MODUL X
FISIKA MODERN
KONSEKUENSI TRANSFORMASI LORENTZ

Tujuan Instruksional Umum :

- Agar mahasiswa dapat memahami mengenai Konsekuensi Transformasi Lorentz

Tujuan Instruksional Khusus :

- Dapat menjelaskan tentang pemuaian atau dilatasi waktu
- Dapat menjelaskan tentang pengerutan atau kontraksi panjang

Buku rujukan :

- Fisika modern Halliday-Resnick

Konsekuensi Tranformasi Lorentz

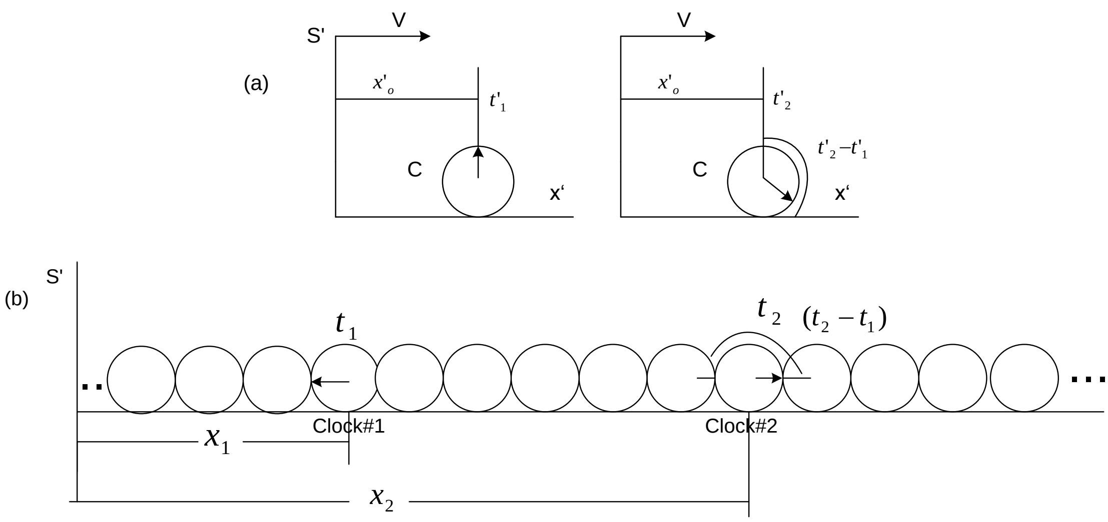
Ada 2 hal yang akan kita bahas sehubungan dengan efek samping dari Transformasi Lorentz (atau efek sampingan dari pemakaian postulat Enstein)

1. Pemuaian (pemuluran) dilatasi waktu

2. pengerutan atau kontraksi panjang

9.1 Dilatasi Waktu

Transformasi Lorentz meramalkan bahwa ketika suatu jam bergerak dengan kecepatan v terhadap pengamat, maka waktu akan (muai mulur) dengan factor $\sqrt{1-v^2/c^2}$. Untuk membuktikan ini mari kita lihat Gb 9.1 anggap sebuah jam C berada dalam kerangka S dan kerangka S' yang bergerak dengan kecepatan v pada arah sumbuh x. anggap mula-mula kerangka S dan kerangka S' berimpitan. Pada waktu posisi jam di A, pengamat di S' mencatat bahwa jam berada pada jarak x'_o dan waktu yang ditunjukkan jamnya t'_1 .Pengamat di S mencatat bahwa posisi jam tersebut adalah x_1 dan waktu yang ditunjukkan adalah t_1.



Gambar 9.1a-b

Setelah beberapa waktu kemudian jam menunjukkan waktu t'$_2$ menurut pengamat di S'. posisinya tetap pada x'$_o$ .Menurut pengamat di S posisinya sekarang pada x_2 dan waktu yang ditunjukkannya adalah t_2. Jika $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ dan $\Delta t = t_2 - t_1$ maka dengan menggunakan transfomasi Lorentz kita peroleh :

$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + v\Delta x'/c^2)$$

Karena kita anggap jam C diam terhadap kerangka S' maka $\Delta x' = 0$ Dengan demikian kita peroleh :

$$\Delta t = \gamma \Delta t'$$

atau

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{.....................(1)}$$

Karena $\sqrt{1-\beta^2} < 1$ maka kita lihat bahwa interval $(t_2 - t_1)$ lebih besar dibandingkan dengan interval $(t'_2 - t'_1)$. Jadi menurut pengamat di S jam yang ada di S' tampak diperlambat (seolah waktu memuai atau mulur). Peristiwa inilah yang dikenal dengan dilatasi waktu atau pemuaian waktu.

