

**KEANDALAN BATAS ATAS DAN BATAS BAWAH FITTING
REGRESI EXPONENSIAL SERTA KETERBATASAN
EKSTRAPOLASINYA.**

**Tugas Mata Kuliah
MATEMATIKA DAN STATISTIKA SDA**

Dosen :

Prof. Dr. I. Sudjarwadi, M.Eng.

Dikerjakan :

**S U K A D I
NIM : 13412/I-1/1282/99
MS : Teknik Sumberdaya Air**

**JURUSAN TEKNIK SIPIL
PROGRAM PASCA SARJANA
UNIVERSITAS GADJAH MADA YOGYAKARTA
1 9 9 9**

KEANDALAN BATAS ATAS DAN BATAS BAWAH FITTING REGRESI EXPONENSIAL SERTA KETERBATASAN EKSTRAPOLASINYA.

Perkiraan usia waduk dengan data sedimen yang pendek, akan memberikan nilai probabilitas yang kurang pasti dan dapat menimbulkan kesulitan prediksi definitif (Sudarwadi, 1995). Baik dengan menggunakan regresi linier maupun regresi eksponensial, dengan bertambahnya kumulatif tahun pengamatan (X) yang semakin jauh dari nilai reratanya (\bar{X}) maka akan semakin kasar kesalahannya.

Penggunaan kurva regresi linier, eksponensial dan polinomial akan memberikan prediksi mengenai keadaan data pada tahun-tahun mendatang. Walaupun penggunaan regresi ini dapat menimbulkan prediksi yang kurang memuaskan, tetapi setidaknya memberikan nilai yang dapat dijadikan perkiraan dalam perencanaan.

Hal demikian maka perlu dilakukan pengujian tingkat keterandalan pada nilai-nilai yang didapat. Secara probabilistik statistik nilai-nilai prediksi tersebut perlu diuji sampai tingkat tertentu dengan menggunakan uji kepercayaan pada tingkat-tingkat kepercayaan sesuai dengan analisis resikonya. Pengujian ini akan mendapatkan nilai toleransi secara maksimum (batas atas) dan minimum (batas bawah) dari nilai prediksi yang didapat. Sehingga nilai antara tersebut merupakan nilai yang berada pada batas aman dan dapat digunakan dalam analisis selanjutnya.

Penggunaan regresi eksponensial dalam mengkaji usia waduk mendatang dengan data *echo sounding* pada rentang waktu yang pendek memberikan hasil yang tidak efektif dan kurang menguntungkan. Hal ini disebabkan pada setiap penambahan kumulatif tahun pengamatan (X) akan memberikan nilai perkiraan (Y) semakin besar. Sehingga dapat dikatakan bahwa regresi eksponensial memberikan nilai ekstrapolasi yang cukup besar pada setiap penambahan tahun. Nilai ekstrapolasi yang cepat membesar ini dapat menimbulkan prediksi yang cukup pendek. Maka secara definitif bahwa waduk tersebut tidak layak dikarenakan usia yang cukup pendek.

Menganalisis dari hasil hitungan dengan menggunakan regresi eksponensial dengan langkah-langkah pertama (Pekerjaan : Sukadi) merupakan perhitungan tanpa dilakukannya transformasi ke dalam bentuk linier. Jadi menggunakan *kurve fitting* sesuai dengan nilai **a** dan **b** yang didapatkan sebelumnya ($\hat{Y} = 0,802 e^{(0,3762X)}$).

Sedangkan langkah-langkah kedua yang diberikan dari kuliah MS SDA (Prof. Dr. Ir. Sudjarwadi, M.Eng) merupakan perhitungan dengan melalui transformasi ke dalam bentuk linier. Transformasi dilakukan pada kurve fittingnya, sehingga mendapatkan persamaan baru yaitu : $\ln \hat{Y} = \ln a + bX$ atau $Y\hat{Y} = a + bX$ dimana $a = \ln 0,802$ sedangkan b mempunyai nilai yang sama (0,3762). Sedangkan untuk mendapatkan Y harapannya sendiri merupakan pengembalian nilai $Y\hat{Y}$ dikembalikan ke \hat{Y} yaitu dengan menggunakan persamaan : $\hat{Y} = e^{Y\hat{Y}}$

Ternyata dengan melakukan kedua langkah perhitungan tersebut memberikan nilai yang sama untuk setiap \hat{Y} dan batas atas ($\hat{Y}_h(t)$) dan bawahnya ($\hat{Y}_h(b)$).

