MEDAN ELEKTOMAGNETIK

Disusun oleh :

Ir. Jaja Kustija, Msc

DAFTAR ISI

BAB VII MEDAN MAGNET TUNAK (STEADY)

BAB VIII PERSAMAAN POISSON DAN LAPLACE

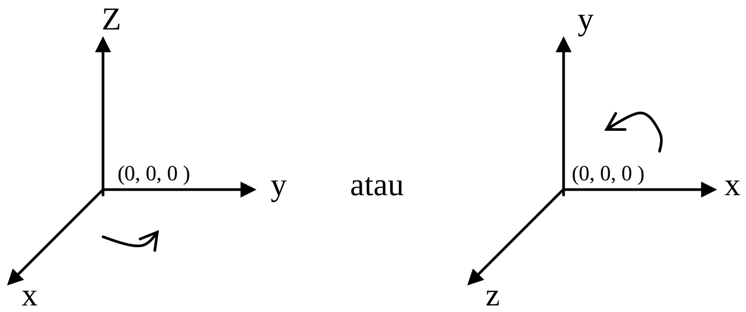
BAB I

SISTEM KOORDINAT

Untuk mengetahui posisi benda dalam dimensi ruang dikenalkan beberapa model sistem koordinat diantaranya adalah **: sistem koordinat kartesian, sistem koordinat silinder dan sistem koordinat bola.**

1.1 Sistem Koordinat Kartesian

Dalam sistem ini dikenal dengan kaidah tangan kanan seperti nampak pada gambar :



Gambar 1. Sistem koordinat kartesian dengan sistem putaran

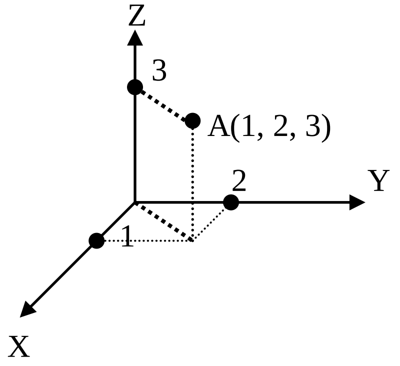
Dari gambar terlihat jika arah sumbu x diputar kearah sumbu y dengan sudut paling kecil akan menghasilkan arah sumbu z yang serupa dengan kaidah tangan kanan dengan dengan ibu jari menggambarkan sumbu z dan arah lipatan keempat jari lainnya merupakan arah putaran dari sumbu x ke sumbu y.

Menggambar letak suatu titik P(x, y, z) langkah-langkahnya sebagai berikut : tentukan titik-titik x, y dan z pada masing-masing sumbu x, sumbu y, dan sumbu z; kemudian buatlah garis melalui x dan y yang masing-masing sejajar dengan sumbu y dan sumbu x, maka diperoleh titik P_1 (x, y) pada bidang x 0 y, juga dapat disajikan sebagai titik P_1 (x, y, 0) yang berarti harga z = 0. Selanjutnya hubungkan titik asal 0 dengan titik P_1, kemudian buatlah garis melalui z yang sejajar dengan garis P_1 dan melalui titik P_1 juga dibuat garis sejajar dengan sumbu z, maka didapat titik P (x, y, z).

Contoh :

Gambarkan posisi titik : A(1, 2, 3)

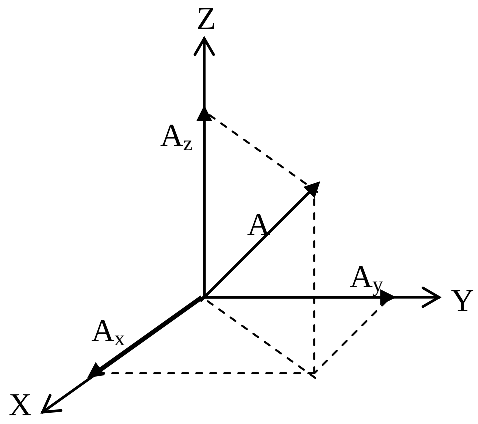
Penyelesaian :



a). Vektor Satuan (Unit Vektor) dalam Koordinat Kartesian

Sebagaimana kita ketahui vektor adalah suatu besaran yang mempunyai harga dan arah. Dalam sistem koordinat kartesian ditulis dalam simbol:

$$\vec{A} = \hat{a}_x A_x + \hat{a}_y A_y + \hat{a}_z A_z$$



Gambar.2 Vektor satuan dalam sistem koordinat

A_x = harga vektor pada sumbu x

A_y = harga vektor pada sumbu y

A_z = harga vektor pada sumbu z

Vektor satuan adalah vektor yang mempunyai harga absolut (panjang) satu, hal itu bisa diperoleh dengan cara membagi vektor itu dengan nilai absolutnya :

$$\hat{a}_A = \frac{\vec{A}}{|A|}$$

$\hat{a}_A$ = vektor satuan dalam arah $\vec{A}$

$\vec{A}$ = vektor A

$|A|$ = nilai (harga absolut)vektor tersebut

$$|A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

dari $\vec{A} = \hat{a}_x A_x + \hat{a}_y A_y + \hat{a}_z A_z$ dan pengertian vektor satuan, dapat kita lihat bahwa $\hat{a}_x, \hat{a}_y, \hat{a}_z$ masing-masing adalah vektor satuan dalam arah sumbu x, sumbu y, sumbu z.

Contoh :

Carilah vektor satuan dari :

$\vec{A} = 3\hat{a}_x + 4\hat{a}_y + 5\hat{a}_z$ yang pangkalnya di titik (0,0,0)

Penyelesaian :

$$|A| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}$$

$$|A| = 5\sqrt{2}$$

$$\hat{a}_A = \frac{3\hat{a}_x + 4\hat{a}_y + 5\hat{a}_z}{5\sqrt{2}} = 0{,}3\sqrt{2}\,\hat{a}_x + 0{,}4\sqrt{2}\,\hat{a}_y + 0{,}5\sqrt{2}\,\hat{a}_z$$

$$|\hat{a}_A| = \sqrt{\left(0{,}3\sqrt{2}\right)^2 + \left(0{,}4\sqrt{2}\right)^2 + \left(0{,}5\sqrt{2}\right)^2} = 1$$

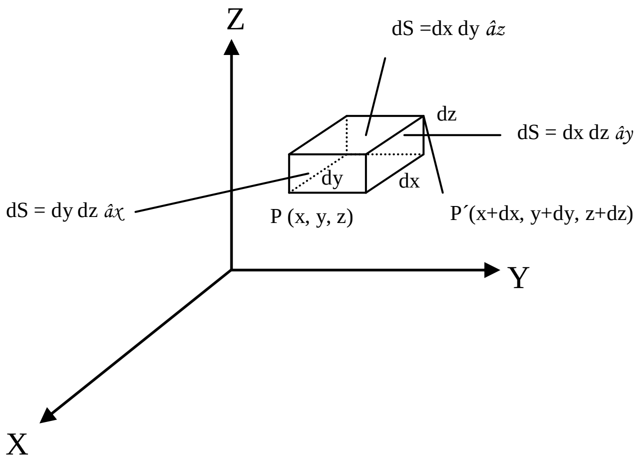
b). Volume Diferensial Elemen-elemen Permukaan dan Garis pada Sistem <u>Koordinat Kartesian</u>

- *Elemen garis (dl)*

  Elemen garis *dl* adalah diagonal yang melalui P, yaitu: $dl = dx\,\hat{a}_x + dy\,\hat{a}_y + dz\,\hat{a}_z$ atau $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

- *Elemen permukaan (ds)*

  Elemen permukaan adalah suatu bagian yang terbentuk dari elemen-elemen garis (dl), yaitu $dS = \pm\, dl_1 \times dl_2$.



Gambar 3. Elemen-elemen permukaan dS dan volume dV

dalam hal ini:

-Permukaan depan : $\pm\, dy\, \hat{a}_y \times dz\, \hat{a}_z = dy\, dz\, \hat{a}_x$

-Permukaan samping : $\pm\, dz\, \hat{a}_z \times dx\, \hat{a}_x = dz\, dx\, \hat{a}_y$

-Permukaan alas : $\pm\, dx\, \hat{a}_x \times dy\, \hat{a}_y = dx\, dy\, \hat{a}_z$

- *Elemen Volume (dV)*

Elemen volume adalah suatu bagian yang terbentuk dari elemen-elemen permukaan (dS), yaitu : $dV = dl_1 \times dl_2 \times dl_3$

Ambil dS permukaan depan yaitu $dS = dy\, dz\, \hat{a}_x$ maka $dV = dx\, dy\, dz$

Demikian pula permukaan-permukaan lain, didapat $dV = dx\, dy\, dz$

Contoh :

Hitunglah $\iiint\limits_B x^2 yz\, dV$, dengan B adalah kotak dengan batas-batas

$B = \{(x, y, z) : 1 \le x \le 2, 0 \le y \le 1, 1 \le z \le 2\}$

Penyelesaian :

$$\iiint\limits_B x^2 yz\, dV = \int_0^2 \int_0^1 \int_1^2 x^2 yz\, dx\, dy\, dz$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^1 \left[\frac{1}{2}z^2\right]_1^2$$

$$= \left[\frac{1}{3}\left(2^3 - 1^3\right)\right]\left[\frac{1}{2}\left(1^2 - 0\right)\right]\left[\frac{1}{2}\left(2^2 - 1^2\right)\right]$$

$$= \left(\frac{7}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)$$

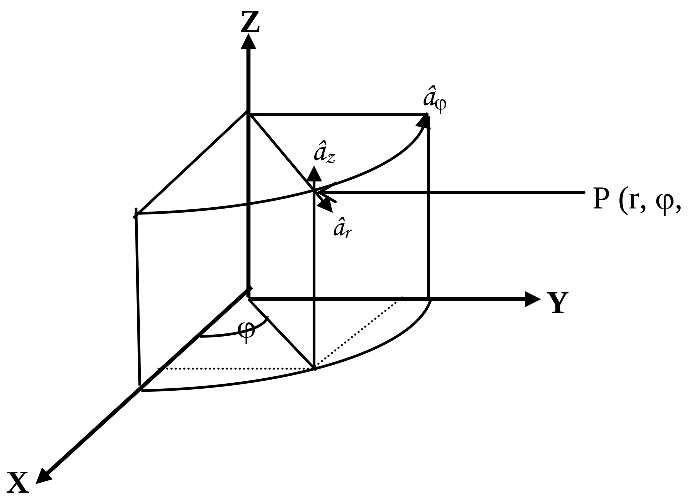
$$= \frac{7}{4}$$

1.2 Sistem Koordinat Silinder (Cylindrical Coordinates)

Suatu permasalahan dalam sistem koordinat akan lebih mudah diselesaikan bila kita mengetahui cara penyelesaiannya dalam sistem koordinat yang sesuai. Berikut ini akan dipaparkan mengenai salah satu koordinat lain setelah koordinat kartesian, yaitu sistem koordinat silinder. Mari kita lihat hubungan antara sistem koordinat silinder dan kartesian.

Jika dalam sistem koordinat kartesian dikenal dengan adanya sumbu x, sumbu y, sumbu z, maka dalam sistem koordinat silinder diperkenalkan variabel-variabel : *r*, φ, dan z. untuk menggambarkan suatu posisi titik. Sebagai contoh, posisi titik A lazimnya ditulis dengan A(*r*, φ,z).

Perhatikan gambar :



Gambar 4. Posisi titik P dalam koordinat silinder

Dengan menggunakan ilmu ukur sudut sederhana dapat dicari hubungan antara (x, y, z) dan (r, φ, z).

X = r cos φ ; Y = r sin φ ; z = z

a). Vektor Satuan Dalam Koordinat Silinder dan Hubungannya Dengan Koordinat Kartesian

Seperti pada sistem koordinat kartesian yang dimaksud vektor satuan yakni vektor yang mempunyai harga absolut sama dengan satu. Dalam sistem koordinat silinder ada tiga komponen vektor satuan yakni :

$$\hat{a}_r = \frac{\vec{r}}{|r|} \;;\quad \hat{a}_\varphi \;;\quad \hat{a}_z$$

$\hat{a}_r$ = vektor satuan pada komponen r (arahnya sesuai dengan arah penambahan harga).

$\hat{a}_\varphi$ = vektor satuan pada komponen φ (arahnya sesuai dengan arah penambahan harga).

$\hat{a}_z$ = vektor satuan pada komponen z (arahnya sesuai dengan arah penambahan harga).

