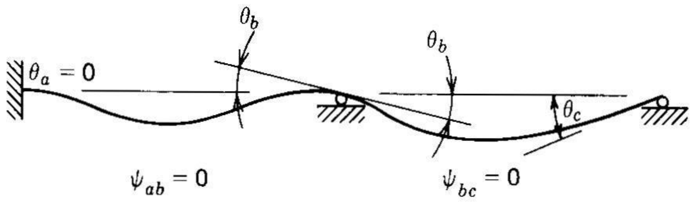
$$\begin{bmatrix} 4EKab & 2EKab & 0 \\ 2EKab & (4EKab + EKbc) & 2EKbc \\ 0 & 2EKbc & 4EKbc \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta a \\ \theta b \\ \theta c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -FEMab \\ -FEMba \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Sehingga dapat dicari nilai θ_a, θ_b & θ_c dan kemudian momen batang M_{ab}, M_{ba}, M_{bc} & $M_{cb.}$ dimana nilai θ_a, θ_b & θ_c yang telah didapat.

Contoh 1 : Tentukan momen-momen ujung dan gambar bidang momen & gaya geser dari struktur dibawah ini.



Kompatibilitas dan kondisi batas



Persamaan momen: $M_{nf} = 2EK_{nf}\{(2\theta_n + \theta_f) - 3\frac{\Delta_{nf}}{l}\} + FEM_{nf}$

Untuk : $K_{ab} = K_{bc}$ = I/10 m = K

$$FEM_{ab} = \frac{-120 \times 4 \times 6^2}{10^2} = -172.8 KN.m$$

$$FEM_{ba} = \frac{120 \times 4^2 \times 6}{10^2} = 115.2 KN.m$$

$$FEM_{bc} = \frac{-50 \times 10^2}{12} = -416.7 KN.m \rightarrow FEM_{cb} = 416.7 \text{ KN.m}$$

Maka :

$M_{ab} = 2\ EK_{ab}\ (2\ \theta_a + \theta_b - 3\frac{\Delta ab}{l}) + FEM_{ab} = 2\ EK\ (\theta_b) - 172.8$

$M_{ba} = 2\ EK_{ab}\ (2\ \theta_b + \theta_a - 3\frac{\Delta ba}{l}) + FEM_{ba} = 2\ EK\ (2\ \theta_b) + 115.2$

$M_{bc} = 2\ EK_{bc}\ (2\ \theta_b + \theta_c\ 3\frac{\Delta bc}{l}) + FEM_{bc} = 2\ EK\ ((2\ \theta_b + \theta_c) - 416.7$

$M_{cb} = 2\ EK_{bc}\ (2\ \theta_c + \theta_b\ 3\frac{\Delta cb}{l}) + FEM_{cb} = 2\ EK\ (2\ \theta_c + \theta_b) + 416.7$

Persamaan kesetimbangan:

Pada joint b → $M_{ba} + M_{bc} = 0$

Pada joint C → $M_{cb} = 0$

Subtitusi besar momen ke persamaan kesetimbangan didapat :

8 EK θ_b + 2 EK θ_c = 301.5 ← M_{ba} + M_{bc} = 0

2 EK θ_b + 4 EK θ_c = - 416.7 ← M_{cb} = 0

Dalam bentuk Matrix : $\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} EK\theta_b \\ EK\theta_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 301.5 \\ -416.7 \end{Bmatrix}$

Solusi untuk displacement didapat : $\begin{Bmatrix} EK\theta_b \\ EK\theta_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 72.8 \\ -140.6 \end{Bmatrix} KN.m$

Momen akhir :