PUSTAKA

Freund, John E., 1981, *Modern Elementary Statistics*, Prentice-Hall of India Private Limited, New Delhi.

Haan, Charles T., 1979, *Statistical Methods in Hydrology*, The Iowa University Press, Ames,

Sudjana, 1982, *Teknik Analisis Regresi dan Korelasi*, Tarsito, Bandung.

Sudjarwadi, 1995, *Kesulitan Prediksi Laju Sedimen Waduk Berdasar Data Echo Sounding*, PIT XII HATHI, Surabaya.

Stephen B. Vardeman, 1994, *Statistics for Engineering, Problem Solving*, PWS Publishing Company, Boston.

ANALISIS PERTAMA

Data Endapan Berdasar Anggapan dari pengukuran *Echo Sounding* , Waduk Mrica

Tahun	Usia Operasi (Tahun)	Endapan Kumulatif (juta m ³)
1989	1	0,96
1990	2	1,92
1991	3	2,88
1992	4	3,84
1993	5	4,89
1994	6	7,2

Diketahui bahwa Hasil *Curve Fitting Exponential* dengan persamaan :

$$\hat{Y} = 0,82 e^{(0,3762 X)}$$

Untuk mendapatkan Nilai Tengah [\hat{Y}_h], Nilai batas bawah [$\hat{Y}_h(b)$] dan Nilai batas atas [$\hat{Y}_h(t)$] dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Mencari Nilai $\Sigma (X_i - X_r)$

No.	X _i	X _i - X _r	(X _i - X _r) ²
1	1	-2,5	6,25
2	2	-1,5	2,25
3	3	-0,5	0,25
4	4	0,5	0,25
5	5	1,5	2,25
6	6	2,5	6,25
Jumlah	21		17,5
Rata ²	3,5		

2. Menghitung nilai SSE (Sum of Squares Error) dan MSE (Mean Square for Error)

$$SSE = \sum_{i=1}^n \ell_i^2 = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \quad (1)$$

$$MSE = \frac{SSE}{n - 2} \quad (2)$$

No.	Usia Operasi	Endapan (Yi)	a	b	Endapan (Y)	SSE (Yi - Y) ²	MSE
1	1	0,96	0,802	0,3762	1,1683	0,0434	0,1642
2	2	1,92			1,7019	0,0476	
3	3	2,88			2,4792	0,1606	
4	4	3,84			3,6116	0,0522	
5	5	4,89			5,2612	0,1378	
6	6	7,20			7,6641	0,2154	
Jumlah	21	21,69				0,6569	
Rata ²	3,5	3,62					

3. Menghitung Nilai batas atas dan bawah, dengan menggunakan rumus :

$$E(Y_h) = \hat{Y}_h \pm t_{(1-\alpha/2; n-2)} \cdot S(\hat{Y}_h) \quad (3)$$

$$S(\hat{Y}_h) = (S^2(\hat{Y}_h))^{0,5} \quad (4)$$

$$S^2(\hat{Y}_h) = \text{MSE} \left(\frac{1}{n} + \frac{(X_h - \bar{X})^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \right) \quad (5)$$