Perhatikan gambar (1), hubungan antara kartesian dan silinder sebagai berikut:

$$\vec{r} = \hat{a}_x r \cos\varphi + \hat{a}_y r \sin\varphi$$

$$\hat{a}_r = \frac{\vec{r}}{|r|} = \hat{a}_x \cos\varphi + \hat{a}_y \sin\varphi$$

Untuk menjelaskan vektor satuan kearah $\hat{a}_\varphi$ atau ditulis $\hat{a}_\varphi$ mempunyai beda fasa sebesar $\frac{\pi}{2}$ dengan arah $\hat{a}_r$ dengan sudut $\hat{a}_\varphi$ > sudut $\hat{a}_r$, sehingga:

$$\hat{a}_\varphi = \hat{a}_x \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \hat{a}_y \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -\hat{a}_x \sin\varphi + \hat{a}_y \cos\varphi$$

Dan arah $\hat{a}_Z$ sama persis dengan $\hat{a}_Z$ pada sistem koordinat kartesian. Secara keseluruhan hubungan vektor satuan pada sistem silinder dan sistem kartesian adalah sebagai berikut :

$$\hat{a}_r = \hat{a}_x \cos\varphi + \hat{a}_y \sin\varphi$$
$$\hat{a}_\varphi = -\hat{a}_x \sin\varphi + \hat{a}_y \cos\varphi$$
$$\hat{a}_z = \hat{a}_z$$

Dapat dituliskan dalam bentuk matrik :

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_r \\ \hat{a}_\varphi \\ \hat{a}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_x \\ \hat{a}_y \\ \hat{a}_z \end{pmatrix}$$

Untuk mendapatkan hubungan balikannya maka kita mesti menggunakan “inverse matrik” dari hubungan diatas.

Perhatikan bahwa harga determinan dari matrik tersebut adalah satu (1) maka inverse matrik diatas sama dengan transposenya.

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_x \\ \hat{a}_y \\ \hat{a}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_r \\ \hat{a}_\varphi \\ \hat{a}_z \end{pmatrix}$$

Matrik-matrik ini sangat diperlukan sekali untuk memahami operator gradien ($\overline{\nabla}$), operator divergensi($\nabla \cdot$) operator curl ($\nabla \times$) dan ada satu lagi bekal yang harus disiapkan adalah pemanfaatan teorema turunan parsial. Disini akan dibahas secara sekilas misalnya *r* (x, y, z), artinya *r* merupakan fungsi x, y, z maka diferensial terhadap r didefinisikan sebagai berikut :

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z}$$

Begitu pula φ (x, y, z)

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial z}$$

Dan z (x, y, z)

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}$$

Terapkan turunan parsial ini pada

X= r cos φ ;   Y = r sin φ ;   Z= z

1. $\dfrac{\partial}{\partial r} = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\cos\varphi) + \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\sin\varphi) + \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial}{\partial r}(z)$

$$= \cos\varphi\,\frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial y} + 0$$

$$= \cos\varphi\,\frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial y}$$

2. $\dfrac{\partial}{\partial \varphi} = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial \varphi}(r\cos\varphi) + \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial \varphi}(r\sin\varphi) + \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial}{\partial \varphi}(z)$

$$= -\sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial x} + \cos\varphi\,\frac{\partial}{\partial y} + 0$$

$$= -r\sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\varphi\,\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} = -\sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial x} + \cos\varphi\,\frac{\partial}{\partial y}$$

3. $\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial z}(r\cos\varphi) + \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial z}(r\sin\varphi) + \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial}{\partial z}(z)$

$$= 0 + 0 + \frac{\partial}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}$$

Maka dapat ditulis dalam bentuk matrik:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Dengan cara inverse matrik seperti ; inverse matrik sebelumnya:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

***Contoh* :**

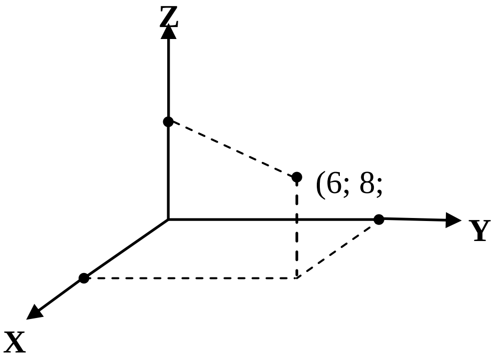
Tentukan posisi titik koordinat kartesius dari titik A (10; 53,13°; 5) dan posisi titik koordinat tabung dari titik B (-5, -5, 2).

Penyelesaian :

a) Menentukan posisi titik A (kartesius) dari titik A (10; 53,13°; 5).

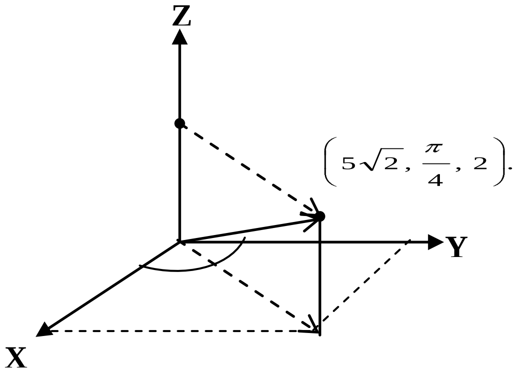
$$X = r\cos\varphi$$
$$= 10\cos 53{,}13^\circ$$
$$= 6$$
$$Y = r\sin\varphi$$
$$= 10\sin 53{,}13^\circ$$
$$= 8$$

Jadi, titik koordinat cartesius dari (10; 53,13°; 5) adalah (6; 8; 5)



Menentukan posisi titik B (tabung) dari titik B (-5, -5, 2)

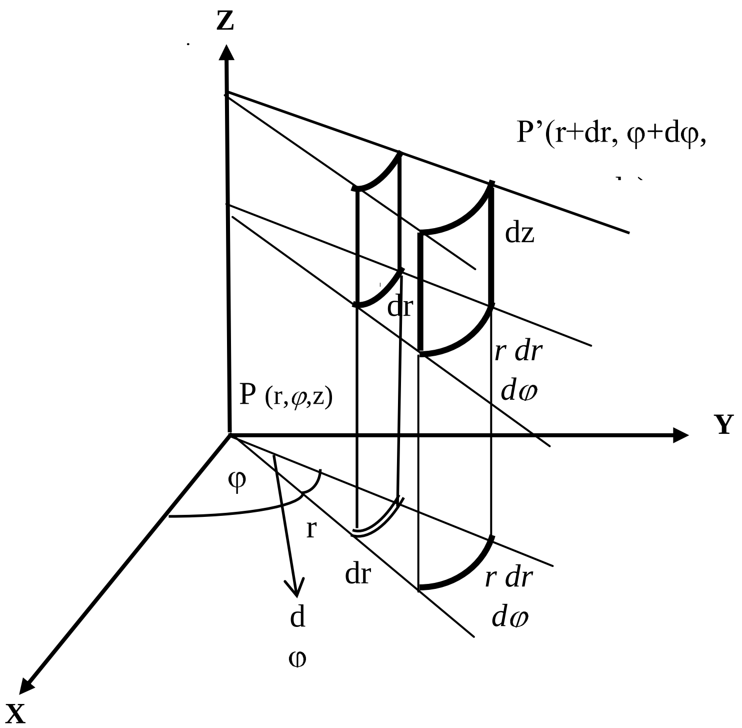
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$= \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2}$$
$$= \sqrt{50}$$
$$= 5\sqrt{2}$$



$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$= \frac{-5}{-5}$$
$$= 1$$
$$\theta = inv\ \tan\theta$$
$$= inv\ \tan(1)$$
$$= 45^\circ$$

Jadi, titik koordinat B adalah $\left(5\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, 2\right)$.

b). Volume Diferensial, Elemen-Elemen Permukaan dan Elemen Garis Dalam Koordinat Silinder



Gambar 5. Elemen Volume (dV) dalam koordinat silinder

- *Elemen garis (dl)*

  $dl = dr\ \hat{a}_r + r\ d\varphi\ \hat{a}_\varphi + dz\ \hat{a}_Z$

  $dl^2 = dr^2 + r^2\, d\varphi^2 + dz^2$

- *Elemen-elemen permukaan (dS)*

  Selimut : $\pm\, r\ d\varphi \times dz\ \hat{a}_r = \pm r\ d\varphi\ dz\ \hat{a}_r$

  Atas : $\pm\, dr\ \hat{a}_r \times \mathrm{r}\ d\varphi\ \hat{a}_\varphi = \pm r\ dr\ d\varphi\ \hat{a}_z$

  Bawah : $\pm\, dr\ \hat{a}_r \times r\ d\varphi\ \hat{a}_\varphi = \pm r\ dr\ d\varphi\ \hat{a}_z$

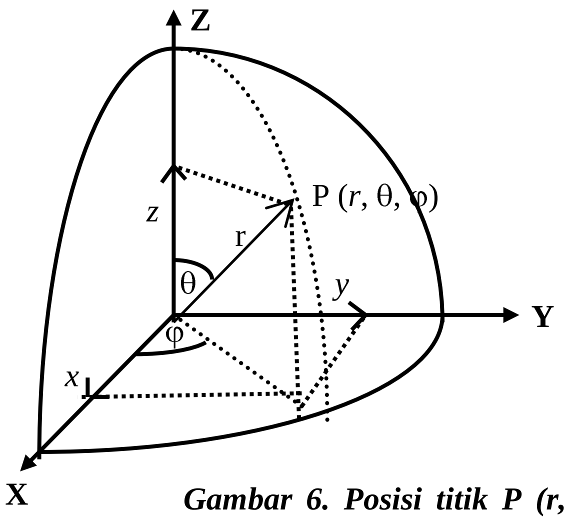
- *Elemen volume diferensial (dV)*

  $dV = (dr)(\ r\ d\varphi)(dz)$

  $dV = r\ dr\ d\varphi\ dz$

1.3 Sistem Koordinat Bola (Spherical coordinates)

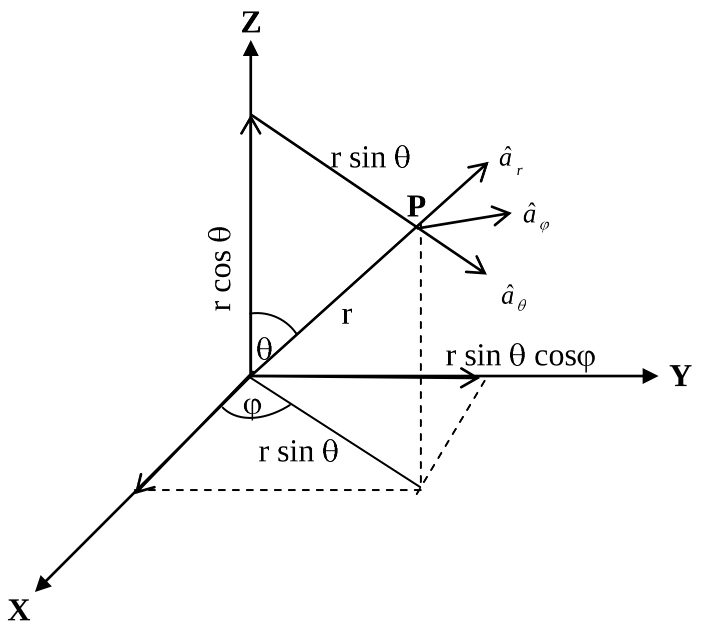
Sistem koordinat bola mempunyai variabel-variabel r, θ, φ . untuk menentukan posisi titik P dalam koordinat bola adalah seperti dalam gambar :



x = r sinθ cosφ
y = r sinθ sinφ
z = r cosθ

Gambar 6. Posisi titik P (r, θ, φ) dalam sistem

a). Vektor Satuan Pada Sistem Koordinat Bola dan Hubungangya Dengan Vektor Satuan pada Sistem Koordinat Kartesian.



