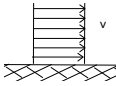
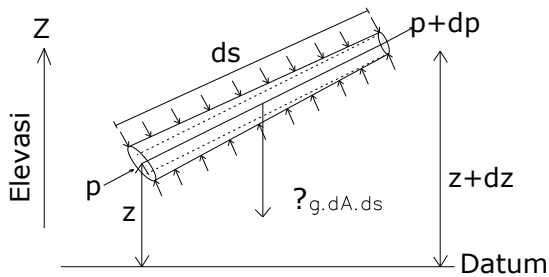


## Persamaan Energi untuk Aliran Fluida Ideal

Tinjau "tabung arus" sepanjang garis aliran (streamline)

Asumsi

1. Zat cair ideal,  $\mu=0$  (kehilangan energi akibat gesekan partikel = 0)
2. Zat cair homogeny dan incompressible ( $\rho$  konstan)
3. Aliran kontinyu sepanjang garis arus
4.  $V$  merata pada tampang dan irrotasional 
5. Gaya yang bekerja : gaya berat dan tekanan



Gaya friksi = 0,  
karena  $\mu = 0$

Gaya yang bekerja = - tekanan pada ujung elemen

- Gaya berat
- Gaya percepatan akibat perubahan kecepatan sepanjang garis arus

Hukum Newton II;  $\sum F = m.a$

$$p.dA - (p+dp).dA - \rho.g.dA.ds.\cos\theta = \rho.dA.ds.(dV/dt) - dp - \rho g.ds.\cos\theta = \rho.ds.(dv/dt)$$

percepatan tangensial (sepanjang garis aliran), untuk steady flow :

$$\frac{dv}{dt} = v.\frac{dv}{ds}$$

$$\cos\theta = \frac{dz}{ds}$$

$$\therefore -dp - \rho.g.dz = \rho.v.dv \quad \dots \times \frac{1}{\rho.g} \dots \dots \dots 1$$

$$dz + \frac{dp}{\rho g} + \frac{v.dv}{g} = 0$$

Disebut sebagai persamaan euler untuk aliran steady irrotasional, aliran ideal dan incompressible jika diintegrasikan sepanjang garis aliran:

$$z + \frac{dp}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = \text{constant} \dots\dots\dots 2$$

Atau

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} \dots\dots\dots 3$$

Pada persamaan 2, ketiga term persamaan mempunyai dimensi panjang (m), dan jumlahnya dapat diinterpretasikan sebagai energy total dari elemen fluida

Persamaan 3 dikenal sebagai “persamaan Bernoulli” atau persamaan energy untuk aliran fluida ideal steady, sepanjang garis alir antara dua tampang

Z = elevasi; p = tekanan; v = kecepatan rata-rata (uniform)

Z disebut juga potensial head = P/ρ.g = tekanan energy

v<sup>2</sup>/2g = energy kinetic perunit berat fluida

Modifikasi persamaan Energi

Persamaan Bernoulli dapat di modifikasi pada aliran fluida incompressible :

1. Menambahkan tern kehilangan (tahanan geser) pada persamaan 3. Akibat viskositas dan tegangan geser turbulen dan tahanan (resistances) lain akibat perubahan tampang, valves, penyempitan dan lain-lain.
2. Dengan menambahkan term koreksi kecepatan energy untuk distribusi kecepatan

Kehilangan turbulensi tergantung pada kekasaran permukaan dalam dari dinding pipa dan perilaku fluida (density dan viskositas). Sehingga untuk aliran fluida riil incompressible dapat ditulis persamaan:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \text{losses} \dots\dots\dots 4$$

α = faktor koreksi energy kecepatan

akibat gesekan partikel pada fluida riil, akan menimbulkan ‘thermal energy’ sehingga persamaan energy menjadi:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} + Em = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + j[(I_2 - I_1) + q] \dots \dots \dots 5$$

Em = eksternal energy (disuplai dari mesin penggerak)

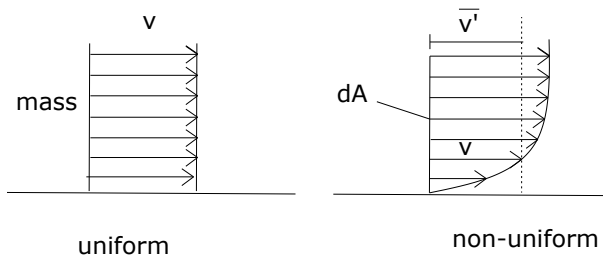
I = internal energi

Q = energi panas yang ditransfer ke sekitar aliran

J = panas ekivalen mekanis

Persamaan 5 adalah persamaan Bernoulli pada kasus khusus persamaan energy

Faktor koreksi kecepatan ( $\alpha$ )



Energy kinetic total =  $\sum$  energy kinetic individual partikel dengan massa ,m.

