

# **MODUL VIII**

## **FISIKA MODERN**

### **Transformasi Lorentz**

#### **Tujuan Instruksional Umum :**

- ❖ Agar mahasiswa dapat memahami mengenai Transformasi Lorentz

#### **Tujuan Instruksional Khusus :**

- ❖ Dapat menjelaskan tentang kedua postulat Einstein
- ❖ Dapat menjelaskan tentang perbedaan transformasi Lorentz dan transformasi Galileo.

#### **Buku rujukan :**

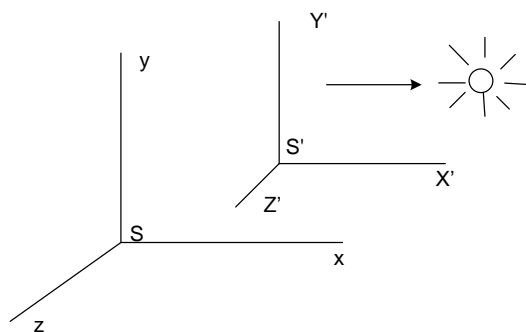
- ❖ Fisika modern            Halliday-Resnick

## Transformasi Lorentz

Sekarang mari kita gunakan kedua postulat Einstein untuk menurunkan persamaan transformasi yang sejenis dengan transformasi Galileo namun berlaku untuk kecepatan yang tinggi sekali. Transformasi ini dinamakan Transformasi Lorentz, Transformasi Lorentz ini akan menjadi transformasi Galileo pada kecepatan rendah (lebih kecil dari kecepatan cahaya) dan dapat menunjukkan bahwa kecepatan cahaya tetap sama pada semua kerangka.

Anggap ada dua inersial dengan satu kerangka dengan kecepatan bergerak kecepatan  $v$  relative terhadap kerangka yang lain ke arah sumbu  $x$ . Kita anggap kerangka  $S$  diam dan kerangka  $S'$  adalah kerangka yang bergerak dengan kecepatan  $v$  relative terhadap kerangka  $S$ .

Anggap suatu peristiwa terjadi pada koordinat ruang waktu  $(x,y,z,t)$  menurut pengamat di  $S$  dan pada koordinat ruang waktu  $(x',y',z',t')$  menurut pengamat di  $S'$ . Agar seluruh koordinat mempunyai dimensi yang sama mari kita kalikan koordinat waktu dengan  $c$  (kecepatan cahaya), sehingga penulisan koordinat peristiwa itu menjadi  $(x,y,z,ct)$  untuk pengamat  $S$  dan  $(x',y',z',ct')$  untuk pengamat di  $S'$ . Penulisan seperti ini sering dinamakan penulisan empat dimensi.



Gambar 8.1

Sekarang mari kita tuliskan  $x'$  sebagai kombinasi dari  $x, y, z$  dan  $ct$

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}ct$$

dengan  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{13}$ , dan  $a_{14}$  adalah konstanta yang harus kita cari.

Mengapa hanya diambil suku yang linier dengan  $x, y, z$  dan  $ct$ ? bagaimana dengan suku  $x^2, y^2, z^2, \dots, dst$ ?

Kita memang tidak memasukkan suku berorde lebih tinggi karena suku berorde lebih tinggi ini akan mengakibatkan terjadinya ke tidak homogenan. Maksudnya adalah sebagai berikut : misalkan hubungan antara  $x$  dan  $x'$  adalah  $x' = a \cdot x_2$  dengan  $a$  adalah konstanta. Anggap anda mempunyai sebatang tongkat yang panjangnya 1 satuan yang ujungnya diletakkan pada koordinat  $x_1=1$  dan  $x_2=2$  . Menurut pengamat di  $S'$  posisi ujung yang satu adalah:  $x'_1 = a1^2 = a$  dan posisi ujung yang lain adalah  $x'_1 = a2^2 = 4a$  sehingga panjang tongkat menurut pengamat di  $S'$  adalah  $x'_2 - x'_1 = 4a - a = 3a$ .

Sekarang jika ujung tongkat diletakkan pada  $x_1=3$  dan  $x_2 = 4$  maka menurut pengamat di  $S'$  panjang tongkat menjadi  $l = x'_2 - x'_1 = ax_2^2 - ax_1^2 = a4^2 - a3^2 = 7a$  .

Ini tidak masuk akal bagaimana mungkin tongkat yang sama diletakkan kerangka inersial yang sama (walupun pada koordinat yang berbeda) akan berubah panjangnya?.