Dari gambar x = r sin θ cos φ ; y = r sin θ sin φ ; z = r cos θ

$$\vec{r} = \hat{a}_x x + \hat{a}_y y + \hat{a}_z z$$

$$\vec{r} = \hat{a}_x r \sin\theta \cos\varphi + \hat{a}_y r \sin\theta \sin\varphi + \hat{a}_z r \cos\theta$$

$$\hat{a}_r = \frac{\vec{r}}{|r|} = \hat{a}_x \sin\theta \cos\varphi + \hat{a}_y \sin\theta \sin\varphi + \hat{a}_z \cos\theta.$$

Perhatikan gambar vector satuan $\hat{a}_r$ dan $\hat{a}_\theta$. $\hat{a}_\theta$ mempunyai sudut □ mendahului $\frac{\pi}{2}$ dari $\hat{a}_r$ sehingga $\hat{a}_\theta$ menjadi :

$$\begin{aligned}\hat{a}_\theta &= \hat{a}_x \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\cos\varphi + \hat{a}_y \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\sin\varphi + \hat{a}_z \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \hat{a}_x \cos\theta\cos\varphi + \hat{a}_y \cos\theta\sin\varphi - \hat{a}_z \sin\theta\end{aligned}$$

dan arah $\hat{a}_\varphi$, mempunyai $\theta = \frac{\pi}{2}$ dan sudut φ untuk $\hat{a}_\varphi$ mendahului $\frac{\pi}{2}$ terhadap $\hat{a}_r$, sehingga $\hat{a}_\varphi$ menjadi :

$$\begin{aligned}\hat{a}_\varphi &= \hat{a}_x \sin\frac{\pi}{2}\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \hat{a}_y \sin\frac{\pi}{2}\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \hat{a}_z \cos\frac{\pi}{2} \\ &= -\hat{a}_x \sin\varphi + \hat{a}_y \cos\varphi + 0\end{aligned}$$

Di tulis dalam hubungan matriks sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix}\hat{a}_r \\ \hat{a}_\theta \\ \hat{a}_\varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{a}_x \\ \hat{a}_y \\ \hat{a}_z\end{pmatrix}$$

matrik transpose :

$$\begin{pmatrix}\hat{a}_x \\ \hat{a}_y \\ \hat{a}_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{a}_r \\ \hat{a}_\theta \\ \hat{a}_\varphi\end{pmatrix}$$

Terapkan aturan diferensial Parsial pada system koordinat Bola

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} &= \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial z}\end{aligned}$$

dimana $x = r \sin \theta . \cos \varphi$; $y = r \sin \theta . \sin \varphi .$; $z = r \cos \theta$ maka :

$$\frac{\partial}{\partial r} = \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = r\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} - r\sin\theta\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} = \cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} - \sin\theta\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = -r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x} + r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial y} + 0$$

$$\text{atau}\quad \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} = -\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \cos\varphi\frac{\partial}{\partial y} + 0$$

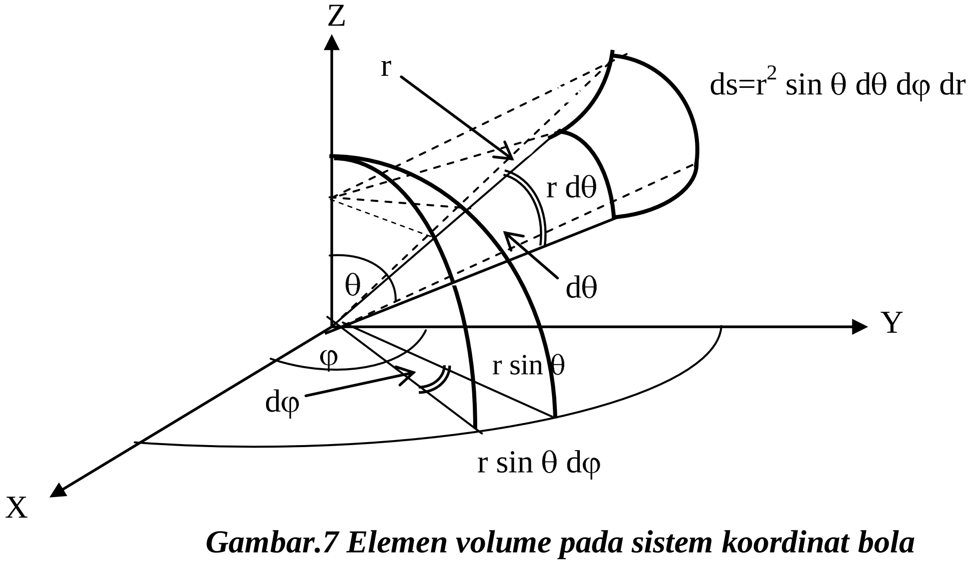
Dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

dengan inverse matriks = transpose (karena determinan = 1) maka

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\varphi & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

b). Volume Diferensial, Elemen-Elemen Permukaan pada Koordinat Bola



Gambar.7 Elemen volume pada sistem koordinat bola

- *Elemen garis diferensial* :

$$dl = dr\ \hat{a}_r + r\ d\theta\ \hat{a}_\theta + r\sin\theta\ d\varphi\ \hat{a}_\varphi$$

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\ d\varphi^2$$

- *Elemen-elemen permukaan diferensial sebagai pasangan elemen-elemen garis*:

$$\pm r\ d\theta\ \hat{a}_\theta \times r\sin\theta\ d\varphi\ \hat{a}_\varphi = \pm r^2\sin\theta\ d\theta\ d\varphi\ \hat{a}_r$$

$$\pm r\sin\theta\ d\varphi\ \hat{a}_\varphi \times dr\ \hat{a}_r = \pm r\sin\theta\ d\varphi\ dr\ \hat{a}_\theta$$

$$\pm dr\ \hat{a}_r \times r\ d\theta\ \hat{a}_\theta = \pm r\ dr\ d\theta\ \hat{a}_\varphi$$

- *Volume diferensial*

$$dV = (dr)(r\ d\theta)(r\sin\theta\ d\varphi)$$

$$dV = r^2\sin\theta\ dr\ d\theta\ d\varphi$$

Contoh:

1. Buktikan bahwa volume bola adalah $V = \frac{4}{3}\pi\ r^3$ dengan batas-batasnya adalah $0 \le r \le r$; $0 \le \theta \le \pi$; $0 \le \varphi \le 2\pi$

   Penyelesaian :

$$dV = r^2\sin\theta\ dr\ d\varphi\ d\theta$$

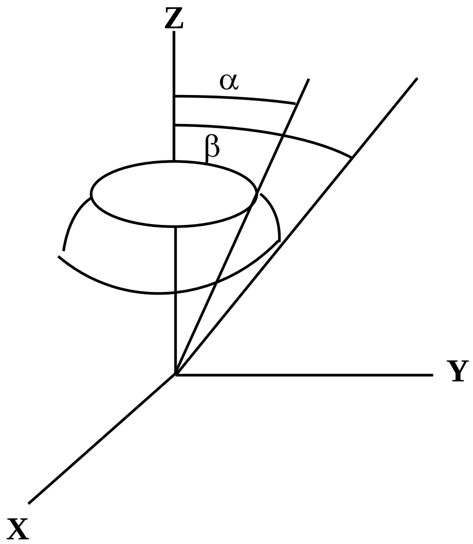
$$V = \int_{r=0}^{r}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2\sin\theta\ dr\ d\varphi\ d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^r \left[-\cos\theta\right]_0^\pi \left[\varphi\right]_0^{2\pi}$$

$$= \left(\frac{1}{3}r^3\right)(2)(2\pi)$$

$$= \frac{4}{3}\pi\ r^3$$

2. Gunakan sistem koordinat bola untuk menetapkan luas jalur $\alpha \leq \theta \leq \beta$ pada permukaan bola dengan jari-jari a (gambar dibawah) dan dengan batas-batasnya $0 \leq r \leq a$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$; $\alpha \leq \theta \leq \beta$. Apa hasilnya bila $\alpha = 0$, dan $\beta=\pi$?



Penyelesaian :

$dS = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$, maka

$$A = \int_0^{2\pi}\int_\alpha^\beta a^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= 2\pi a^2 (\cos\alpha - \cos\beta)$$

Kalau $\alpha = 0$ dan $\beta = \pi$, $A = 4\pi a^2$ yakni seluruh permukaan bola itu.

Soal-Soal Latihan dan Penyelesaiannya

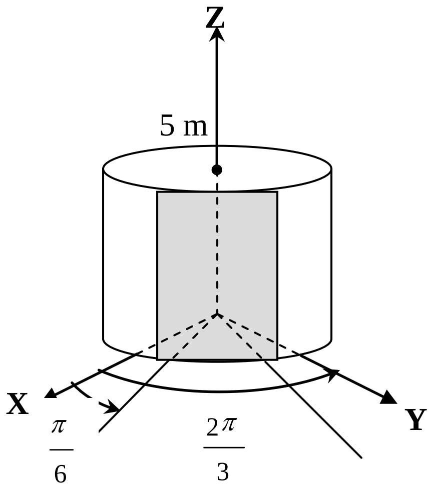
1. Tentukan vektor A dari posisi (2, -4, 1) sampai (0, -2, 0) pada sistem koordinat kartesian dan tentukan pula vektor satuannya.

   Kunci Jawaban :

   $$A = -2\hat{a}_x + 2\hat{a}_y - \hat{a}_z$$

   $$a_A = \frac{-2}{3}\hat{a}_x + \frac{2}{3}\hat{a}_y - \frac{1}{3}\hat{a}_z$$

2. Gunakan sistem koordinat silinder untuk menentukan luas daerah yang diarsir dari gambar silinder dibawah ini dengan r = 2 m, h = 5 m dan $\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{3}$



   Kunci Jawaban :

   $A = 5\pi \; (m^2)$

3. Tentukan sudut antara $A = 10\hat{a}_y - 2\hat{a}_z$ dan $B = -4\hat{a}_y + 0{,}5\hat{a}_z$ dengan menggunakan dot product dan cross product.

   Kunci Jawaban :

   $$\theta = 161{,}5^\circ$$

4. Tentukan sudut antara $A = 5{,}8\hat{a}_y + 1{,}55\hat{a}_z$ dan $B = -6{,}93\hat{a}_y + 4\hat{a}_z$ dengan menggunakan dot product dan cross product.

   Kunci Jawaban :

   $$\theta = 135^\circ$$

5. Tentukan volume sebuah bola menggunakan sistem koordinat bola dengan batas-batas $1 \leq r \leq 2 \;\; m,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \;\; dan \;\; 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

   Kunci Jawaban :

   $$V = \frac{7}{6}\pi \; (m^3)$$

6. Diketahui $A = 2\hat{a}_x + 4\hat{a}_y - 3\hat{a}_z$ dan $B = \hat{a}_x - \hat{a}_y$, tentukan $A \cdot B$ dan $A \times B$.

   Kunci Jawaban :

   $A \cdot B = -2$

   $A \times B = -3\hat{a}_x - 3\hat{a}_y - 6\hat{a}_z$

7. Tentukan jarak antara $\left(2, \frac{\pi}{6}, 0\right)$ m dan $(1, \pi, 2)$ m dengan sistem koordinat silinder.

   Kunci Jawaban :

   $d = 3{,}53 \ (m)$

8. Gunakan sistem koordinat bola untuk menentukan luas permukaan bola dengan batas $0 \le \varphi \le \alpha$ dan jarak a meter. Berapakah hasilnya jika $\alpha = 2\pi$.

   Kunci Jawaban :

   $A = 2\alpha a^2 \ (m^2)$

   $jika \ \alpha = 2\pi \ , \ maka \ :$

   $A = 4\pi a^2 \ (m^2)$

9. Transformasikan vektor $A = A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z$ ke dalam bentuk sistem koordinat silinder.

   Kunci Jawaban :

   $A = (A_z \cos\varphi + A_y \sin\varphi)\hat{a}_r + (A_x \sin\varphi + A_y \cos\varphi)\hat{a}_\varphi + A_z\hat{a}_z$.