Aliran uniform:

$$Ek \text{ total pada tampang} = \frac{1}{2} (m_1+m_2+ \dots)v^2 = \frac{1}{2} (w/g) \cdot v^2$$

$$= v^2/2g \text{ perunit berat fluida}$$

Aliran non-uniform:

Partikel bergerak dengan kecepatan berbeda pada tampang

Berat elemen individu dengan luas dA =  $\rho \cdot dA \cdot v$

Energy kinetic individual elemen massa =  $1/2 \cdot \rho \cdot dA \cdot v \cdot v^2$

$$Energy \text{ kinetik total pada seluruh tampang} = \int_A 1/2 \cdot \rho \cdot dA \cdot v^3$$

$$= 1/2 \cdot \rho \cdot A \cdot v'^3 \cdot \alpha$$

$V'$  = kecepatan rata-rata tampang

$$\therefore \alpha = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{v}{v'}\right)^3 \cdot dA \approx \frac{\sum v^3 \cdot \Delta A}{v'^3 \cdot A} \dots \dots \dots 6$$

Aliran turbulen,  $\alpha = 1,03 - 1,3$

Aliran laminar,  $\alpha = 2,0$

$\alpha \rightarrow$  koefisien coriolis

$\alpha \approx 1,03 - 1,36 \rightarrow$  saluran prismatic lurus

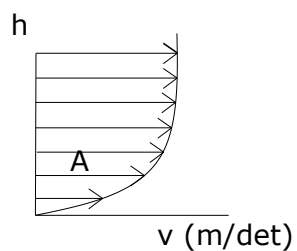
$\alpha \approx 1,15 - 1,5 \rightarrow$  sungai alam

empiris :  $\alpha \approx 1 + 3 \xi^2 - 2\xi^3 \rightarrow \xi = (V_{\text{mak}}/V') - 1$

perhitungan  $\alpha$  dari data kecepatan tampang misal : tampang segi empat :  $A = b \cdot h$  dan  $dA = b \cdot dh$

$$\alpha = \frac{\int_0^A v^3 \cdot dA}{v'^3 \cdot A} = \frac{\int_0^A v^3 \cdot b \cdot dh}{v'^3 \cdot b \cdot h} = \frac{\int_0^h v^3 \cdot b \cdot dh}{v'^3 \cdot b \cdot h}$$

$$v' = \frac{1}{h} \int_0^h v \cdot dh = \frac{A}{h}$$



Garis energy tekanan

Ditentukan dengan persamaan Bernoulli

**Gambar**

Garis tenaga/energy = tinggi total konstanta Bernoulli

$$H = Z + (P/\gamma) + (V^2/2g)$$

Aplikasi persamaan Bernoulli pada titik a dan B

$$Z_A (P_A/\gamma) + (V^2/2g) = Z_B (P_B/\gamma) + (V^2/2g) \dots\dots\dots 7$$

Tinggi tekanan di A:  $h_A = P_A/\gamma$  dan B:  $h_B = P_B/\gamma$  adalah tinggi kolom zat cair yang berta/satuan luas memberikan tekanan sebesar  $P_A = \gamma \cdot h_A$  dan  $P_B = \gamma \cdot h_B$

Dari persamaan 7; garis energy pada aliran zat cair ideal adalah konstan

Persamaan Bernoulli pada zat cair Riil

- Zat cair riil  $\rightarrow$  viskositas diperhitungkan
- Terjadi kehilangan energi akibat :
  - + gesekan antara zat cair dan dinding batas ( $h_f$ )  $\rightarrow$  primer
  - + perubahan tampang aliran ( $h_e$ )  $\rightarrow$  sekunder
- Kehilangan enrgi dinyatakan dengan tinggi zat cair

**Gambar**

Persamaan Bernoulli untuk zat cair riil dapat ditulis

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} + Em = z_3 + \frac{p_3}{\rho g} + \frac{v_3^2}{2g} + \Sigma h_e + \Sigma h_f \dots\dots\dots 8$$