Misalkan selang waktu yang diukur oleh pengamat di S'adalah Δt dinamakan waktu sesunggunya atau propertime dan selang waktu yang diukur oleh pengamat S adalah Δt maka hubungan antara kedua besaran ini adalah;

$$\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ (dilatasi waktu)..............................(2)}$$

Pada peristiwa dilatasi waktu, waktuseolah-olah diperlambat.Perambatan waktu ini tidak hanya terjadi pada jam mekanik saja. Tetapi juga pada proses fisis termasuk reaksi kimia dan proses biologis, misalnya detak jantung astronot akan diperlambat. Namun karena semua ada dalam pesawat mengalami perlambatan, astronot tidak merasakan bahwa proses-proses dalam tubuhnya diperlambat. Yang merasakan perubahan ini adalah pengamat di luar yaitu akan melihat astronot telah bepergian puluhan tahun dengan pesawat yang bergerak mendekati cahaya.

Dilatasi waktu ini merupakan penomena yang nyata dan sudah dibuktikan dengan berbagai eksprimen. Misalnya partikel muon yang berasal dari dari luar angkasa mempunyai waktu hidup 2,2 μs jika diukur dalam kerangka muon. Namun jika diukur dalam kerangka bumi, umur muon ini menjadi 16 μs (lihat contoh 1)

Contoh 1; Suatu partikel muon bergerak dengan 9,9 c. Menurut muon waktu hidupnya hanya 2,2 μs sebelum ia meluruh menjadi pertikel lain. Hitung berapa waktu hidup muon menurut orang di laboratorium.

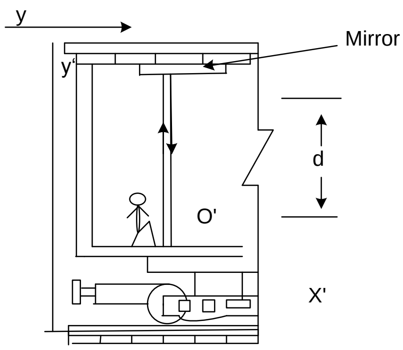
Penyelesaian:

Muon adalah kerangka yang bergerak Menurut muon waktu hidupnya adalah 2,2 μs, ini artinya selang waktu yang diukur oleh kerangka yang bergerak ($\Delta\tau$ =2,2 μs).

Selang waktu yang diukur oleh kerangka diam (di laboratorium) dapat dicari dengan rumus 12 Disini β=v/c=0,99

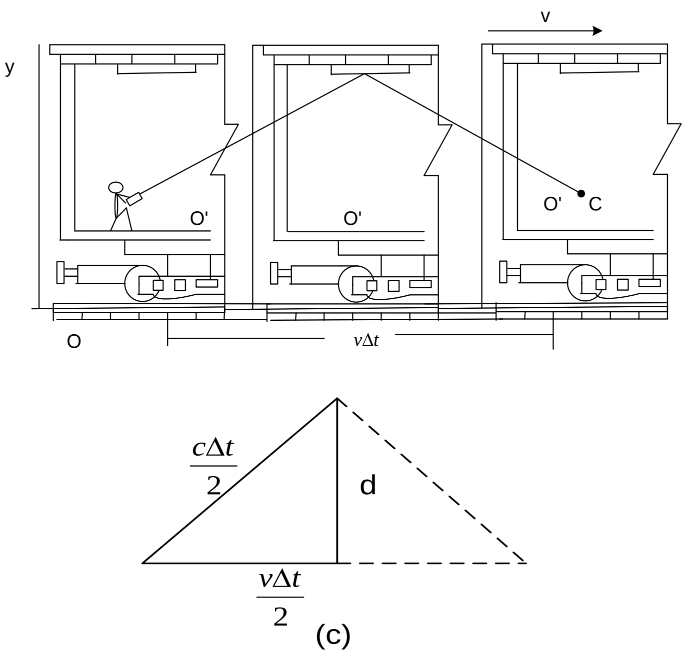
$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{2,2}{\sqrt{1-0,99^2}} 16\mu s$$

Ada cara lain untuk menurunkan rumus dilatasi waktu. Cara ini adalah langsung dengan menggunakan postulat kedua. Kita akan pelajari juga cara ini agar pemahaman konsep dilatasi waktu semakin matang.