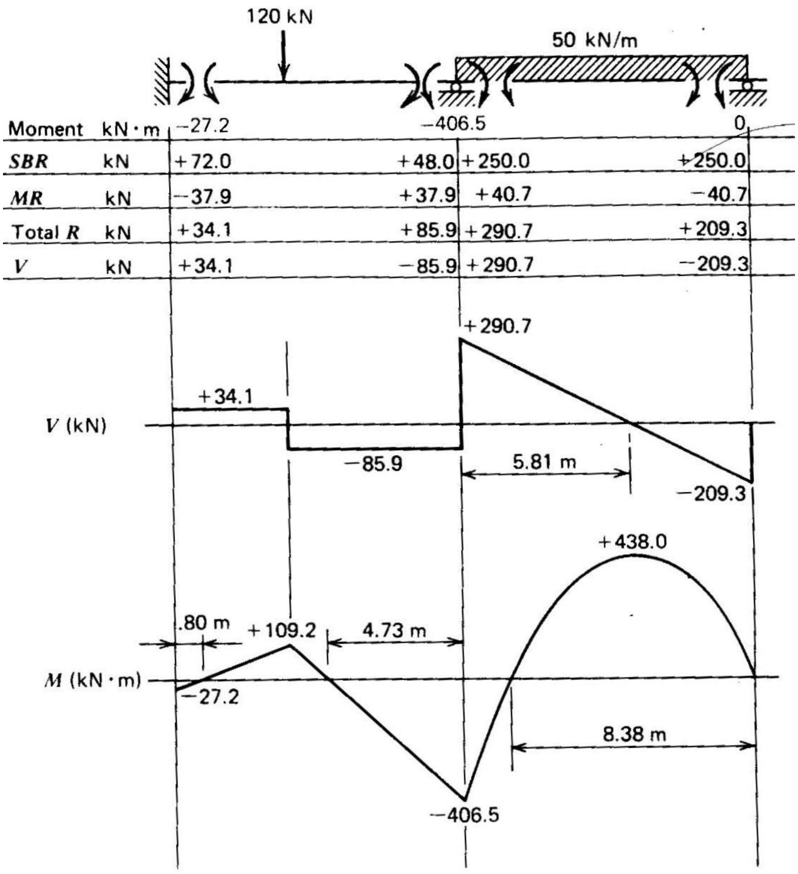
M_{ab} = 2 EK (θ_b) – 172.8 = 2 (72.8) -172.8 = - 27.2 KN.m

M_{ba} = 2 EK (2 θ_b) + 115.2 = 4 (72.8) + 115.2 = 406.6 KN.m

M_{bc} = 2 EK (2 θ_b + θ_c) - 416.7 = 4 (72.8) + 2 (-140.6) – 416.7 = - 406.5 KN.m

M_{cb} = 2 EK (2 θ_c + θ_b) + 416.7 = 4 (- 140.6) + 2 (72.8) _ 416.7 = 0 KN.m

Diagram bidang momen dan geser :



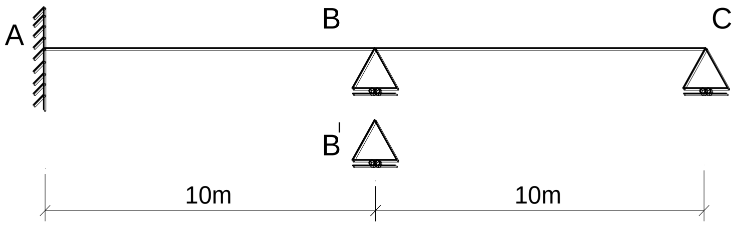
Catatan:

$$Rab = \frac{120 \times 6}{10} = 72.0$$

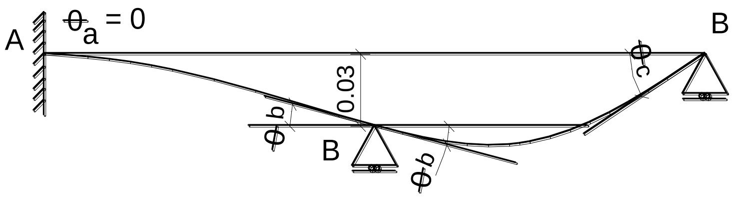
$$Rba = \frac{-27.2 + 406.5}{10} = 37.93$$

Reaksi akibat beban	72.0	48.0	250	250
Reaksi akibat momen	-37.9	+37.9	40.7	-40.7
Total R	34.1	85.9	290.7	209.3
V (gaya lintang)	34.1	- 85.9	290.7	-209.3

Contoh 2 : Tentukan momen ujung batang dan tegangan lentur maksimum struktur di bawah ini, bila perletakan B turun B^I dengan Δ = 0.03 m



EI Kontan



Kompatibilitas dan kondisi batas

E = 300 x 10^9 Pa = 200 G N/m^2

I = 2000 x 10^{-6} M^4

D = 0.3 m (tinggi balok)

Solusi:

Lihat gambar Kompatibilitas dan kondisi batas

$$\frac{\Delta ab}{l} = \frac{0.03}{10} = 0.003 = \Psi ab$$

$$\frac{\Delta bc}{l} = \frac{-0.03}{10} = -0.003 = \Psi bc$$

Persamaan momen: $Mnf = 2EKnf\,(2\theta n + \theta f) - 3Ynf\,) + FEMnf$

Semua FEM pada tiap titik joint = 0 (Karena tidak ada beban)

$$Kab = Kbc = K = \frac{2.000.10^{-6}}{10m} = 2000.10^{-7}m^3$$

$$EK = 200\frac{6N}{m^2} \times 2000.10^{-7}m^3 = 40MN.m$$

bisa ditulis $Mnf = 2EKnf\,(2\theta_n + \theta_f) - 6EK_{nf}\Psi_{nf}$

6 EK Ψ_{ab} = 6 x 40 MN.m x 0.003 = 720 kN.m

6 EK Ψ_{bc}= -720 kN.m

Maka:

M_{ab} = 2 EK (θ_b) – 720

M_{ba} = 2 EK (2 θ_b) – 720

M_{bc} = 2 EK (2 θ_b + θ_c) + 720

M_{cb} = 2 EK (2 θ_c + θ_b) + 720

Persamaan kesetimbangan:

Pada joint b → M_{ba} + M_{bc} = 0

Pada joint C → M_{cb} = 0

Subtitusi → 8 EK θ_b + 2 EK θ_c = 0

2 EK θ_b + 4 EK θ_c = -720

Hasilnya : EK θ_b = 51.4 kN.m ; EK θ_c = -205.7 kN.m

Maka Momen akhir:

M_{ab} = 2 (51.4) – 720 = - 617.2 KN.m

M_{ba} = 4 (51.4) – 720 = - 514.4 KN.m

M_{bc} = 4 (51.4) + (-205.7) + 720 = 514.2 KN.m

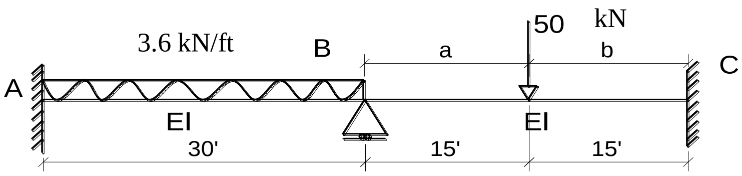
M_{cb} = 4 (-205.7) + 2 (51.4) + 720 = 0 KN.m

Maksimum tegangan lentur:

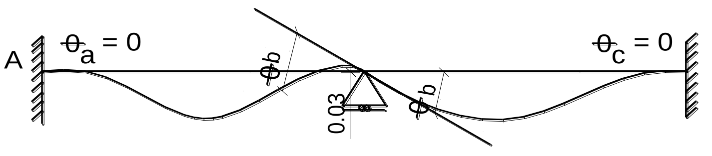
$$f = \frac{M.c}{I} = \frac{617.2KN.m \times 0.15m}{2000 \times 10^{-6}m^4} = 46.29MN/m^2$$

B. Lembar Latihan

Hitung momen ujung batang dari struktur dibawah ini dengan metode Slope Deflection Equation



solusi



Kompaktibilitas dan kondisi batas

$K_{ab} = K_{bc} = I/30 = k$

$FEM_{ab} = -\frac{1}{12} q.l^2 \;=\; -\frac{1}{12}.3{,}6.30^2 = -270$

$FEM_{ab} = 270$

$FEM_{bc} = \frac{-p.a.b^2}{l^2} \;=\; \frac{-50.15.15^2}{30^2} = -187.5$

$FEM_{bc} = 187.5$

Pers. Slope Deflection

$M_{ab} = 2\ EK\ (2\theta_a + \theta_b) + FEM_{ab} = 2\ EK\ (\theta_b) - 270$

$M_{ba} = 2\ EK\ (2\theta_b) + 270$

$M_{bc} = 2\ EK\ (2\theta_b) - 187.5$

$M_{cb} = 2\ EK\ (\theta_b) + 187.5$

Kesetimbangan:

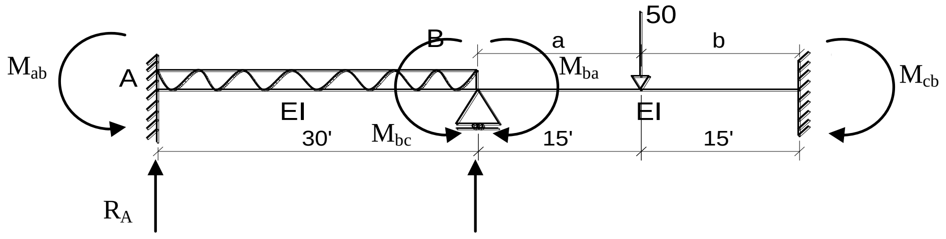
$M_{ba} + M_{bc} = 0$

$2\ EK\ (2\ \theta_b) + 270 + 2\ EK\ (2\ \theta_b) - 187.5 = 0$

$8\ EK.\theta_b + 82.5 = 0 \rightarrow EK\ \theta_b = -\frac{82.5}{8} = -10.3125$