Kehilangan enrgi :  $h = k \frac{v^2}{2g} \dots\dots\dots 9$

Kehilangan energy primer,  $k = f(L/D)$

Kehilangan energy sekunder.  $K = (1-(A_1/A_2))^2$

Persamaan 9 disebut persamaan darcy-weisbach

F = koefisien gesekan Darcy – Weisbach

Untuk aliran laminar :  $f = (64/Re)$

Blasius, untuk pipa halus:  $f = (0,316/Re^{0,25}) \rightarrow 4000 < Re < 10^5$

Nikuradse – pipa halus :  $1:\sqrt{f} = 2 \log (Re.\sqrt{f}/2,51)$

- pipa kasar :  $1:\sqrt{f} = 2 \log (3,7D/k)$

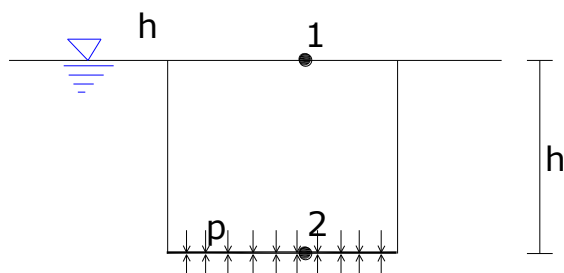
- k = tinggi kekasaran pipa

Colebrook, persamaan gabungan/transisi:

$1:\sqrt{f} = 2 \log ((3,7D/k) + (Re.\sqrt{f}/2,51)) \rightarrow$  grafik Moody

Aplikasi Persamaan Bernoulli

1. Tekanan hidrostatis  $\rightarrow$  pada zat cair diam



$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}$$

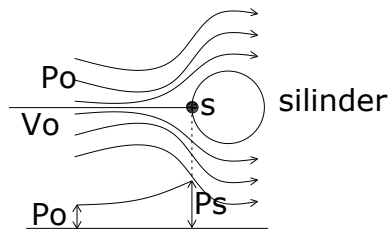
$$\text{zat} \cdot \text{cair} \cdot \text{diam} \cdot \rightarrow V_1 = V_2 = 0$$

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} \Rightarrow P_2 = (Z_1 - Z_2)\gamma + P_1 = h\gamma + P_1$$

Tekanan · titik · 1 · tekanan · atmosfer

$$P_2 = h\gamma + P_a = \gamma h \rightarrow \text{tekanan} \cdot \text{hidrostatik}$$

## 2. Tekanan Stagnasi



S = titik stagnasi

$$V_a = 0$$

Tekanan stagnasi?

$$z_0 + \frac{P_0}{\gamma} + \frac{v_0^2}{2g} = z_s + \frac{P_s}{\rho g} + \frac{v_s^2}{2g}$$

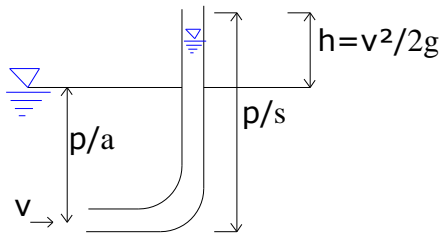
$$\text{elevasi} \cdot \text{titik} \cdot 0 = s$$

$$0 + \frac{P_0}{\gamma} + \frac{v_0^2}{2g} = 0 + \frac{P_s}{\rho g} + 0$$

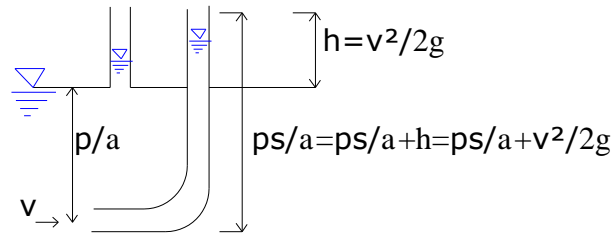
$$P_s = P_0 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_0^2$$