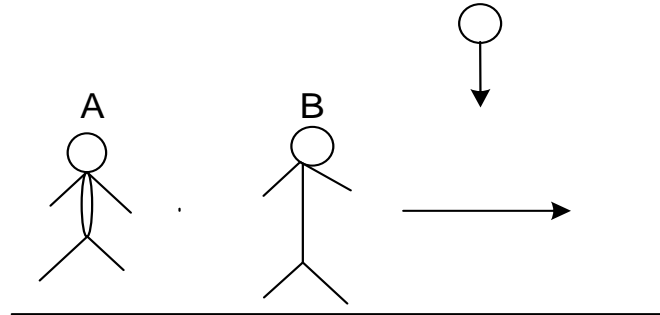
Jadi secara lengkap hubungan antara  $x', y', z'$  dan  $ct'$  dengan  $x, y, z$  dan  $ct$  adalah:

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}ct \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}ct \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}ct \\ ct' &= a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}ct \end{aligned} \dots\dots\dots(1)$$

Sekarang mari kita cari ke 16 koefisien  $a_y$  di atas dengan menggunakan postulat Einstein.

Postulat pertama mengatakan bahwa hukum Fisika sama dalam semua inersial. Dengan postulat ini maka kita boleh mengatakan  $y'=y$  dan  $z'=z$ . untuk mengerti ini mari kita

bayangkan dua orang A dan B mengamati sebuah benda yang jatuh bebas dari ketinggian tertentu  $y_0$  B bergerak dengan kecepatan  $v$  ke arah sumbu  $x$  sedangkan A diam.



Gambar 8.2

Karena A dan B system inersial, maka menurut postulat 1 A dan B akan melihat benda yang jatuh dengan hukum yang sama yaitu rumus  $y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$  Jadi A dan B senantiasa mencatat ketinggian yang sama dengan kata lain  $y = y'$ .

Kondisi  $y=y'$  dan  $z=z'$  akan memberikan

$$a_{22} = a_{32} = 1$$

$$a_{21} = a_{23} = a_{24} = a_{31} = a_{32} = a$$

Dengan demikian persamaan 3 menjadi :

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}ct$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$ct' = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}ct \dots\dots\dots(2)$$

Perhatikan persamaan diatas Jika  $a_{42}$  tidak sama dengan nol maka jam yang diletakkan pada posisi  $y$  dan  $-y$  akan mencatat hasil yang berbeda. Ini tidak logis demikian juga jika koefisien  $a_{43}$  tidak nol maka jam yang diletakkan pada posisi  $z$  dan  $-z$  akan mencatat waktu yang berbeda jadi dapat dituliskan bahwa:

$$a_{42} = 0$$

$$a_{43} = 0$$

Sekarang perhatikan persamaan pertama dari persamaan (2) Ketika system S' bergerak dengan kecepatan v, posisi sebuah titik pada  $x'=0$  setelah waktu t dalam system S adalah  $x= vt$  . Gunakan dua data ini ke persamaan pertama dari persamaan 4 untuk memperoleh ,

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}ct$$

$$0 = a_{11}vx + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}ct$$

$$0 = (a_{11}v + a_{14}c)t + a_{12}y + a_{13}z$$

Karena t, y dan z tidak bergantung maka persamaan diatas kan dipenuhi hanya jika :

$$a_{14}c = -a_{11}v$$

$$a_{12} = a_{13} = 0$$

Dengan demikian kita mempunyai persamaan berikut :

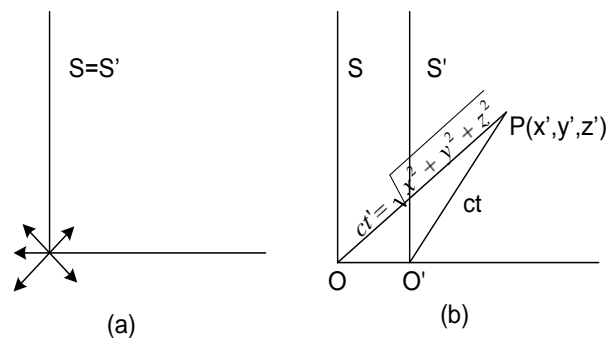
$$x' = a_{11}(x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$ct' = a_{41}x + a_{44}ct \dots\dots\dots(3)$$

Untuk menentukan ketiga koefisien  $a_{11}$ ,  $a_{41}$  dan  $a_{44}$  kita gunakan postulat kedua yang mengatakan bahwa kecepatan cahaya sama pada setiap kerangka inersial.



Gambar 8.3 a-b

Perhatikan gambar 8.3a Pada gambar gelombang elektromagnetik dipancarkan ketika S dan S' berimpit. Gelombang dari titik O' (O) Gelombang ini merambat ke segala arah.