Momen akhir

M_{ab} = 2 (-10.31) – 270 = - 290.625 , M_{ba} = 4 (-10.3125) + 270 = 228.750
M_{bc} = 4 (-10.3125)-187.5 = -228.750 , M_{cb} = 2 (-10.3125) + 187.5 = 166.875



Reaksi akibat beban luar $Ra.30' - 3.6.30'.15' = 0$ maka : $Ra = \dfrac{3.6 \times 30' \times 15'}{30'} = 54$

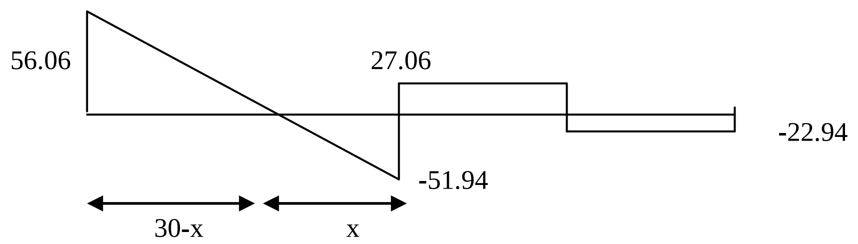
Reaksi akibat momen :

ΣMb = 0 , Ra . 30' – (Mab + Mba) = 0 , maka : $Ra = \dfrac{M_{ab} + M_{ba}}{30'} = 2.0625$

Total R_{ab} = 54+2.0625 = 56.0625 , maka R_{ba} = 51.9375 , gaya geser V_a = 56.0625 , V_{ba} = -51.9375

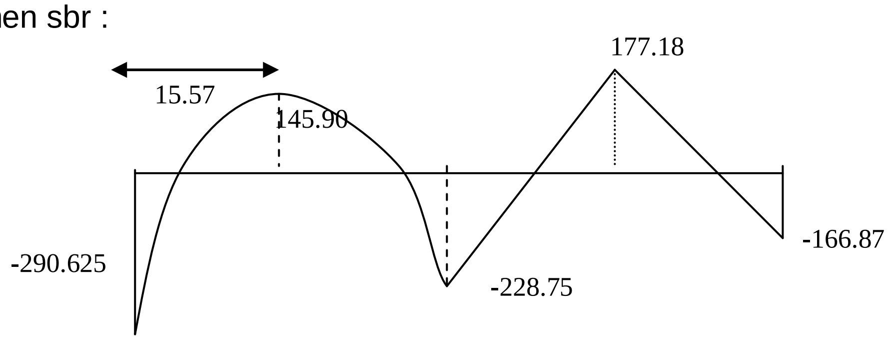
Dengan cara yang sama pada bagian balok BC , maka didapat : akibat beban luar R_{bc} = 25 , akibat momen R_{bc} = 2.0625 , total R_{bc} = 27.0625 , maka R_{cb} = 22.9375 , gaya geser V_{bc} = 27.0625 , V_{cb} = -22.9375 .

Bidang Lintang sbr :



$$\frac{51.9375}{x} = \frac{56.0625}{(30-x)} \quad , \qquad x = \frac{1558.125}{108} = 14.427$$

Bidang momen sbr :



M_{ab} max = 56.0625 (15.573) – 3.6 $(15.573)^2$ × ½ - 290.625 = 145.903

Dari CB, pada x = 15 → M_{cb} = + (22.9375 (15) – 166.875) = + 177.1875

KULIAH PERTEMUAN 11

Analisa struktur statis tak tentu dengan metode Slope deflection Equation pada portal