10. Transformasikan vektor $F = r^{-1}\hat{a}_r$ pada sistem koordinat bola ke dalam sistem koordinat kartesian.

    Kunci Jawaban :

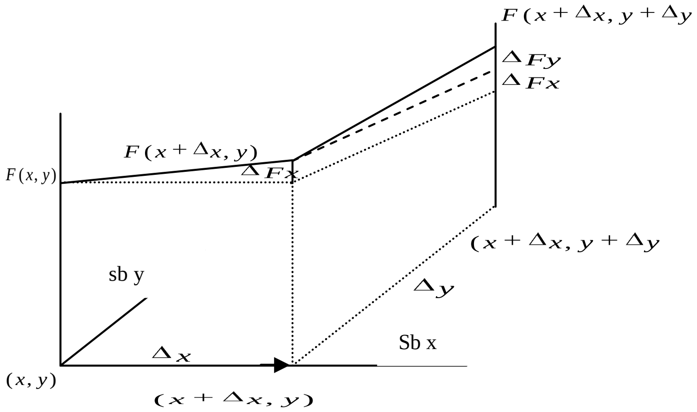
    $$F = \frac{x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

BAB II

TURUNAN BERARAH (GRADIEN) DAN DIVERGENSI

2.1 Turunan berarah (gradien)

Kita perhatikan fungsi dua variabel *f*(x,y) turunan parsial f_x (x,y) dan f_y (x,y) mengukur laju perubahan (kemiringan garis singgung) pada arah sejajar sumbu x dan y, sasaran kita sekarang dalah mempelajari laju perubahan *f* pada sembarang arah menuju konsep turunan berarah yang kemudian menjelaskan makna gradien.



$$
\begin{aligned}
\Delta F &= \Delta F_x + \Delta F_y \\
&= \left[F(x+\Delta x, y) - F(x, y)\right] + \left[F(x, y+\Delta y) - F(x, y)\right] \\
&= \left\{\frac{F(x+\Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x}\cdot \Delta x\right\} + \left\{\frac{F(x, y+\Delta y) - F(x, y)}{\Delta y}\cdot \Delta y\right\}
\end{aligned}
$$

untuk Δx dan Δy menuju nol

$$
\begin{aligned}
\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta F &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x}\cdot \Delta x + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x+\Delta x, y)}{\Delta y}\cdot \Delta y \\
&= \frac{\partial F}{\partial x}\cdot \partial x + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot \partial y \\
&= \left[\frac{\partial F}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial F}{\partial y}\hat{a}_y\right]\cdot \left[\hat{a}_x dx + \hat{a}_y dy\right] \\
dF &= \left[\hat{a}_x \frac{\partial F}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial F}{\partial y}\right]\cdot \left[\hat{a}_x dx + \hat{a}_y dy\right]
\end{aligned}
$$

$$\vec{d}F = \left[\hat{a}x \frac{\partial F}{\partial x} + \hat{a}y \frac{\partial F}{\partial F} \right] . \vec{d}\ell$$

$$\frac{\vec{d}F}{d\ell} = \hat{a}x \frac{dF}{\partial x} + \hat{a}y \frac{\partial F}{\partial y}$$

$$\frac{\vec{d}F}{d\ell} \quad \textit{disebut} \quad \textit{gradien}$$

Keterangan :

$\hat{a}_x \frac{\partial F}{\partial x} =$ turunan parsial F terhadap x dengan y konstan pada arah sb. X

$\hat{a}_y \frac{\partial F}{\partial y} =$ turunan parsial F terhadap y dengan x konstan pada arah sb. Y

$$\nabla = \hat{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial}{\partial y}$$

∇ dinamakan operator gradien dibaca DEL atau NABLA

A. Untuk koordinat kartesian

$$\nabla = \hat{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Contoh :

Diketahui :

Untuk sistem koordinat kartesian

$$\nabla = \hat{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$E = -\nabla V$$

$$V = k \frac{Q}{r}$$

$$r = \left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^{1/2}$$

Tentukan E ?

Penyelesaian :

$$
\begin{aligned}
E &= -\nabla k \frac{Q}{r} \\
&= -\left[\hat{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z}\right] \frac{kQ}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{1}{2}}} \\
&= -KQ\left[-\hat{a}_x \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x - \hat{a}_y \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2y - \hat{a}_z \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2z\right] \\
&= KQ\left[\frac{\hat{a}_x x + \hat{a}_y y + \hat{a}_z z}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right] \\
&= kQ\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) \\
E &= \frac{kQ\vec{r}}{r^3}
\end{aligned}
$$

Makna fisis dari operator ∇ adalah perubahan terdekat dari fungsi F ke segala arah (operator deferensial vektor).

B. Untuk koordinat silinder

$$
\begin{pmatrix} \hat{a}_x \\ \hat{a}_y \\ \hat{a}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_r \\ \hat{a}_\varphi \\ \hat{a}_z \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}
$$

$$
\nabla = \hat{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla &= (\hat{a}_r \cos\varphi - \hat{a}_\varphi \sin\varphi)\left(\cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} - \sin\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) + \\
&\quad \left(\hat{a}_r \sin\varphi + \hat{a}_\varphi \cos\varphi\right)\left(\cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} - \sin\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \\
&= \hat{a}_r \cos^2\varphi \frac{\partial}{\partial r} - \hat{a}_r \sin\varphi \cos\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} - \hat{a}_\varphi \sin\varphi \cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} +
\end{aligned}
$$

$$\hat{a}_\varphi \sin^2\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \hat{a}_r \sin\varphi\cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} - \hat{a}_r \sin^2\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \hat{a}_\varphi \cos^2\varphi \frac{\partial}{\partial r} -$$

$$\hat{a}_\varphi \sin\varphi\cos\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$= \hat{a}_r (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\frac{\partial}{\partial r} + \hat{a}_\varphi (\sin^2 + \cos^2\varphi)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla = \hat{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{a}_\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Operator gradien untuk koordinat silinder :

$$\nabla = \hat{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{a}_\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Contoh :

Diketahui : $V = 10 z \sin\varphi$

Tentukan E ?

Penyelesaian :

$$E = -\nabla V$$

$$E = -\left[\hat{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\hat{a}_\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi} + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z}\right](10 z \sin\varphi)$$

$$E = -\left[\hat{a}_r \frac{\partial(10 z \sin\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r}\hat{a}_\varphi \frac{\partial(10 z \sin\varphi)}{\partial\varphi} + \hat{a}_z \frac{\partial(10 z \sin\varphi)}{\partial z}\right]$$

$$E = -\left[0 + \frac{10 z}{r}\cos\varphi\ \hat{a}_\varphi + 0\right]$$

$$E = -\frac{10 z}{r}\cos\varphi\ \hat{a}_\varphi$$

C) **Untuk koordinat bola**

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_x \\ \hat{a}_y \\ \hat{a}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_r \\ \hat{a}_\theta \\ \hat{a}_\varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta} \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi} \end{pmatrix}$$

$$\nabla = \hat{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\begin{aligned} \nabla = {} & (\hat{a}_r \sin\theta\cos\varphi + \hat{a}_\theta \cos\theta\cos\varphi - \hat{a}_\varphi \sin\varphi) \\ & \left(\sin\theta\cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\cos\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) + \\ & (\hat{a}_r \sin\theta\sin\varphi + \hat{a}_\theta \cos\theta\sin\varphi + \hat{a}_\varphi \cos\varphi) \\ & \left(\sin\theta\sin\varphi \frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\sin\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \cos\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) + \\ & (\hat{a}_r \cos\theta - \hat{a}_\theta \sin\theta)\left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \sin\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \end{aligned}$$

$$= \left(\hat{a}_r \sin^2\theta \cos^2\varphi \frac{\partial}{\partial r} + \hat{a}_r \sin\theta \cos^2\varphi \cos\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \hat{a}_r \sin\theta \cos\varphi \sin\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \right) +$$

$$\left(\hat{a}_\theta \cos\theta \cos^2\varphi \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \hat{a}_\theta \cos^2\theta \cos^2\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \hat{a}_\theta \cos\theta \cos\varphi \sin\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \right) -$$

$$\left(\hat{a}_\varphi \sin\varphi \sin\theta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} + \hat{a}_\varphi \sin\varphi \cos\theta \cos\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \hat{a}_\varphi \sin^2\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \right) +$$

$$\left(\hat{a}_r \sin^2\theta \sin^2\varphi \frac{\partial}{\partial r} + \hat{a}_r \sin\theta \sin^2\varphi \cos\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \hat{a}_r \sin\theta \sin\varphi \cos\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \right) +$$

$$\left(\hat{a}_\theta \cos\theta \sin^2\varphi \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \hat{a}_\theta \cos^2\theta \sin^2\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \hat{a}_\theta \cos\theta \sin\varphi \cos\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \right) -$$

$$\left(\hat{a}_\varphi \cos\varphi \sin\theta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial r} + \hat{a}_\varphi \cos\varphi \cos\theta \sin\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \hat{a}_\varphi \cos^2\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \right) +$$

$$\left(\hat{a}_r \cos^2\theta \frac{\partial}{\partial r} - \hat{a}_r \cos\theta \sin\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} \right) - \left(\hat{a}_\theta \sin\theta \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \hat{a}_\theta \sin^2\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} \right)$$

$$= \left(\hat{a}_r \sin^2\theta \left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi \right) + \cos^2\theta \frac{\partial}{\partial r} + 0 + 0 \right) +$$

$$\left(\hat{a}_\theta \cos^2\theta \left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi \right) + \sin^2\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} \right) +$$

$$\left(\hat{a}_\varphi \sin^2\theta + \cos^2\theta \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} \right)$$

$$= \left(\hat{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{a}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{a}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} \right)$$

operator gradien untuk sistem koordinat bola adalah :

$$\nabla = \hat{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{a}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{a}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

Contoh :

Diketahui :

$$E = -\nabla V$$

$$V = k\frac{Q}{r}$$

$$\nabla = \hat{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{a}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{a}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

Tentukan E ?

Penyelesaian :

$$E = -\nabla k \frac{Q}{r}$$

$$E = -\left(\hat{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{a}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{a}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) k \frac{Q}{r}$$

$$E = -\left[\hat{a}_r \left(-r^{-2} \right) + 0 + 0 \right] kQ$$

$$E = \frac{kQ}{r^2} \hat{a}_r \quad \dim ana \quad \Rightarrow \quad \hat{ar} = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$E = \frac{kQ\vec{r}}{r^3}$$

2.2 DIVERGENSI DAN MAKNA FISISNYA

Operator lain yang penting yang pada dasarnya merupakan turunan adalah operator divergensi. Divergensi suatu vektor didefinisikan sebagai berikut :

Divergensi suatu vektor adalah linit integral permukaan per satuan volum kalau volum yang terlingkupi oleh permukaan tersebut mendekati nol.

Lambang dari divergensi adalah $\nabla \cdot$ (dot product) dari $\vec{V}$ dengan satu vektor.

Arti fisisnya adalah mencari nilai fluks tiap satu satuan volume :

$$\frac{(\,jumlah \;\; keluaran \times luas \;\; permukaan - jumlah \;\; masukan \times luas \;\; permukaan}{volume}$$

Secara matematik operator divergensi didefinisikan sebagai :

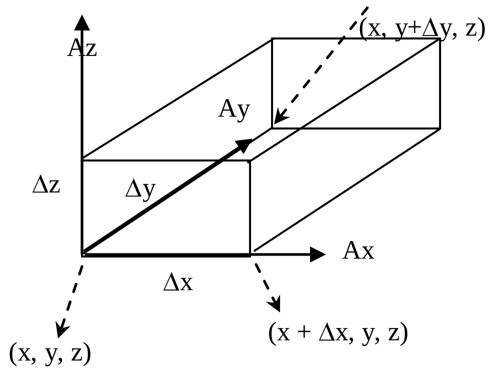
$$\nabla \cdot A = \left(\hat{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\hat{a}_x A_x + \hat{a}_y A_y + \hat{a}_z A_z \right)$$

Untuk sembarang vektor $\vec{A}$

$$\nabla \cdot A = \frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y + \frac{\partial}{\partial z} A_z$$

a). OPERATOR DIVERGENSI PADA SISTEM KOORDINAT KARTESIAN

Jika vektor A mempunyai komponen pada sb. X : A_x; pada sb. Y : A_y dan pada sb. Z :A_z melewati suatu ruang seperti pada gambar sebagai berikut :



$$\nabla \cdot A = \frac{\sum \left(keluaran \times Luas \;\; Penampang - masukan \times Luas \;\; Penampang \right)}{volume}$$

dimana elemen volume = $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$

$$\nabla \cdot A \lim_{\Delta v \to 0} = \left[\frac{A_x(x + \Delta x, y, z)\Delta y \Delta z - A_x(x, y, z)\Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} + \frac{A_y(x, y + \Delta y, z)\Delta x \Delta z - A_y(x, y, z)\Delta x \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} + \frac{A_z(x, y, z + \Delta z)\Delta x \Delta y - A_z(x, y, z)\Delta x \Delta y}{\Delta x \Delta y \Delta z} \right]$$

$$= \left[\frac{A_x(x + \Delta x, y, z) - A_x(x, y, z)}{\Delta x} + \frac{A_y(x, y + \Delta y, z) - A_y(x, y, z)}{\Delta y} + \frac{A_z(x, y, z + \Delta z) - A_z(x, y, z)}{\Delta z} \right]$$

$$\nabla \cdot A \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \\ \Delta z \to 0}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A_x(x + \Delta x, y, z) - A_x(x, y, z)}{\Delta x} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{A_y(x, y + \Delta y, z) - A_y(x, y, z)}{\Delta y} + \lim_{\Delta z \to 0} \frac{A_z(x, y, z + \Delta z) - A_z(x, y, z)}{\Delta z}$$

$$\nabla \cdot A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

operator divergensi pada sistem koordinat kartesian :

$$\boxed{\nabla \cdot A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

dengan demikian terbukti bahwa :

$$\nabla \cdot A = \frac{nilai \;\; keluaran \times Luas \;\; Permukaan - nilai \;\; masukan \times Luas \;\; Permukaan}{volume}$$

$\nabla \cdot B = Kerapa\tan\ fluks\ magnet$

$\nabla \cdot D = Kerapa\tan\ fluks\ listrik$

Untuk mendapatkan operator divergensi pada sistem koordinat lain maka operator ∇ di dot kan (perkalian skalar) dengan vektor yang akan dicari kerapatannya.