Menurut pengamat S' setelah waktu t' gelombang mencapai titik P(x',y',z') . jika dalam kerangka bergerak ini kecepatan cahaya sama dengan c maka panjang lintasan O'P sama dengan ct'.

$$O'P = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = ct'$$

$$ct'x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2 \dots\dots\dots(4)$$

Pengamat S mencatat gelombang ini mencapai titik P dalam waktu t dan menurut pengamat S posisi titik P adalah (x,y,z). Jika kecepatan cahaya adalah juga sama dengan c pada kerangka ini maka jarak OP menurut pengamat ini sama dengan c.t.

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = ct$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \dots\dots\dots(5)$$

Substitusi persamaan (3) ke persamaan (5) untuk memperoleh,

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2$$

$$a_{11}^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2 = (a_{41}x + a_{44}ct)^2$$

$$(a_{11}^2 - a_{41}^2)x^2 + y^2 + z^2 - 2(va_{11}^2 + ca_{41}a_{44})xt = (a_{44}^2c^2 + v^2a_{11}^2)t^2$$

agar persamaan ini sama dengan persamaan (5) maka

$a_{11}^2 - a_{41}^2 = 1$ $va_{11}^2 + ca_{41}a_{44} = 0$ $a_{44}^2c^2 - v^2a_{11}^2 = c^2$
---

Dari ketiga persamaan di atas kita peroleh

$$a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$a_{41} = -\frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$a_{44} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Dengan demikian kita peroleh rumus transformasi Lorentz

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

Untuk menyederhanakan penulisan di atas kita definisikan

$$\beta = v/c$$

dan

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$x = \gamma(x' + vt')$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \gamma\left(t' - \frac{vx'}{c^2}\right) \dots \dots \dots (6)$$

Bagaimana menyatakan posisi  $x$  dan suku  $x', y', z'$  dan  $t'$ ? Kita boleh mengikuti prosedur di atas atau cukup mengganti tanda aksent menjadi tidak dan sebaliknya serta mengambil kecepatan kerangka menjadi  $-v$ ,

$$\begin{aligned}
 x &= \gamma(x'+vt) \\
 y &= y' \\
 z &= z' \\
 t &= \gamma\left(t' - \frac{vx'}{c^2}\right) \dots \dots \dots (7)
 \end{aligned}$$

Sebelum kita lanjutkan konsekuensi dari Lorentz transformation, mari kita test dulu apakah transformasi yang berdasarkan postulat Einstein ini sesuai dengan transformasi Galileo.

Pada transformasi Galileo kecepatan benda biasanya kecil  $v \ll c$  sehingga suku  $v/c$  dapat diabaikan atau  $\gamma = 1$  pada kondisi ini transformasi Lorentz menjadi :

$$\begin{aligned}
 x &= x'+vt \\
 y &= y' \\
 z &= z' \\
 t &= t' \dots \dots \dots (8)
 \end{aligned}$$

Ternyata pada kecepatan rendah transformasi Lorentz sesuai dengan transformasi Galileo.

**Contoh :**

Seorang pengamat di S mencatat kejadian pada  $x=3$  dan  $t=10s$ . system S' bergerak dengan kecepatan  $0,5 c$  relative terhadap system S searah sumbu X. Tentukan koordinat yang dicatat oleh system pengamat di system S'? bandingkan hasil yang diperoleh dengan transformasi Galileo.

**Penyelesaian :**

Dalam soal ini kecepatan system sangat tinggi sekali karena itu transformasi Galileo tidak berlaku.

Koordinat menurut pengamat di S' dapat dihitung dengan rumus (6) untuk memudahkan kita hitung dulu  $\gamma$



$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0,5c)^2/c^2}} = 1,16$$

Kita tidak perlu menghitung y dan z karena kita boleh anggap ini sama dengan nol

Diketahui :

$$x = 3 \text{ m}$$

$$t = 10^{-8} \text{ s}$$

$$v = 0,5c = 1,5 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Ditanya  $x'$ ?  $t'$ ?

**Jawab :**

$$x' = \gamma(x - vt) = 1,16(3 - 1,5 \times 10^8 \cdot 10^{-8}) = 1,74 \text{ m}$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) = 1,16\left(10^{-8} - \frac{1,5 \times 10^8 \cdot 3}{(3 \times 10^8)^2}\right) = 5,8 \times 10^{-9} \text{ s}$$

Transformasi Galileo ;

$$x' = (x - vt) = (3 - 1,5 \times 10^8 \cdot 10^{-8}) = 1,5$$

$$t' = t = 10^{-8} \text{ s}$$

kita lihat bahwa persamaan transformasi Lorentz yang berlaku untuk semua jenis kecepatan meramalkan hasil yang sangat berbeda dengan apa yang diramalkan oleh transformasi Galileo. Tetapi jika kecepatan cukup rendah maka kedua transformasi Lorentz dan transformasi Galileo tetapi  $v = 90 \text{ km/jam} = 25 \text{ m/s}$ .