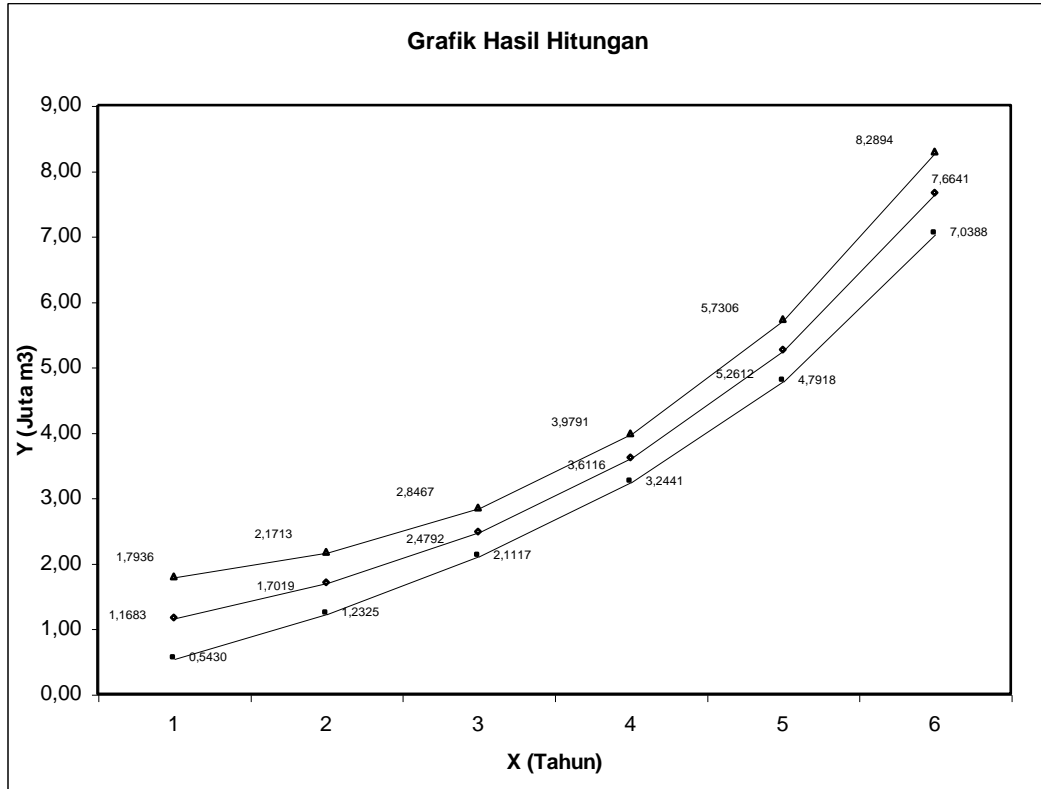
$$\sum (X_i - \bar{X})^2 = 17,5$$

$$\text{MSE} = 0,1642$$

Dalam menghitung nilai-nilai ini digunakan pada interval konfiden 90 % dan derajat kebebasan adalah $(n - 2) = 6 - 2 = 4$. Menggunakan tabel distribusi t, didapatkan $t_{(0,95; 4)} = 2,132$.

Perhitung dilakukan dengan sistem tabel, maka didapatkan nilai-nilai sebagai berikut :

No.	X	(Yi)	S ² (Y _h)	S(Y _h)	t	Y _h (b)	Y _h (t)
1	1	1,1683	0,0860	0,2933	2,132	0,5430	1,7936
2	2	1,7019	0,0485	0,2202		1,2325	2,1713
3	3	2,4792	0,0297	0,1724		2,1117	2,8467
4	4	3,6116	0,0297	0,1724		3,2441	3,9791
5	5	5,2612	0,0485	0,2202		4,7918	5,7306
6	6	7,6641	0,0860	0,2933		7,0388	8,2894



ANALISIS KEDUA

Data Endapan Berdasar Anggapan dari pengukuran *Echo Sounding* , Waduk Mrica

Tahun	Usia Operasi (Tahun)	Endapan Kumulatif (juta m ³)
1989	1	0,96
1990	2	1,92
1991	3	2,88
1992	4	3,84
1993	5	4,89
1994	6	7,2