Contoh

1. Diketahui : $A = x^2\ \hat{a}_x + yz\ \hat{a}_y + xy\ \hat{a}_z$

   Tentukan $\nabla .A$?

   Penyelesaian :

   $$\nabla .A = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(yz\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(xy\right) = 2x + z$$

2. Diketahui **:** $D = 10\,x\hat{a}_x + 200\ y^2\hat{a}_y$

   Tentukan : $\nabla \cdot D$ dititik (1,2,3)

   Penyelesaian :

   $$\nabla \cdot D = \frac{\partial\ Ax}{\partial y} + \frac{\partial\ Ay}{\partial y} + \frac{\partial\ Az}{\partial z}$$

   $$\nabla \cdot D = \frac{\partial\left(10\ x\right)}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial\left(200\ y^2\right)}{\partial y}\hat{a}_y$$

   $$\nabla \cdot D = 10\ \hat{a}_x + 400\ y\ \hat{a}_y$$

   $\nabla \cdot D$ dititik (1,2,3) adalah $\nabla \cdot D = 10 + 400 \cdot \left(2\right) = 810$

3. Diketahui **:** $A = 10\,e^{2x}\hat{a}_x + 5\,y^2\hat{a}_y + 10\cos\,4z\hat{a}_z$

   Tentukan $\nabla \cdot D$ dititik (1,2,0)

   Penyelesaian :

   $$\nabla \cdot A = \frac{\partial Ax}{\partial x} + \frac{\partial Ay}{dy} + \frac{\partial Az}{\partial z}$$

   $$\nabla \cdot A = \frac{\partial\left(10\ e^{2x}\right)}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial\left(5y^2\right)}{dy}\hat{a}_y + \frac{\partial\left(10\cos\ 4z\right)}{\partial z}\hat{a}_z$$

   $$\nabla \cdot A = 20\,e^{2x}\ \hat{a}_x + 10\ y\ \hat{a}_y - 40\ \sin\ 4z\ \hat{a}_z$$

   $\nabla \cdot A$ dititik (1,2,0) adalah

   $$\nabla \cdot A = 20\,e^2 + 20$$

b) OPERATOR DIVERGENSI PADA SISTEM KOORDINAT SELINDER

Operator divergensi juga digunakan pada sistem koordinat silinder, sebagai berikut :

$$\nabla . A = \left(\hat{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{a}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\hat{a}_r A_r + \hat{a}_\varphi A_\varphi + \hat{a}_z A_z \right)$$

Dari pembahasan sebelumnya

$$\hat{a}_r = \hat{a}_x \cos\varphi + \hat{a}_y \sin\varphi$$

$$\hat{a}_\varphi = -\hat{a}_x \sin\varphi + \hat{a}_y \cos\varphi$$

$$\hat{a}_z = \hat{a}_z$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \hat{a}_r = \frac{\partial}{\partial r} \left(\hat{a}_x \cos\varphi + \hat{a}_y \sin\varphi \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \hat{a}_r = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{a}_r = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\hat{a}_x \cos\varphi + \hat{a}_y \sin\varphi \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{a}_r = \hat{a}_\varphi$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{a}_\varphi = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(-\hat{a}_x \sin\varphi + \hat{a}_y \cos\varphi \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{a}_\varphi = -\hat{a}_x \cos\varphi - \hat{a}_y \sin\varphi$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{a}_\varphi = -\hat{a}_r$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \hat{a}_z = \hat{a}_z$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \hat{a}_z = 0$$

Oleh karena itu diferensial parsial dari unit vektor mempunyai harga $\frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{a}_\varphi = -\hat{a}_r$ dan $\frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{a}_r = \hat{a}_\varphi$ selain itu semua berharga 0.

Maka :

$$\nabla \cdot A = \left(\hat{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{a}_\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) . \left(\hat{a}_r A_r + \hat{a}_\varphi A_\varphi + \hat{a}_z A_z \right)$$

$$\nabla \cdot A = \left[\hat{a}_r \cdot \hat{a}_r \frac{\partial}{\partial r} A_r + \hat{a}_r \cdot A_r \frac{\partial}{\partial r} \hat{a}_r + \hat{a}_r \cdot a\varphi \frac{\partial}{\partial r} A_\varphi + \hat{a}_r . A_\varphi \frac{\partial}{\partial r} \hat{a}_\varphi + \hat{a}_r \cdot \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial r} A_z + \hat{a}_r \cdot A_z \frac{\partial}{\partial r} \hat{a}_z \right] +$$

$$\left[\begin{array}{l} \hat{a}_\varphi \cdot \hat{a}_r \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} A_r + \hat{a}_\varphi \cdot A_r \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{a}_r + \hat{a}_\varphi \cdot \hat{a}_\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} A_\varphi + \hat{a}_\varphi \cdot A_\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{a}_\varphi \\ + \hat{a}_\varphi \cdot \hat{a}_z \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} A_z + \hat{a}_\varphi \cdot A_z \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{a}_z \end{array} \right] +$$

$$\left[\hat{a}_z \cdot \hat{a}_r \frac{\partial}{\partial z} A_r + \hat{a}_z \cdot A_r \frac{\partial}{\partial z} \hat{a}_r + \hat{a}_z \cdot \hat{a}_\varphi \frac{\partial}{\partial z} A_\varphi + \hat{a}_z \cdot A_\varphi \frac{\partial}{\partial z} \hat{a}_\varphi + \hat{a}_z \cdot \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z} A_z + \hat{a}_z \cdot A_z \frac{\partial}{\partial z} \hat{a}_z \right]$$

$$\nabla \cdot A = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot A_r \right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(A_\varphi \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(A_z \right)$$

Operator divergensi pada sistem koordinat silinder :

$$\nabla \cdot A = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r . A_r \right) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

c). OPERATOR DIVERGENSI PADA SISTEM KOORDINAT BOLA

Operator divergensi juga digunakan pada sistem koordinat bola, sebagai berikut :

$$\nabla \cdot A = \left(\hat{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{a}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{a}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta}\frac{\partial}{\partial \theta} \right) \cdot \left(\hat{a}_r A_r + \hat{a}_\theta A_\theta + \hat{a}_\varphi A_\varphi \right)$$

dari pembahasan sebelumnya didapat :

$$\begin{aligned} \hat{a}_r &= \hat{a}_x \sin\theta \cos\varphi + \hat{a}_y \sin\theta \sin\varphi + \hat{a}_z \cos\theta \\ \hat{a}_\theta &= \hat{a}_x \cos\theta \cos\varphi + \hat{a}_y \cos\theta \sin\varphi - \hat{a}_z \sin\theta \\ \hat{a}_\varphi &= -\hat{a}_x \sin\varphi + \hat{a}_y \cos\varphi + 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\hat{a}_r = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{a}_r = \hat{a}_x \cos\theta \cos\varphi + \hat{a}_y \cos\theta \sin\varphi - \hat{a}_z \sin\theta$$

$$= \hat{a}_\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}\hat{a}_r = -\hat{a}_x \sin\theta \sin\varphi + \hat{a}_y \sin\theta \cos\varphi + \hat{a}_z \cos\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\hat{a}_\theta = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{a}_\theta = -\hat{a}_x \sin\theta \cos\varphi - \hat{a}_y \sin\theta \sin\varphi - \hat{a}_z \cos\theta$$

$$= -\hat{a}_r$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}\hat{a}_\theta = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\hat{a}_\varphi = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{a}_\varphi = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}\hat{a}_\varphi = -\hat{a}_x \cos\varphi - \hat{a}_y \sin\varphi$$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot A &= \left(\hat{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{a}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{a}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \cdot \left(\hat{a}_r A_r + \hat{a}_\theta A_\theta + \hat{a}_\varphi A_\varphi\right) \\
&= \begin{bmatrix} \hat{a}_r \cdot \hat{a}_r \frac{\partial}{\partial r} A_r + \hat{a}_r \cdot A_r \frac{\partial}{\partial r}\hat{a}_r + \hat{a}_r \cdot \hat{a}_\theta \frac{\partial}{\partial r} A_\theta + \hat{a}_r \cdot A_\theta \frac{\partial}{\partial r}\hat{a}_\theta + \hat{a}_r \cdot \hat{a}_\varphi \frac{\partial}{\partial r} A_\varphi + \\ \hat{a}_r \cdot A_\varphi \frac{\partial}{\partial r}\hat{a}_\varphi \end{bmatrix} + \\
&\quad \begin{bmatrix} \hat{a}_\theta \cdot \hat{a}_r \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} A_r + \hat{a}_\theta \cdot A_r \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{a}_r + \hat{a}_\theta \cdot \hat{a}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} A_\theta + \hat{a}_\theta \cdot A_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{a}_\theta + \\ \hat{a}_\theta \cdot \hat{a}_\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} A_\varphi + \hat{a}_\theta \cdot A_\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{a}_\varphi \end{bmatrix} + \\
&\quad \begin{bmatrix} \hat{a}_\varphi \cdot \hat{a}_r \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} A_r + \hat{a}_\varphi \cdot A_r \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\hat{a}_r + \hat{a}_\varphi \cdot \hat{a}_\theta \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} A_\theta + \\ \hat{a}_\varphi \cdot A_\theta \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\hat{a}_\theta + \hat{a}_\varphi \cdot \hat{a}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} A_\varphi + \hat{a}_\varphi \cdot A_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\hat{a}_\varphi \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \cdot A_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(A_\varphi\right)
\end{aligned}$$

Operator divergensi pada sistem koordinat bola adalah :

$$\nabla \cdot A = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \cdot A_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(A_\varphi\right)$$

Contoh

1. Diketahui : $A = r\sin\varphi\,\hat{a}_r + 2r\cos\varphi\,\hat{a}_\varphi + 2z^2\,\hat{a}_z$

   Ditanya : $\nabla \cdot A = ?$

   Penyelesaian : :

$$\begin{aligned}\nabla . A &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\varphi\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(2r\cos\varphi\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(2z^2\right)\\ &= 2\sin\varphi - 2\sin\varphi + 4z\\ &= 4z\end{aligned}$$

2. Diketahui : $D = \frac{10r^3}{4}\hat{a}_r \; {}^{c}/_{m^2}$

   Tentukan : $\nabla \cdot D$

   Penyelesaian :

$$\nabla \cdot D = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rD_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(D_\varphi\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(D_z\right)$$

$$\nabla \cdot D = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \frac{10}{4}r^3\right)$$

$$\nabla \cdot D = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{10}{4}r^4\right)$$

$$\nabla \cdot D = \frac{1}{r} \cdot 4 \cdot \frac{10}{4}r^3$$

$$\nabla \cdot D = 40r^2$$

3. Diketahui : $D = \frac{10}{4}r^3\hat{a}_r \quad r \leq 5 \leq 2m;0 \leq z \leq 10;0 \leq \varphi \leq 2\pi$

   Tunjukan ruas kiri dan kanan dari teorema divergensi

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{s} = \iiint \nabla \cdot D \cdot dv$$

   Pennyelesaian :