Gambar 9.2 a

Anggap ada suatu kerangka S' berupa kendaraan yang bergerak ke kanan dengan kecepatan v (gb 9.2a) . Sebuah cermin diletakkan di langit-langit kendaraan itu seorang pengamat, ani diam dalam kemdaraan memegang sebuah pistol laser dan setelah dipantulkan di cermin, sinar laser kembali ke ani. Ani membawa jam yang ia gunakan untuk mengukur interval waktu $\Delta t'$ (waktu yang dibutuhkan laser dari semenjak ditembakkan sampai kembali lagi mengenai pistol). Karena kecepatan cahaya c dan jarak tempuh laser 2 d, maka besarnya selang waktu ini menurut ani adalah :



Gambar 9.2 b-c

Sekarang anggap ada seorang pengamat lain, Tom berada diluar kendaraan S. Tom melihat kendaraan bergerak ke kanan. Menurut Tom waktu yang dibutuhkan oleh sinar laser dari semenjak ditembakkan hingga kembali ke tangan Ani adalah Δt. Karena kecepatan kendaraan v maka menurut Tom jarak mendatar Ani ketika laser tiba ditangan ani kembali adalah v Δt (gb 9.2 b). Menurut Tom sina laser yang semula berada pada jarak x = x_A hingga berada pada jarak x = x_c dari dirinya disebabkan karena ia dipantulkan di titik pada cermin yang berjarak mendatar x = x_B darinya dimana $x_B - x_A = x_C - x_B = V\Delta t/2$.

Menurut postulat 2 Einstein kecepatan cahaya yang diukur oleh Tom juga sama dengan c, sehingga panjang lintasan yang ditempuh oleh laser adalah $c\Delta t'$. Dari gambar 9.2 c tampak bahwa panjang lntasan ini sama dengan $2\sqrt{d^2 + (v\Delta t 2)^2}$.

Dengan demikian kita peroleh :

$$c\Delta t = 2\sqrt{d^2 + (v\Delta t/2)^2}$$

$$c^2(\Delta t)^2 = 4d^2 + 4(v\Delta t/2)^2$$

$$(\Delta t)^2(c^2 - v^2) = 4d^2$$

$$(\Delta t)^2 = \frac{4d^2}{(c^2 - v^2)}$$

$$\Delta t = \sqrt{\frac{4d^2}{(c^2 - v^2)}}$$

$$\Delta t = \frac{2d}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

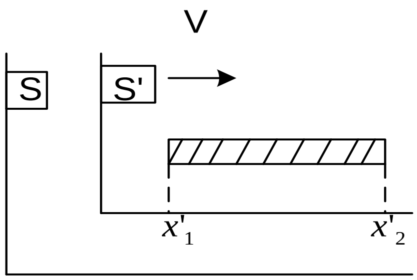
Karena $\Delta t' = 2d/c$

$$\Delta t = \frac{c\Delta t'}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

Ini sesuai dengan apa yang kita turunkan dari rumus trasnformasi Lorentz.

9.2. Konraksi Panjang

kita sudah lihat bahwa transformasi Lorentz (atau postulat Einstein) mengakibatkan Dilatasi waktu. Disini kita akan melihat bahwa transformasi Lorentz mengakibatkan kontraksi panjang.



Gambar 9.3

Untuk membuktikan ini anggap suatu batang diletakkan pada system S' yang bergerak dengan kecepatan v relative terhadap pengamat yang di S. Anggap ujung-ujung batang diletakkan di koordinat x'_1 dan x'_2 sehingga panjang batang menurut pengamat S' adalah $\Delta x' = x'_2 - x'_1$. Panjang batang ini diukur ketika batang diam (ingat menurut S' batang diam).