Diketahui bahwa Hasil *Curve Fitting Exponential* dengan persamaan :

$$\hat{Y} = 0,82 e^{(0,3762 X)}$$

Persamaan tersebut ditransformasikan ke dalam bentuk regresi linier menjadi :

$$\ln \hat{Y} = \ln (0,802 e^{0,3762 X})$$

$$\ln \hat{Y} = \ln 0,802 + 0,3762 X \ln e$$

$$\ln \hat{Y} = \ln 0,802 + 0,3762 X$$

$$\hat{Y} = a + b X \rightarrow \text{Regresi Linier} \quad (6)$$

Didapatkan bahwa $\ln 0,802 = -0,2206$, maka persamaan regresi menjadi :

$$\hat{Y} = -0,2206 + 0,3762 X \quad (7)$$

Untuk mendapatkan Nilai Tengah $[\hat{Y}_h]$, Nilai batas bawah $[\hat{Y}_h(b)]$ dan Nilai batas atas $[\hat{Y}_h(t)]$ dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Mencari Nilai $\Sigma (X_i - X_r)$

No.	X_i	$X_i - X_r$	$(X_i - X_r)^2$
1	1	-2,5	6,25
2	2	-1,5	2,25
3	3	-0,5	0,25
4	4	0,5	0,25
5	5	1,5	2,25
6	6	2,5	6,25
Jumlah	21		17,5
Rata ²	3,5		

2. Menghitung nilai SSE (Sum of Squares Error) dan MSE (Mean Square for Error)

Perhitungan ini diperlukan nilai (\hat{Y}_i) dengan menggunakan masukan data \hat{Y}_Y , dengan rumus :

$$\hat{Y}_i = e^{\hat{Y}_Y} \quad (8)$$

$$SSE = \sum_{i=1}^n \ell_i^2 = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \quad (1)$$

$$MSE = \frac{SSE}{n - 2} \quad (2)$$

Selanjutnya dihitung dengan menggunakan tabel berikut :

No.	Usia Operasi	Endapan (Yi)	a	b	Regresi (YY)	Endapan (Y)	SSE (Yi - Y) ²
1	1	0,96	-0,2206	0,3762	0,1556	1,1684	0,0434
2	2	1,92			0,5318	1,7020	0,0475
3	3	2,88			0,9080	2,4794	0,1605
4	4	3,84			1,2842	3,6118	0,0521
5	5	4,89			1,6604	5,2614	0,1379
6	6	7,20			2,0366	7,6645	0,2158
Jumlah		21	21,69				0,6573
Rata ²		3,5	3,62			MSE	0,1643

3. Menghitung Nilai batas atas dan bawah, dengan menggunakan rumus :

$$E(Y_h) = \hat{Y}_h \pm t_{(1-\alpha/2; n-2)} \cdot S(\hat{Y}_h) \quad (3)$$

$$S(\hat{Y}_h) = (S^2(\hat{Y}_h))^{0,5} \quad (4)$$

$$S^2(\hat{Y}_h) = \text{MSE} \left(\frac{1}{n} + \frac{(X_h - \bar{X})^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \right) \quad (5)$$

$$\sum (X_i - \bar{X})^2 = 17,5$$

$$\text{MSE} = 0,1643$$

Dalam menghitung nilai-nilai ini digunakan pada interval konfiden 90 % dan derajat kebebasan adalah $(n - 2) = 6 - 2 = 4$. Menggunakan tabel distribusi t, didapatkan $t_{(0,95; 4)} = 2,132$.

Perhitung dilakukan dengan sistem tabel, maka didapatkan nilai-nilai sebagai berikut :

No.	X	(Yi)	S ² (Y _h)	S(Y _h)	t	Y _h (b)	Y _h (t)
1	1	1,1683	0,0860	0,2933	2,132	0,5430	1,7936
2	2	1,7019	0,0485	0,2202		1,2325	2,1713
3	3	2,4792	0,0297	0,1724		2,1117	2,8467
4	4	3,6116	0,0297	0,1724		3,2441	3,9791
5	5	5,2612	0,0485	0,2202		4,7918	5,7306
6	6	7,6641	0,0860	0,2933		7,0388	8,2894

Grafik Hasil Hitungan