Ruas Kanan

$$\nabla \cdot D = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rDr\right)$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{10}{4}r^4\right)$$

$$= 10r^2$$

$$\iiint \nabla \cdot D dv = \int_0^{10}\int_0^{2\pi}\int_2^{5}\left(10r^2\right) r dr d\varphi\, dz$$

$$= \int_{z=0}^{10}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{10} 10r^3 dr\, d\varphi\, dz$$

$$= \left[\frac{10}{4}r^4\right]_{r=2}^{5}\left(\varphi\Big|_{\varphi=0}^{2\pi}\right)\left(z\Big|_{z=0}^{10}\right)$$

$$= \frac{10}{4}\left(3^4\right)\left(2\pi\right)\left(10\right)$$

$$= 4050\pi$$

Ruas Kiri

$$\oiint s = \iint \vec{D}\cdot\vec{d}s_1 + \iint \vec{D}\cdot\vec{d}s_2 + \iint \vec{D}\cdot\vec{d}s_3$$

$$= \iint D \cdot rd\varphi\, dz\, \hat{a}_r + \iint D\cdot rd\varphi\, dr\, \hat{a}_z + \iint D\cdot rd\varphi\, dr\left(-\hat{a}_z\right)$$

$$= \int_{z=0}^{10}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{10}{4}r^3\hat{a}_r \cdot rd\varphi\, dz\, \hat{a}_r + \int_{z=0}^{10}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{10}{4}r^3\hat{a}_r \cdot rd\varphi\, dr\, \hat{a}_z - \int_{z=0}^{10}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{10}{4}r^3\hat{a}_r \cdot rd\varphi\, dr\, \hat{a}_z$$

$$= \left(\frac{10}{4}r^4\right)\cdot\left(\varphi\Big|_0^{2\pi}\right)\cdot\left(z\Big|_0^{10}\right)$$

$$= \left(\frac{10}{4}r^4\right)\cdot\left(2\pi\right)\left(10\right)$$

$$= 50\pi\, r^4$$

karena $2 \le r \le 5$ *maka* :

$$\oiint \vec{D}\cdot\vec{d}s = 50\pi\left(5^4 - 2^4\right)$$

$$= 50\pi\left(3^4\right)$$

$$= 4050\pi$$

2.3 TEOREMA DIVERGENSI GAUSS

Seperti telah dijelaskan dalam pembuktian makna fisis divergensi bahwa divergensi adalah nilai kerapatan fluks, sekarang akan kita buktikan teorema divergensi gauss yang di definisikan :

$$\iiint_v \nabla \cdot A \; dv = \oiint_s \vec{A} \cdot \vec{ds}$$

$\oint_s \vec{A} \cdot d\vec{s}$ = integral permukaan tertutup

$\oint_v \nabla . \mathrm{A} \;\; dv$ = integral volume

Contoh

1. Diketahui : $A = 5\sin\theta \; \hat{a}_\theta + 5\sin\varphi \; \hat{a}_\varphi$,

   Tentukan $\nabla .A$ di $0.5; \pi/4; \pi/4$ = ?

   Penyelesaian :

$$\nabla .A = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\theta \; \sin\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(A_\varphi\right)$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot 0\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(5\sin\theta \; \hat{a}_\theta \cdot \sin\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(5\sin\varphi \; \hat{a}_\varphi\right)$$

$$= 0 + \frac{10}{r}\sin\theta \; \cos\theta \; \hat{a}_\theta + \frac{5}{r\sin\theta}\cos\varphi \; \hat{a}_\varphi$$

$$karena \quad r = 0.5, \theta = \frac{\pi}{4}, \varphi = \frac{\pi}{4} \quad maka \; :$$

$$\nabla \cdot A = \frac{10}{0.5}\sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{4}\; \hat{a}_\theta + \frac{5}{0.5\sin\frac{\pi}{4}}\cos\frac{\pi}{4}\; \hat{a}_\varphi$$

$$= 10 \; \hat{a}_\theta + 10 \; \hat{a}_\varphi$$

2. Diketahui **:** $D = \frac{5}{4} r^2 \; \hat{a}_r \; c/m^2$

$$\nabla = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 Dr) + \frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(D\varphi \sin\phi) + \frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(D\varphi)$$

   Ditanya : Buktikan bahwa ruas kiri sama dengan ruas kanan dari persamaan berikut $\oiint \vec{D} \cdot \vec{ds} = \iiint \nabla \cdot D \; dv$

Penyelesaian :

Ruas kanan

$$\begin{aligned}\nabla . D &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 Dr) \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{5}{4}r^4\right) \\ &= 5r\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iiint \nabla \cdot D \; dv &= \iiint 5r \cdot r^2 \sin\theta \; d\theta \; d\varphi \; dr \\ &= \int_{r=0}^{5}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} 5r^3 \cdot \sin\theta \; d\theta \; d\varphi \; dr \\ &= \left[\frac{5}{4}r^4\right]_0^5 \left[-\cos\theta\right]_0^{2\pi} \left[\varphi\right]_0^{2\pi} \\ &= -\frac{3125}{2}\pi\end{aligned}$$

Ruas kiri

$$\begin{aligned}\oiint \vec{D} \cdot \vec{ds} &= \oiint \frac{5}{4}r^2 \; \hat{a}_r \cdot r^2 \sin\theta \; d\theta \; d\varphi \; \hat{a}_r \\ &= \int_{r=0}^{5}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{5}{4}r^4 \sin\theta \; d\theta \; d\varphi \\ &= \left[\frac{5}{4}r^4\right]_0^5 \left[-\cos\theta\right]_0^{2\pi} \left[\varphi\right]_0^{2\pi} \\ &= -\frac{3125}{2}\pi\end{aligned}$$

Makna fisis divergensi Gauss

Dari hukum Gauss :

$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$$

untuk satu satuan volume Δv

$$\nabla \cdot D = \frac{\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s}}{\Delta v} = \frac{Q}{\Delta v}$$

dan diambil volume menuju nol $\Delta v \rightarrow 0$.

$$\nabla \cdot D = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s}}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{Q}{\Delta v}$$

maka $\nabla . D = \rho_v$ ....(i)

subtitusikan $Q = \int_{vol} \rho_v \, dv$ ke hukum Gauss

maka $\oint_s D \cdot ds = \int_{vol} \rho_v \, dv$ ....(ii)

dari (i) dan (ii) didapatkan hasil akhir bentuk divergensi Gauss :

$$\oint_s D \cdot ds = \int_{vol} \nabla \cdot D \; dv$$

Makna fisis persamaan diatas adalah :

Integral komponen normal dari setiap medan vektor pada seluruh permukaan tertutup sama dengan integral divergensi vektor tersebut dalam seluruh volume yang terlingkung oleh permukaan tertutup tersebut.

Soal-soal dan Penyelesaiannya

1. Diketahui $A = x^2 \hat{a}_x + yz \hat{a}_y + xy \hat{a}_z$, tentukan $\nabla \cdot A$.

   Penyelesaian :

   $$A = 2x + z$$

2. Diketahui $A = 5x^2 \left(\sin \frac{\pi x}{2} \right) \hat{a}_x$, tentukan $\nabla \cdot A$ jika x = 1.

   Penyelesaian :

   $$\nabla \cdot A \big|_{x=1} = 10$$

3. Diketahui $A = \left(x^2 + y^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \hat{a}_x$, tentukan $\nabla \cdot A$ pada posisi (2, 2, 0).

   Penyelesaian :

   $$\nabla \cdot A \big|_{(2,2,0)} = -8{,}84 \cdot 10^{-2}$$

4. Diketahui $D = \frac{Q}{\pi r^2} \left(1 - \cos 3r \right) \hat{a}_r \quad C/m^2$ dalam system koordinat bola, tentukan rapat muatannya.

Penyelesaian:

$$\rho = \frac{3Q}{\pi r^2}\sin 3r \quad \left(C/m^3\right)$$

5. Dalam system koordinat bola diketahui $D = \frac{-2\cdot 10^{-4}}{r}\hat{a}_r \quad \left(C/m^2\right)$ dengan batas $0 \le r \le 1\ m$, dan $D = \frac{-4\cdot 10^{-4}}{r^2}\hat{a}_r \quad \left(C/m^2\right)$ dengan batas $r > 1\ m$. Tentukan rapat muatan untuk kedua batas tersebut.

Penyelesaian :

Untuk $0 \le r \le 1\ m$

$$\rho = \frac{-2\cdot 10^{-4}}{r^2} \quad \left(C/m^3\right)$$

untuk $r > 1\ m$

$$\rho = 0$$

6. Diketahui $D = 10\sin\theta\,\hat{a}_r + 2\cos\theta\,\hat{a}_\theta \quad \left(C/m^2\right)$, tentukan rapat muatannya.

Penyelesaian :

$$\rho = \frac{\sin\theta}{r}\left(18 + 2\cot^2\theta\right) \quad \left(C/m^3\right)$$

7. Buktikan bahwa divergensi dari E sama dengan nol jika $E = \left(\frac{100}{r}\right)\hat{a}_\varphi + 40\,\hat{a}_z$.

8. Dalam system koordinat silinder diketahui $D = \rho_o\left(\frac{r^2 - a^2}{2r}\right)\hat{a}_r$ dengan batas $a \le r \le b$, dan $D = \rho_o\left(\frac{b^2 - a^2}{2r}\right)\hat{a}_r$ dengan batas $r > b$. Untuk $r < a$ maka $D = 0$. Tentukan ρ pada setiap batas tersebut.

Penyelesaian :

Untuk $a \le r \le b$, D = 0

Untuk $r > b$, $D = \rho_o$

Untuk $r < a$, D = 0

9. Diketahui $A = 10\,\hat{a}_r + 5\sin\theta\,\hat{a}_\theta$, tentukan $\nabla \cdot A$.

Penyelesaian :

$$\nabla \cdot A = (2 + \cos\theta)\left(\frac{10}{r}\right)$$

10. Diketahui $D = \dfrac{10}{r^2}\left[1 - e^{-2r}(1 + 2r + 2r^2)\right]\hat{a}_r$ dalam system koordinat bola, tentukan rapat muatannya.

Penyelesaian :

$$\rho = 40\,e^{-2r}\ \left(C/m^3\right).$$

BAB III
CURL (ROTASI) DAN MAKNA FISISNYA

Secara matematis operator curl ditulis dalam bentuk simbol $(\nabla \times)$. Operasi curl ini jika diterapkan pada vektor akan mendapatkan vektor baru.

Misal kita terapkan $(\nabla \times)$ kepada vektor $\vec{A}$ atau ditulis sebagai $(\vec{\nabla} x \vec{A})$

$$(\nabla \times A) = \left(\hat{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\hat{a}_x A_x + \hat{a}_y A_y + \hat{a}_z A_z)$$

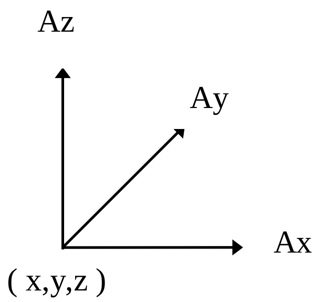
dalam bentuk matriks :

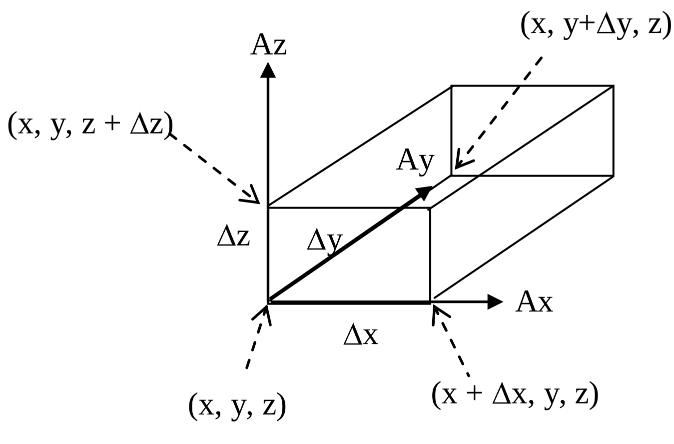
$$\nabla \times A = \begin{pmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_X & A_Y & A_Z \end{pmatrix}$$

$$\nabla \times A = \hat{a}_x \left(\frac{\partial}{\partial y} A_z - \frac{\partial}{\partial z} A_y \right) - \hat{a}_y \left(\frac{\partial}{\partial x} A_z - \frac{\partial}{\partial z} A_x \right) + \hat{a}_z \left(\frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x \right)$$

Arti fisis:

Curl atau rotasi dari vektor adalah mencari jumlah kerja lintasan tertutup persatuan luas





Kerja yang dilakukan dalam lintasan tertutup permukaan $\Delta y\ \Delta z$ permukaan samping)

Lintasan 1 = A_y (x,y,z) Δy

Lintasan 2 = A_z (x,y+Δy,z) Δz

Lintasan 3 = -A_y (x,y+Δy,z+Δz) Δy

Lintasan 4 = - A_z (x,y,z+Δz) Δz

$Total \;\; kerja:$

$$A_y(x,y,z)\Delta y - A_y(x,y+\Delta y,z+\Delta z)\Delta y + A_z(x,y+\Delta y,z)\Delta z - A_z(x,y,z+\Delta z)\Delta z$$

sehingga jumlah seluruh kerja pada lintasan tertutup muka samping persatuan luas (Δy Δz) adalah:

$$\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta z\to 0}} Total \;\; kerja = \frac{\left[A_y(x,y,z) - A_y(x,y+\Delta y,z+\Delta z)\right]\Delta y}{\Delta y\Delta z} + \frac{\left[A_z(x,y+\Delta y,z+\Delta z) - A_z(x,y,z+\Delta z)\right]\Delta z}{\Delta y\Delta z}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta z\to 0}}\left[\frac{A_y(x,y,z) - A_y(x,y+\Delta y,z+\Delta z)}{\Delta z} + \frac{A_z(x,y+\Delta y,z+\Delta z) - A_z(x,y,z+\Delta z)}{\Delta y}\right]$$

Jika permukaan atas dan permukaan depan diselesaikan seperti diatas dan kemudian semuanya dijumlahkan dengan permukaan samping maka kita dapatkan:

Total kerja dalam lintasan tertutup persatuan luas $(\nabla \times A)$, yaitu:

$$\nabla \times A = \hat{a}_x\left(\frac{\partial}{\partial y}A_x - \frac{\partial}{\partial z}A_y\right) + \hat{a}_y\left(\frac{\partial}{\partial z}A_x - \frac{\partial}{\partial x}A_z\right) + \hat{a}_z\left(\frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x\right)$$

dengan demikian terbukti bahwa makna fisis dari rotasi suatu vektor adalah mencari kerja total yang dilakukan oleh vektor tersebut dalam lintasan tertutup dibagi oleh luas permukaan dalam lintasan tertutup tersebut.