Dengan menggunakan Lorentz transformation kita peroleh:

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1$$

$$\begin{aligned} &= \gamma(x_2 - vt_2) - \gamma(x_1 - vt_1) \\ &= \gamma(x_2 - x_1) - \gamma(vt_2 - vt_1) \\ &= \gamma\Delta x - \gamma v\Delta t \end{aligned}$$

jika Δx menyatakan panjang batang dalam kerangka S maka x_1 dan x_2 diukur pada waktu yang bersamaan dengan kata lain Δt =0 sehingga ,

$$\Delta x' = \gamma\Delta x$$

sekarang tuliskan $\Delta x'$ sebagai panjang ketika batang diam (dalam S'), lo dan Δx sebagai panjang l, menurut system S.

sehingga boleh menuliskan

$$l_o = \gamma l$$

$$l = l_o\sqrt{1-\beta^2} \text{ ....(3)}$$

Kita lihat bahwa panjang batang yang bergerak akan tampak lebih pendek menurut kerangka diam Peristiwa ini dinamakan **Pontraksi Panjang** .

Rumus (3) di atas dapat diturunkan dengan cara lain cara ini menggunakan efek dilatasi waktu.

Misal sebuah pesawat ruang angkasa terbang dari suatu bintang ke bintang lain. Seorang pangamat di bumi mengukur bahwa jarak kedua bintang l_o, jika pesawat tersebut bergerak dengan kecepatan v maka waktu yang dibutuhkan dari bintang yang satu ke bintang yang lain adalah: $\Delta t = l_o / v$. Akibat fenomena dilatasi waktu, pengamat yang berada dipesawat tersebut mencatat waktu ini lebih kecil adalah : $\Delta t' = \Delta t / \gamma$.

Pengamat di pesawat melihat dirinya diam dan ia melihat bintang mendekati ia dengan kecepatan v. karena waktu dari satu bintang lain adalah $\Delta t'$ maka menurut pengamatan di pesawat jarak kedua bintang adalah :

$$l = v\Delta t$$

$$= v\frac{\Delta t'}{\gamma}$$

$$= \frac{l_o}{\gamma} = l_o\sqrt{1-\beta^2}$$

Rumus ini dengan 3.

Patut diperhatikan kontraksi panjang simetri. Artinya ketika suatu batang yang panjang l_o jika dibawa oleh pesawat ruang angkasa, akan terlihat lebith pendek oleh pengamat dibumi. Jika batang tersebut diletakkan di bumi, pengamat di pesawat ruang angkasa akan melihat lebih pendek.

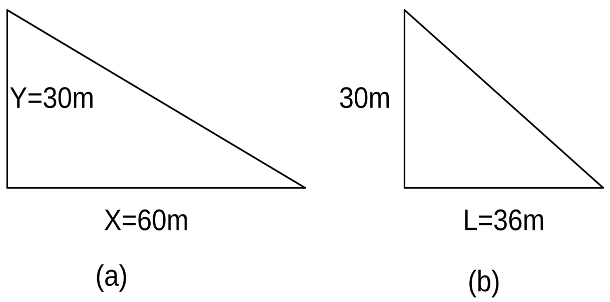
Contoh 2. Sebuah pesawat ruang angkasa berbentuk terbang dengan kecepatan 0,8 c. Ukuran segitiga ketika diam digambarkan pada Gb.9.4 a yaitu dengan 60 m dan y= 30 m. Tentukan ukuran kapal tersebut ketika sedang bergerak, menurut pengamat di bumi.

Jawab :

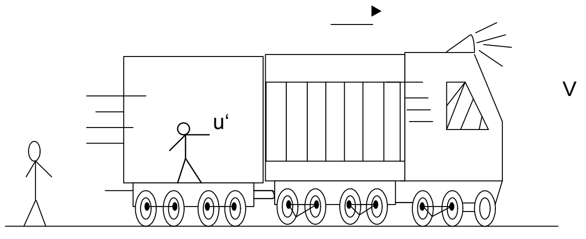
Pengamat di bumi akan melihat pemendekan panjang pesawat hanya dalam arah searah dengan arah gerak pesawat saja yaitu hanya arah x yang memendek. Arah y tetap sama karena β= 0,8 maka arah mendatar yang dilihat oleh pengamat di bumi adalah :