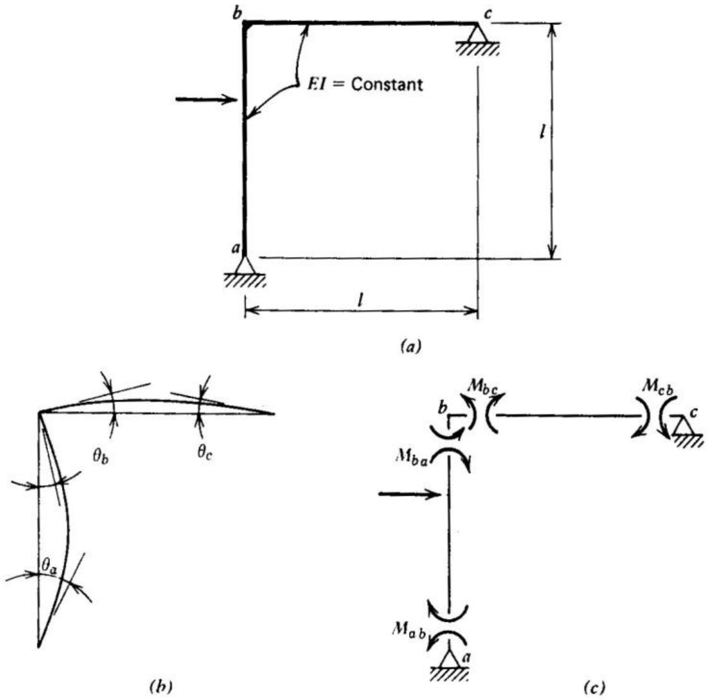
A. Lembar Informasi

1. Kompetensi

Mahasiswa dapat menghitung reaksi perletakan dan menggambarkan bidang Momen dan gaya lintang dari portal statis tak tentu dengan metode Slope deflection Equation

2. Materi Belajar

a) Penerapan Pada Portal (Tanpa pergoyangan)



Gambar a. Merupakan portal statis tak tentu tingkat satu dan ketidaktentuan kinematis tingkat tiga

(Deformasi yang belum diketahui) θ_a, θ_b, θ_c

$\Delta_{ab} = \Delta_{bc} = 0$

Solusi penyelesaiannya (sama seperti pada balok)

Persamaan Slope Deflection :

$M_{ab} = 2\ EK_{ab}\ (2\ \theta_a + \theta_b) + FEM_{ab}$, $\Delta_{ab} = 0$

$M_{ba} = 2\ EK_{ab}\ (2\ \theta_b + \theta_a) + FEM_{ba}$, $\Delta_{ba} = 0$

$M_{bc} = 2\ Ek_{bc}\ (2\ \theta_b + \theta_c)$, $\Delta_{bc} = 0$ & $FEM_{bc} = 0$

$M_{cb} = 2\ Ek_{bc}\ (2\ \theta_c + \theta_b)$, $\Delta_{cb} = 0$ & $FEM_{cb} = 0$

Kesetimbangan persamaan:

Dititik A : $\Sigma M_a = M_{ab} = 0$

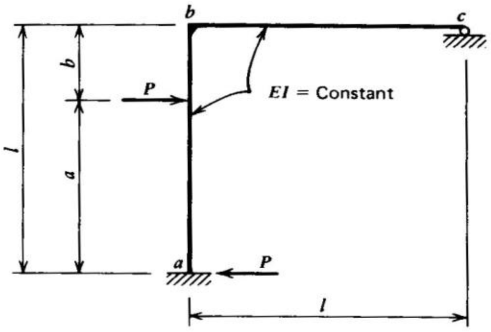
Dititik B : $\Sigma M_b = M_{ba} + M_{bc} = 0$

Dititik C : $\Sigma M_c = M_{cb} = 0$

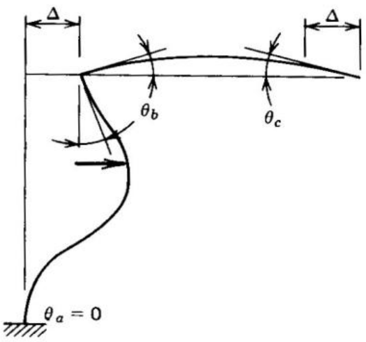
Penyelesaian untuk displacement

$$\begin{bmatrix} 4EKab & 2EKab & 0 \\ 2EKab & (4EKab + 4EKbc) & 2EKbc \\ 0 & 2EKbc & 4EKbc \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta a \\ \theta b \\ \theta c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -FEMab \\ -FEMba \\ 0 \end{Bmatrix}$$

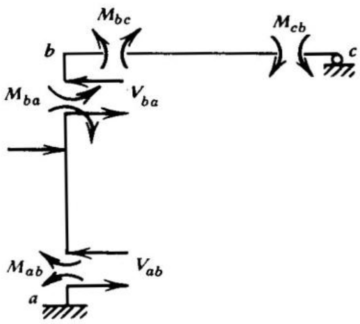
b) Penerapan Pada Portal (Dengan pergoyangan)



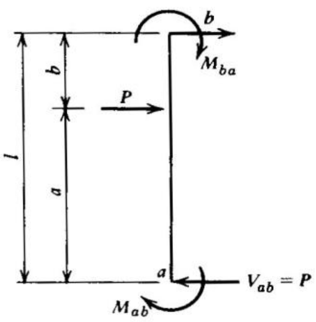
(a)



(b)



(c)



(d)

Akibat beban P terjadi displacement Horisontal di titik b & c maka $\Delta_{ab} = \Delta$, sedang $\Delta_{bc} = 0$, Karena perletakan tidak turun.