Untuk curl A dalam koordinat silinder dan bola dapat diturunkan dengan cara yang sama seperti koordinat kartesian

$$\nabla \times A = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_Z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\hat{a}_r - \left(\frac{\partial A_Z}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial z}\right)\hat{a}_\varphi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right)\hat{a}_Z \qquad (silinder)$$

$\sec ara \;\; matriks$

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_r & \hat{a}_\varphi & \hat{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_r & A_\varphi & A_z \end{pmatrix}$$

$$\nabla \times A = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial (A_\varphi \sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\hat{a}_r - \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right)\hat{a}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\hat{a}_\varphi \quad (bola)$$

sec *ara matriks*

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_r & \hat{a}_\theta & \hat{a}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \\ A_r & A_\theta & A_\varphi \end{pmatrix}$$

Catatan:

Arah rotasi (curl) sesuai dengan kaidah tangan kanan. (cros product dari vektor).

Dari pengertian makna fisis Curl, total kerja dalam lintasan tertutup persatuan luas permukaan lintasan, dapat dituliskan dalam hubungan matematis sebagai berikut:

$$\nabla \times \vec{A} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\text{Total Kerja dalam lintasan tertutup}}{\Delta S}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \lim_{\Delta S \to 0} \oint \frac{\vec{A} \cdot d\vec{l}}{\Delta S}$$

Definisi diatas mempunyai konsekuensi matematis dalam bentuk lain yang dirumuskan oleh Stokes.

Stokes Theorem:

$$\iint \nabla \times \vec{A} \cdot ds = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$$ ******Teorema Stokes*

Catatan : *Teorema Integral Stokes ini banyak digunakan pada persoalan Hk. Ampere, Hk. Maxwell untuk medan magnet.*

Contoh

Diberikan medan faktor umum $A = xz^3\,\hat{a}_x - 2x^2yz\,\hat{a}_y + 2yz\,\hat{a}_z$ dalam koordinat kartesian. Carilah curl A pada titik (1, -1, 1).

Penyelesaian:

$$\nabla x A = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\hat{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\hat{a}_z\right) x \left(xz^3\hat{a}_x - 2x^2yz\hat{a}_y + 2yz^4\hat{a}_z\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz^3 & -2x^2yz & 2yz^4 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(2yz^4\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(-2x^2yz\right)\right)\hat{a}_x - \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(2yz^4\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(xz^3\right)\right)\hat{a}_y + \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-2x^2yz\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(xz^3\right)\right)\hat{a}_z$$

$$= \left(2z^4 + 2x^2y\right)\hat{a}_x + 3xz^2\,\hat{a}_y - 4xyz\,\hat{a}_z$$

$\nabla x A$ di $(1, -1, 1)$

$$\nabla x A = \left(2(1)^4 - 2(1)^2(1)\right)\hat{a}_x + \left(3(1)(1)^2\right)\hat{a}_y - \left(4(1)(1)(1)\right)\hat{a}_z$$

$$= 3\,\hat{a}_y - 4\,\hat{a}_z$$

Diberikan medan vektor umum $A = 3r^2z^2\,\hat{a}_r + 5r\sin\varphi\,\hat{a}_\varphi + 4z^3r\,\hat{a}_z$ dalam koordinat silinder Carilah curl A di titik (3;π/2;2) ?

Penyelesaian :

$$\nabla x A = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial Az}{\partial\varphi} - \frac{\partial A\varphi}{\partial z}\right)\hat{a}_r - \left(\frac{\partial Az}{\partial r} - \frac{\partial Ar}{\partial z}\right)\hat{a}_\varphi + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\left(rA\varphi\right)}{\partial r} - \frac{\partial Ar}{\partial\varphi}\right)\hat{a}_z$$

$$= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\left(4z^3r\right)}{\partial\varphi} - \frac{\partial\left(5r\sin\varphi\right)}{\partial z}\right)\hat{a}_r - \left(\frac{\partial\left(4z^3r\right)}{\partial r} - \frac{\partial\left(3r^2z^2\right)}{\partial z}\right)\hat{a}_\varphi + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\,5r\sin\varphi\right)}{\partial r} - \frac{\partial\left(3r^2z^2\right)}{\partial\varphi}\right)\hat{a}_z$$

$$= 0 - \left(4z^3 - 2z3r^2\right)\hat{a}_\varphi + \frac{1}{r}\left(10\,r\sin\varphi\right)\hat{a}_z$$

$$\nabla x A\big|_{(3,\pi/2,2)} = -\left(4(2)^3 - 2(2)(3)^3\right)\hat{a}_\varphi + \frac{1}{3}\left(10(3)\sin\pi/2\right)\hat{a}_z$$

$$= -\left(32 - 108\right)\hat{a}_\varphi + \left(10\right)\hat{a}_z$$

$$= 76\,\hat{a}_\varphi + 10\,\hat{a}_z$$

Soal-soal dan Penyelesaiannya

1. Diketahui medan vector $A = 5r \sin\varphi \, \hat{a}_z$ dalam system koordinat silinder, tentukan curl A pada posisi (2, π, 0).

   Penyelesaian :

   $\nabla \times A \Big|_{(2,\pi,0)} = -5\hat{a}_r$

2. Diketahui medan vector $A = 10 \sin\theta \, \hat{a}_\theta$ dalam system koordinat bola. Tentukan curl A pada posisi $\left(2, \dfrac{\pi}{2}, 0\right)$.

   Penyelesaian :

   $\nabla \times A \Big|_{\left(2,\frac{\pi}{2},0\right)} = 5\hat{a}_\varphi$

3. Buktikan bahwa curl dari $\dfrac{(x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$ sama dengan nol.

4. Diketahui medan vector $A = e^{-2z}\left(\sin \dfrac{1}{2}\varphi\right)\hat{a}_\varphi$ dalam system koordinat silinder, tentukan curl A pada posisi $\left(0{,}800 \,;\dfrac{\pi}{3}; 0{,}500\right)$.

   Penyelesaian :

   $\nabla \times A \Big|_{\left(0{,}800\,;\frac{\pi}{3};\,0{,}500\right)} = 0{,}368\,\hat{a}_r + 0{,}230\,\hat{a}_z$

5. Buktikan bahwa curl dari $A = \dfrac{2\cos\theta}{r^3}\hat{a}_r + \dfrac{\sin\theta}{r^3}\hat{a}_\theta$ adalah nol.

6. Diketahui medan vector $A = 5e^{-r}\cos\varphi\,\hat{a}_r - 5\cos\varphi\,\hat{a}_z$ dalam system koordinat silinder, tentukan curl A pada posisi $\left(2, \dfrac{3\pi}{2}, 0\right)$.

   Penyelesaian :

   $\nabla \times A \Big|_{\left(2,\frac{3\pi}{2},0\right)} = -2{,}5\hat{a}_r - 0{,}34\,\hat{a}_z$

7. Diketahui vector $A = 2{,}5\hat{a}_\theta + 5\hat{a}_\varphi$ dalam system koordinat bola, tentukan curl dari A pada posisi $\left(2, \frac{\pi}{6}, 0\right)$.

Penyelesaian :

$$\nabla \times A\Big|_{\left(2,\frac{\pi}{6},0\right)} = 4{,}33\,\hat{a}_r - 2{,}5\hat{a}_\theta + 1{,}25\,\hat{a}_\varphi$$

8. Diketahui vector $A = (\sin\varphi)\hat{a}_r + (\sin\theta)\hat{a}_\varphi$ dalam system koodinat bola, tentukan curl dari A pada posisi $\left(2, \frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Penyelesaian :

$$\nabla \times A\Big|_{\left(2,\frac{\pi}{2},0\right)} = 0$$

9. Buktikan bahwa curl dari sebuah gradient adalah nol.

10. Diketahui vector $A = (\sin 2\pi)\hat{a}_\varphi$ dalam system koordinat silinder, tentukan curl dari A pada posisi $\left(2, \frac{\pi}{4}, 0\right)$.

Penyelesaian :

$$\nabla \times A\Big|_{\left(2,\frac{\pi}{4},0\right)} = 0{,}5\hat{a}_z\,.$$

BAB IV

GAYA COULOMB DAN INTENSITAS MEDAN LISTRIK

4.1 HUKUM COULOMB

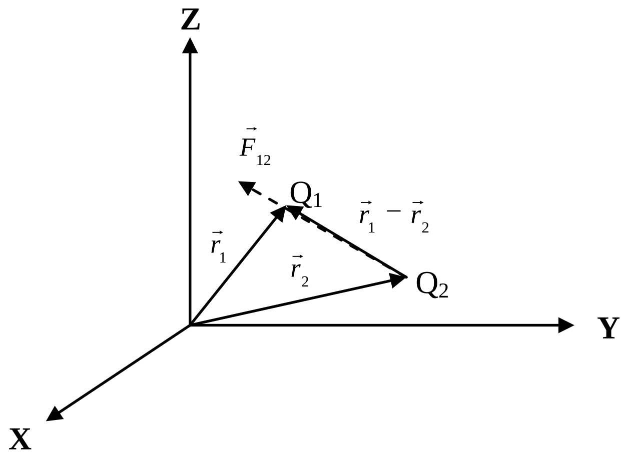
Dari hasil empiris didapatkan bahwa antara dua muatan listrik (Q_1 dan Q_2) yang berjarak *d* dalam ruang yang permitivitas listriknya ε terdapat gaya interaksi sebesar:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_1 Q_2}{d^2}\hat{a}_d$$

d = jarak antara Q_1 dan Q_2

$\hat{a}_d$ satuan yang menunjukan arah gaya

(d jauh lebih besar dari ukuran benda yang bermuatan Q_1 dan Q_2)



$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_1 Q_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^2}\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right)$$

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_1 Q_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^3}\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right)$$

dimana : $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ adalah vektor satuan yang arahnya dari Q_2 ke Q_1.

$\vec{F}_{12}$ = adalah gaya pada muatan Q_1 oleh muatan Q_2.

$$\vec{r}_1 = x_1\hat{a}_x + y_1\hat{a}_y + z_1\hat{a}_z$$

$$\vec{r}_2 = x_2\hat{a}_x + y_2\hat{a}_y + z_2\hat{a}_z$$

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (x_1 - x_2)\hat{a}_x + (y_1 - y_2)\hat{a}_y + (z_1 - z_2)\hat{a}_z$$

Dengan demikian kita bisa tuliskan $\vec{F}$ yang merupakan gaya pada muatan Q_2 oleh muatan Q_1 yaitu :

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_1 Q_2}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^2}\left(\hat{r}_2 - \hat{r}_1\right) \quad \text{atau : } \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

yang merupakan gaya aksi reaksi.

$\varepsilon = \varepsilon_o \varepsilon_r$

ε_o = permitivitas vakum

$$\left(8{,}854\ x10^{-12}\ F/m = \frac{10^{-9}}{36\pi} F/m\right)$$

ε_r = permitivitas relative.

Dari penjelasan diatas dapat diturunkan bahwa :

$$\vec{F}_{medium} = \frac{1}{\varepsilon_r}\vec{F}_{vakum}$$

didalam udara $\vec{F}$ harganya hampir sama dengan di vakum.