$$l = l_o\sqrt{1-\beta^2} = 60\sqrt{1-0{,}8^2} = 36m$$

Ukuran segitiga yang diminta ditunjukkan pada Gb 8.4.b



Gambar 9.4 a-b



Gambar 9.5

Anggap sebuah kereta api modern bergerak cepat sekali dengan keceaptan v. di dalam kereta seorang penumpang yang bergerak dengan kecepatan u'. setelah waktu t' posisi orang tersebut x'= u't'. Dengan menggunakan transformasi Lorentz kita peroleh.

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$u't' = \gamma(x - vt)$$

$$u'\gamma(t - \frac{vx}{c^2}) = \gamma(x - vt)$$

$$u'(t - \frac{vx}{c^2}) = x - vt$$

$$u't - u'\frac{vx}{c^2} = x - vt$$

$$(u'+v)t = (1 + u'\frac{vx}{c^2})x$$

$$\frac{x}{t} = \frac{u'+v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

x adalah posisi yang diukur oleh pengamat di tanah dan t adalah waktu pengamat ditanah. x/t kita namakan kecepatan menurut pengamat di tanah. Kecepatan ini beri symbol u sehingga kita peroleh rumus :

$$u = \frac{u'+v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

Ini adalah rumus kecepatan diukur oleh pengamat diam rumus ini dinamakan rumus kecepatan relativistik .

Sekarang mari uji rumus ini dengan menggunakan beberapa kasus-kasus tertentu yang telah kita tahu jawabnya.

1. Jika u’=0 maka u=v ini cocok dengan intuisi kita yaitu jika orang berhenti maka kecepatan orang terhadap tanah sama dengan kecepatan kereta terhadap tanah.
2. Jika v = 0 maka u = u’ ini juga sesuai yang kita harapkan, yaitu ketika kereta berhenti, kecepatan orang terhadap tanah sama dengan kecepatan orang terhadap kereta.
3. Jika u’ dan v’ sangat kecil dibandingkan dengan c maka u = u’+ v ini seuai dengan rumus kecepatan Galileo.
4. Jika u’ = c (penumpang diganti cahaya) maka u = c, ini cocok dengan rumus Maxwell bahwa kecepatan cahaya pada setiap kerangka sama.

Ternyata rumus pertambahan kecepatan relativistik tidak bertentangan dengan intuisi kita!

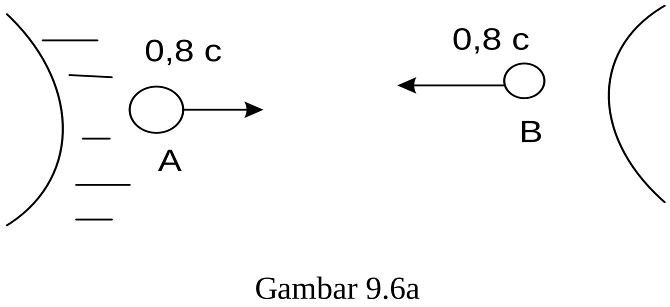
Contoh 3

Dua buah elektron dipancarkan oleh dua sumber kecepatan itu masing-masing 0,8 c dalam arah berlawanan. Hitung kecepatan elektron yang satu relatife terhadap yang lain.

Jawab :

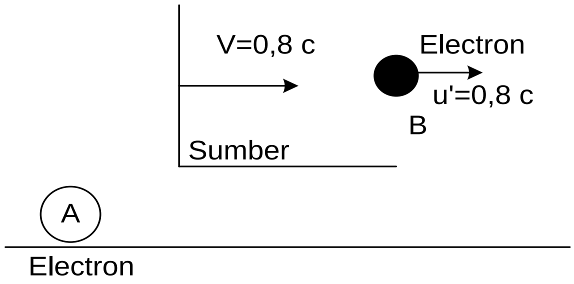
Kita anggap elektron A sebagai acuan secara intuisi kita harapkan kecepatan elektron B relative terhadap A lebih besar dari 0,8 c.

Menurut rumus pertambahan kecepatan Galileo, kecepatan relative electron yang satu terhadap yang lain adalah sama dengan 0,8 + 0,8 = 1,6 c.