## 3. Tabung Pitot → alat pengukur kecepatan

- Titik stagnasi terjadi pada ujung tabung mendatar
- $P_s > P$  sekitar zat cair → tinggi kecepatan =  $V^2/2g$ , kenaikan zat cair dalam tabung



a. Gambar tabung pitot

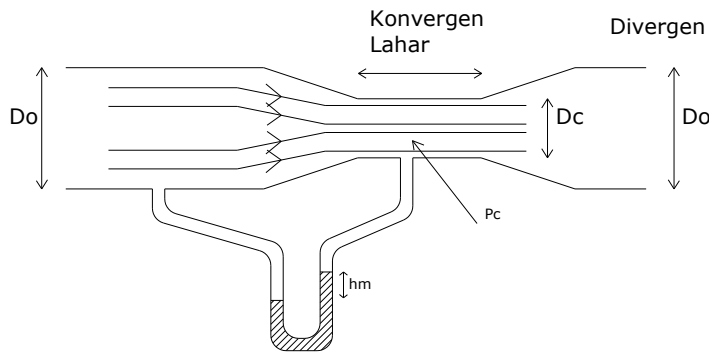


b. Gambar tabung statis pitot

Pertambahan tekanan karena aliran → tekanan dinamis pengukuran tinggi tekanan stagnasi dan tinggi tekanan statis (hidrostatik) → tabung statis pitot (gbr b)

$$v = \sqrt{2g} \cdot \frac{(P_s - P)^{1/2}}{\gamma} \rightarrow \frac{(P_s - P)^{1/2}}{\gamma} = \text{perbedaan} \cdot \text{tinggi} \cdot \text{tekanan}$$

#### 4. Alat pengukur Debit → Venturimeter



$A_c$  = luasampang pipa venture

Elevasi di titik 0 = C

$$\frac{P_o}{\gamma} + \frac{v_o^2}{2g} = \frac{P_c}{\gamma} + \frac{v_c^2}{2g}$$

Hukum kontinuitas :  $V_o = \frac{Q}{A_o}$ ;  $V_c = \frac{Q}{A_c}$  → substitusikan

$$\frac{P_o}{\gamma} + \frac{v_o^2}{2g \cdot A_o} = \frac{P_c}{\gamma} + \frac{v_c^2}{2g \cdot A_c^2}$$

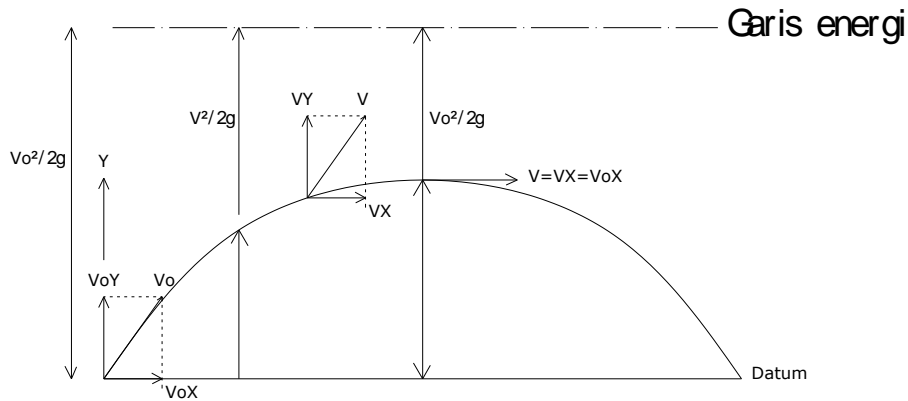
$$Q = \frac{\sqrt{2g} \cdot A_c}{\left\{1 - \left(\frac{A_c}{A_o}\right)^2\right\}^2} \cdot \left(\frac{P_o - P_c}{\gamma}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{2g} \cdot (\pi/4) \cdot D_c^2}{\{1 - m^2\}^2} \cdot \left(\frac{P_o - P_c}{\gamma}\right)^{1/2}$$

$Q_{riil} = CQ \rightarrow c = 0,97$



$m = (D_c/D_o)^2$ ; dimana  $D$  = diameter tabung

## 5. Lintasan Pancaran Zat Cair



Jarak horizontal yang ditempuh partikel

$$X = V_{0x} \cdot t \rightarrow t = x/V_{0x}$$

$$\text{Jarak vertikal : } Y = V_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

Komponen kecepatan vertikal  $U_y$  pada waktu  $t$  :

$$V_y = V_{0y} - g \cdot t$$

Kecepatan pancaran pada setiap titik dalam arah lintasan :

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

Substitusi nilai  $t$  pada  $y$

$$Y = (V_{0y}/V_{0x})X - (g/2V_{0x}^2)X^2 \rightarrow \text{persamaan parabola}$$

$$\text{Puncak ; } X = V_{0x} \cdot V_{0y} / g ; y = V_{0y}^2 / 2g$$