Pers. Slope Deflection:

$M_{ab} = 2\ EK_{ab}\ (\theta_b - 3\frac{\Delta}{l}) + FEM_{ab}$ → $\theta_a = 0$

$M_{ba} = 2\ EK_{ab}\ (2\ \theta_b - 3\frac{\Delta}{l}) + FEM_{ba}$ → $\theta_a = 0$

$M_{bc} = 2\ EK_{bc}\ (2\ \theta_b + \theta_c)$ → $FEM_{bc} = 0$, $\Delta_{bc} = 0$

$M_{cb} = 2\ EK_{bc}\ (2\ \theta_c + \theta_b)$ → $FEM_{cb} = 0$, $\Delta_{cb} = 0$

Persamaan kesetimbangan :

$\Sigma M_b = M_{ba} + M_{bc} = 0$. .....1)

$\Sigma M_c = M_{cb} = 0$ . .....2)

Berdasarkan free-body batang ab ;

$\Sigma M_b = 0$ → $M_{ab} + M_{ba} + V_{ab}.l - P.b = 0$

Dimana V_{ab} = gaya geser kolom pada perletakan a dengan V_{ab} = P

Maka : $V_{ab} = \frac{P.b - Mab - Mba}{l} = P$

$M_{ab} + M_{ba} = P.b - P.l$

Hasil subtitusi M_{nf} ke persamaan kesetimbangan:

Pers. 1 : $(4\ EK_{ab} + 4\ Ek_{bc})\ \theta_b + 2\ EK_{bc} - 6\ EK_{ab}\frac{\Delta}{l} = -FEM_{ba}$

Pers. 2 : $2\ EK_{bc}\ \theta_b + 4\ EK_{bc}\ \theta_c = 0$

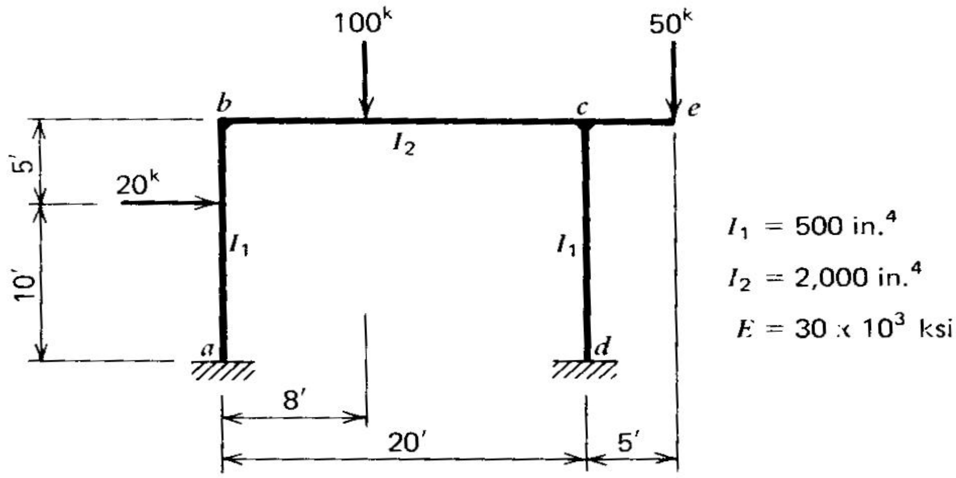
Pers. 3 : $6\ EK_{ab}\theta_b - 12\ EK_{ab}\frac{\Delta}{l} = -FEM_{ab} - FEM_{ba} + P.b - P.l$

Dalam Matrix:

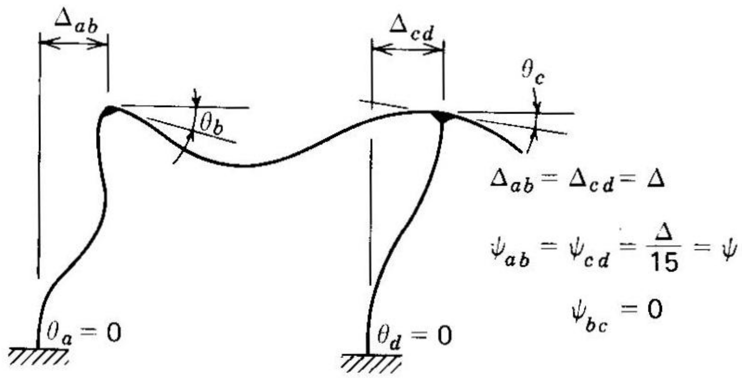
$$\begin{bmatrix} (4EKab + 4EKbc) & 2EKbc & \frac{-6EKab}{l} \\ 2EKbc & 4EKbc & 0 \\ \frac{-6EKab}{l} & 0 & \frac{12EKab}{l^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_b \\ \theta_c \\ \Delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-Pa^2b}{l^2} \\ 0 \\ \frac{Pa^2(l+2b)}{l^3} \end{Bmatrix}$$

persamaan matrix diselesaikan sehingga didapat displacement θ_b, θ_c, Δ, kemudian nilai θ_b, θ_c, Δ dimasukan ke momen ujung batang (M_{nf}) masing masing , maka didapat nilai momennya : M_{ab} =......, M_{ba} =..... , M_{bc} =..... , M_{cb} =.....

Contoh : Lihat Struktur portal di bawah ini



Kompabilitas dan kondisi batas



$\Delta_{ab} = \Delta_{cd} = \Delta$

$\Psi_{ab} = \Psi_{ba} = \Delta/15' = \Psi$

$\Psi_{bc} = 0 = \Delta/20'$

Persamaan momen: : $Mnf = 2EKnf(2\theta + \theta f) - 3Ynf) + FEMnf$

$K_{ab} = K_{cd} = I_l/15' = K$; $K_{bc} = I_2/20' = 4 \,.\, I_l/20' = 3\,K$

$$FEM_{ab} = \frac{-20 \times 10 \times 5^2}{15^2} = -22.2^{I-K}$$

$$FEM_{ba} = \frac{20 \times 10^2 \times 5}{15^2} = 44.4^{I-K}$$

$$FEM_{cb} = \frac{100 \times 8^2 \times 12}{20^2} = 192^{I-K}$$

$$FEM_{bc} = \frac{-100 \times 8 \times 12^2}{20^2} = -288^{I-K}$$

$FEM_{cd} = FEM_{dc} = 0$

Persamaan momen ujung batang (dengan slope deflektions eq)

M_{ce} = -(50 x 5) = -250$^{l\text{-}K}$ (dari statika)

M_{ab} = 2 EK (θ_b - 3Ψ) -22.2 = 2 EKθ_b – 6EKΨ -22.2

M_{ba} = 2 EK (2θ_b - 3Ψ) + 44.4

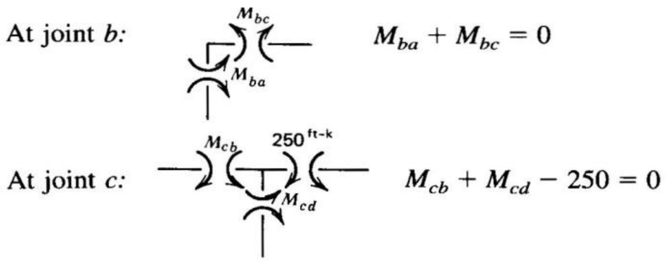
M_{bc} = 2 E. 3K (2θ_b + θ_c) – 288

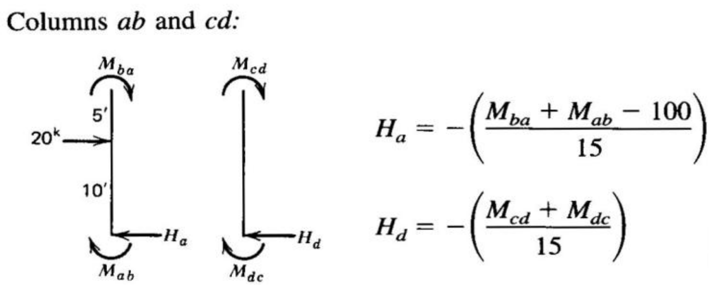
M_{cb} = 2 E. 3K (2θ_c + θ_b) + 192

M_{cd} = 2 E. K (2θ_c - 3Ψ)

M_{dc} = 2 E. K (θ_c - 3Ψ)