Gambar 9.6a

Untuk mengerti ini mari kita permudah permasalahan dengan menggambarkan keadaan pada gambar 9.6 a sebagai berikut Pertama kita anggap electron A sebagi system inersial S (yang diam). Jika electron dianggap sebagai system inersial maka sumber seolah-olah bergerak menjahui electron dengan kecepatan 0,8 c. sumber ini kia anggapseloah-olah sebagi kerangka S'. Elektron B bergerak dengan kecepatan 0,8 c relative terhadap sumber (menjahui sumber) untuk jelasnya lihat gambar9.6 b



Gambar 9.6.b

Dari gambar terlihat bahwa u' = m0,8 c; c= 0,8 c sehingga rumus pertambahan keceaptan Galileo u = v + u' = 1,6 c.

Menurut rumus relativistic kecepatan u (Kecepatan electron B relative terhadap electron A) adalah:

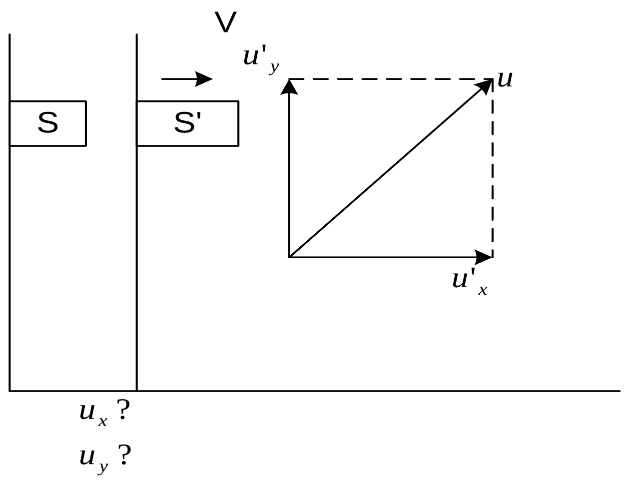
$$u = \frac{u'+v}{1+\frac{u'v}{c^2}}$$

$$= \frac{0{,}8c + 0{,}8c}{1+\frac{0{,}8c+0{,}8c}{c^2}}$$

$$= \frac{1{,}6c}{1{,}64} = 0{,}976c$$

$$= 2{,}93x10^8 \text{ m/s}$$

Selama ini hanya menganggap partikel sejajar dengan arah kecepatan v (arah x-x') Bagaimana jika partikel mempunyai komponen y atau komponen z)



Gambar 9.7

Mari kita bayangkan benda bergerak miring dan mempunyai komponen horizontal dan vertical seperti gb 9.7 Anggap seperti biasa kerangka S x-x'. Dan anggap komponen vertikal dan horizontal dalam kerangka S' adalah u'$_y$ dan u'$_x$' Besar komponen horizontal menurut kerangka S sudah diturunkan yaitu dari rumus (14)

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{u_x' v}{c^2}}$$

Untuk menghitung besar komponen vertikalnya pertama kita bayangkan benda berada pada posisi y_1 dan t_1 dan pada posisi y_2 dan t_2 (menurut pengamat S) adalah:

$$u_y = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

dari tranformasi Lorentz kita tahu bahwa

$$\Delta y = \Delta y'$$

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}\right)$$

Sehingga dapat kita tuliskan,

$$u_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$= \frac{\Delta y}{\gamma\left(\Delta t' + \frac{v \Delta x'}{c^2}\right)}$$

$$= \frac{(\Delta y' \Delta t)\sqrt{1 - v^2 / c^2}}{1 + (v^2 / c^2)(\Delta x + \Delta t')}$$

$$= \frac{u'_y \sqrt{1 - v^2 / c^2}}{1 + (v \;\; / c^2) u'_x} = \frac{u'_y \sqrt{1 - v^2 / c^2}}{1 + (uu'_x / c^2)}$$

untuk u_z kita gunakan argument yang sama kita akan memperoleh;

$$u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - v^2 / c^2}}{1 + (v \;\; / c^2) u'_x}$$

$$= \frac{u'_z \sqrt{1 - v^2 / c^2}}{1 + (uu'_x / c^2)}$$