Persamaan kesetimbangan





1. Joint b → M_{ba} + M_{bc} = 0
2. Joint c → M_{cb} + M_{cd} – 250 = 0

Pada kolom ab dan cd

$$\Sigma M_b = 0 \rightarrow H_a = -\left(\frac{M_{ba} + M_{ab} - 100}{15}\right)$$

$$\Sigma M_c = 0 \rightarrow H_d = -\left(\frac{M_{cd} + M_{dc}}{15}\right)$$

Tetapi secara keseluruhan dalam struktur

3. ΣH = 0 → H_a + H_d = 20^k → M_{ab} + M_{ba} + M_{cd} + M_{dc} = - 200

   (2EK (θ_b - 3Ψ) -22.2) + (2 EK (2θ_b - 3Ψ) + 44.4) + (2 EK (2θ_c - 3Ψ)) + (2 EK (θ_c - 3Ψ)) = -200

- Masukan persamaan momen ke persamaan kesetimbangan, hasilnya

$16\ EK\ \theta_b + 6\ EK\ \theta_c - 6\ EK\ \Psi = 243.6$

$6\ EK\ \theta_b + 16\ EK\ \theta_c - 6\ EK\ \Psi = 58.0$

$6\ EK\ \theta_b + 6\ EK\ \theta_c - 24\ EK\ \Psi = -\ 222.2$

Dalam matrix: $\begin{bmatrix} 16 & 6 & -6 \\ 6 & 16 & -6 \\ -6 & -6 & 24 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} EK\theta_b \\ EK\theta_c \\ EK\Psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 243.6 \\ 58.0 \\ 222.2 \end{Bmatrix}$

- Hasilnya : $\begin{Bmatrix} EK\theta_b \\ EK\theta_c \\ EK\Psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 20.14 \\ 1.58 \\ 14.69 \end{Bmatrix} ft-k$

$EK\ \theta_b = 20.14 \rightarrow \theta_b = \dfrac{20.14}{EK}$

$EK\ \theta_c = 1.58 \rightarrow \theta_c = \dfrac{1.58}{EK}$ → Ingat $K = I_I/15^I$ dan $E = 30 \times 10^3$ ksi

Final momen : Masukan hasil displacement ke dalam momen ujung batang

$M_{ab} = 2\ EK\theta_b - 6EK\Psi - 22.2 = 2\ (20.14) - 6\ (14.69) - 22.2 = -70.06^{I\text{-}K}$

$M_{ba} = 4\ (20.14) - 6\ (14.69) + 44.4 = 36.82^{I\text{-}K}$

$M_{bc} = 12\ (20.14) + 6\ (1.58) - 288 = -\ 36.84^{I\text{-}K}$

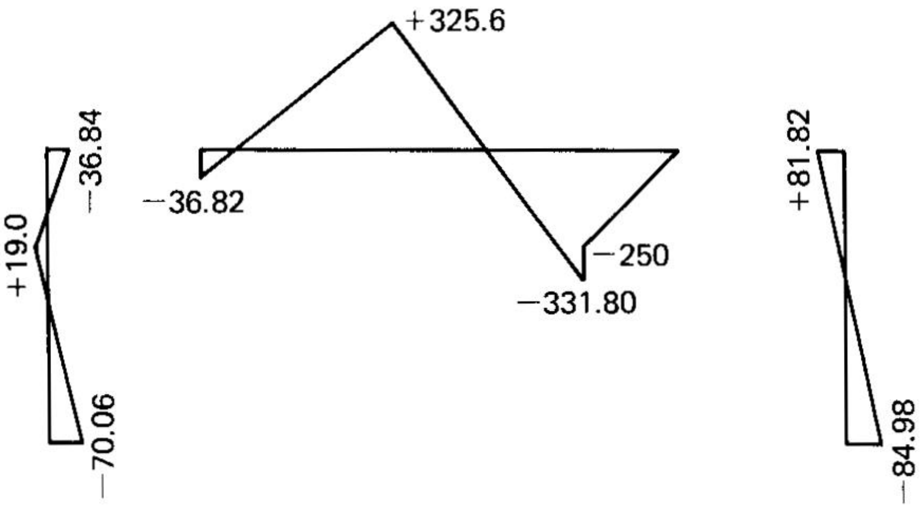
$M_{cb} = 12\ (1.58) + 6\ (20.14) + 192 = 331.80^{I\text{-}K}$

$M_{cd} = 4\ (1.58) - 6\ (14.69) = -81.82^{I\text{-}K}$

$M_{dc} = 2\ (1.58) - 6\ (14.69) = -84.48^{I\text{-}K}$

$M_{ce} = -\ 250\ ^{I\text{-}K}$ (dari Statika)

Secara umum. Diagram momen



Cat: Tinjauan kolom dari arah kanan