Gaya pada satu muatan Q yang disebabkan oleh banyak muatan ditulis dalam bentuk hubungan matematik

$$\vec{F}_R = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{QQ_1\left(\hat{r} - \hat{r}_i\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r}_i\right|^3}\right)$$

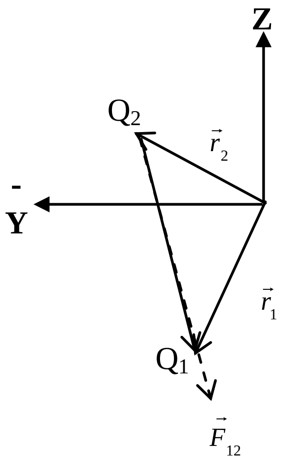
Gaya interaksi akibat muatan-muatan listrik ini ada yang tarik menarik (jika jenis muatannya berbeda) dan tolak-menolak jika jenis muatannya sama.

Contoh

1. Hitung gaya di Q1 jika diketahui :

Q_1 = 2 mC pada posisi (3,-2,-4);

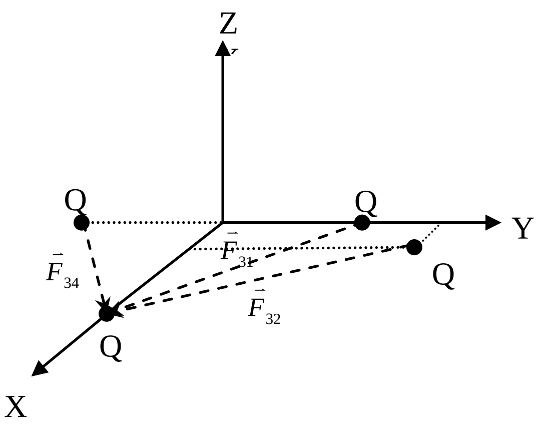
Q_2 = 2 μC pada posisi (1,-4,2)



Penyelesaian :

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = 2\hat{a}_x + 2\hat{a}_y - 6\hat{a}_z$$
$$\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{44}$$
$$\vec{F}_{12} = K\frac{Q_! Q_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^3}$$
$$\vec{F}_{12} = 9\times 10^9 \frac{2.10^{-3}\times 5.10^{-6}}{\left|\sqrt{44}\right|^3}(2\hat{a}_x + 2\hat{a}_y - 6\hat{a}_z)$$
$$\vec{F}_{12} = 0{,}616\ \hat{a}_x + 0{,}616\ \hat{a}_y - 1{,}8484\ \hat{a}_z$$
$$F_{12} = \sqrt{(0{,}616)^2 + (0{,}616)^2 + (1{,}848)^2}$$
$$F_{12} = \sqrt{4{,}174}$$
$$F_{12} = 2{,}04\ \textit{Newton}$$

2. Empat muatan masing-masing



Q_1= -2 C pada posisi (0,3,0) m;

Q_2= 1 C pada posisi (1,4,0) m;

Q_3= 3 C pada posisi (4,0,0) m;

Q_4= -1 C pada posisi (0,-3,0) m.

Tentukan besar gaya interaksi pada muatan Q_3 jika muatan-muatan tersebut terdapat pada ruang vakum/udara.

Penyelesaian : $\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9 \frac{Newton.m^2}{Coulomb^2} \right)$

$$\vec{r}_3 - \vec{r}_1 = 4\hat{a}_x - 3\hat{a}_y$$

$$\left|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\right| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5m$$

$$\vec{r}_3 - \vec{r}_2 = 3\hat{a}_x - 4\hat{a}_y$$

$$\vec{r}_3 - \vec{r}_4 = 4\hat{a}_x + 3\hat{a}_y$$

$$\left|\vec{r}_3 - \vec{r}_4\right| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5m$$

$$\vec{F}_3R = K\frac{Q_3Q_1(\vec{r}_3 - \vec{r}_1)}{\left|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\right|^3} + K\frac{Q_3Q_2(\vec{r}_3 - \vec{r}_2)}{\left|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\right|^3} + K\frac{Q_3Q_4(\vec{r}_3 - \vec{r}_4)}{\left|\vec{r}_3 - \vec{r}_4\right|^3}$$

$$\vec{F}_3R = 9x10^9.\frac{3.(-2).(4\hat{a}_x - 3\hat{a}_y)}{5^3} + 9x10^9.\frac{3.1.(3\hat{a}_x - 4\hat{a}_y)}{5^3} + 9x10^9.\frac{3.(-1).(4\hat{a}_x + 3\hat{a}_y)}{5^3}$$

$$\vec{F}_3R = -432000000\ (4\hat{a}_x - 3\hat{a}_y) + 216000000\ (3\hat{a}_x - 4\hat{a}_y) - 216000000\ (4\hat{a}_x + 3\hat{a}_y)$$

$$\vec{F}_3R = -1944 \cdot 10^6 \hat{a}_x - 216 \cdot 10^6 \hat{a}_y$$

$$F_3R = \sqrt{(1944 \cdot 10^6)^2 + (216 \cdot 10^6)^2}$$

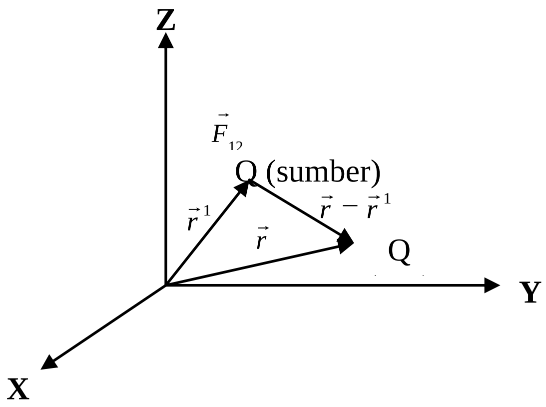
$$F_3R = 1955,96319 \cdot 10^6 \ Newton$$

4.2 INTENSITAS MEDAN LISTRIK

Medan listrik adalah suatu besaran yang mempunyai harga pada tiap titik dalam ruang (medan adalah seuatu yang merupakan fungsi kontinu dari posisi dalam ruang).

Dalam membahas suatu medan dipakai istilah kuat medan. Untuk medan gaya Coulomb intensitas medan listrik (kuat medan listrik = electric field intensity) adalah vektor gaya coulomb yang bekerja pada satu satuan muatan yang kita letakan pada suatu titik dalam medan gaya ini dengan simbol $E(\vec{r})$.

Misal kita mempunyai muatan sumber Q berupa titik dan ingin kita test harga medannya dengan muatan $Q_t \to 0$ maka $\vec{E}(\vec{r})$ harus sama dengan :



$$\vec{E}(r) = \frac{\vec{F}(\vec{r}, Q_t)}{Q_t} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{QQ_t}{\left|\vec{r}\,' - \vec{r}\right|^2 \cdot Q_t} \cdot (\vec{r}\,' - \vec{r})$$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \left|\vec{r}\,' - \vec{r}\right|^3} (\vec{r}^{\,1} - \vec{r})$$

dimana: $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ adalah vektor satuan yang arahnya dari Q ke Q_t (arah menjauhi muatan sumber).

Satuan Intensitas Medan Listrik

Satuan intensitas medan listrik diukur dalam satuan Newton per Coulomb (gaya per satuan muatan) atau volt per meter, karena volt = Newton meter per Coulomb.

Contoh :

Hitung E pada Q_2 pada titik (3,-4,2) yang disebabkan oleh muatan Q_1 = 2 nC di titik (0,0,0).

Penyelesaian :

$$\vec{r}_2 = 3\hat{a}_x - 4\hat{a}_y + 2\hat{a}_z$$

$$\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 2^2}$$

$$\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right| = \sqrt{29}$$

$$\vec{E} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

$$\vec{E} = 9\times 10^9 \frac{2\times 10^{-9}}{\left|\sqrt{29}\right|^3}(3\hat{a}_x - 4\hat{a}_y + 2\hat{a}_z)$$

$$\vec{E} = \frac{18}{29\sqrt{29}}(3\hat{a}_x - 4\hat{a}_y + 2\hat{a}_z)$$

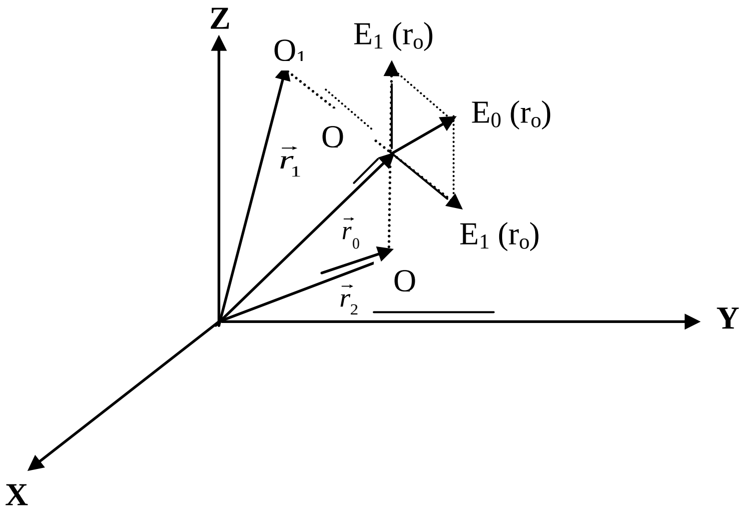
$$\vec{E} = 0{,}115\,(3\hat{a}_x - 4\hat{a}_y + 2\hat{a}_z)$$

$$\vec{E} = (0{,}345\,\hat{a}_x - 0{,}460\,\hat{a}_y + 0{,}230\,\hat{a}_z)\,N/m$$

$$E = \sqrt{0{,}345^2 + (-0{,}46)^2 + 0{,}23^2}$$

$$E = 0{,}619\ N/m$$

4.3 MEDAN LISTRIK OLEH MUATAN-MUATAN TITIK



Karena gaya coloumb adalah linier, intensitas medan listrik yang disebabkan oleh dua muatan titik Q_1 di r_1 dan Q_2 di r_2 adalah jumlah gaya pada muatan Q_t yang ditimbulkan Q_1 dan Q_2 yang bekerja sendiri-sendiri atau :

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q_1(\vec{r}_0 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_1|^3} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_2(\vec{r}_0 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_2|^3}$$

Jika kita tambahkan lebih banyak muatan pada kedudukan lain, medan yang disebabkan oleh muatan titik adalah :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}(\vec{r}) \quad \text{atau} \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \right)$$

Contoh :

Hitung E pada titik A_0 jika diketahui : A_0 = (1,1,1), A_1 = (1,1,0), A_2 = (-1,1,0), A_3 =(-1,-1,0), A_4 = (1,-1,0) dan $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4$ = 3 nC

Penyelesaian :

$(\vec{r}_0 - \vec{r}_1) = \hat{a}_z$

$|\vec{r}_0 - \vec{r}_1| = \sqrt{(1)^2} = 1$

$(\vec{r}_0 - \vec{r}_2) = 2\,\hat{a}_x + \hat{a}_z$

$|\vec{r}_0 - \vec{r}_2| = \sqrt{(2)^2 + (1)^2} = \sqrt{5}$

$$(\vec{r}_0 - \vec{r}_3) = 2\,\hat{a}_x + 2\,\hat{a}_y + \hat{a}_z$$

$$|\vec{r}_0 - \vec{r}_3| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (1)^2} = 3$$

$$(\vec{r}_0 - \vec{r}_4) = 2\,\hat{a}_y + \hat{a}_z$$

$$|\vec{r}_0 - \vec{r}_3| = \sqrt{(2)^2 + (1)^2} = \sqrt{5}$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{(\vec{r}_0 - \vec{r}_1')}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_1|^3} + \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_2|^3} + \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r}_3)}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_3|^3} + \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r}_4)}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_4|^3}\right)$$

$$\vec{E} = 9\times 10^{9}\cdot 3\times 10^{-9}\left(\frac{\hat{a}_z}{1^3} + \frac{2\hat{a}_x + \hat{a}_z}{\sqrt{5}^3} + \frac{2\hat{a}_x + 2\hat{a}_y + \hat{a}_z}{3^3} + \frac{2\hat{a}_y + \hat{a}_z}{\sqrt{5}^3}\right)$$

$$\vec{E} = 27\cdot\left(\frac{2\hat{a}_x + 2\hat{a}_y + 28\hat{a}_z}{27} + \frac{(2\hat{a}_x + 2\hat{a}_y + 2\hat{a}_z)(\sqrt{5})}{25}\right)$$

$$\vec{E} = 27\cdot\left(\frac{2\hat{a}_x + 2\hat{a}_y + 28\hat{a}_z}{27} + \frac{4{,}48\,\hat{a}_x + 4{,}48\,\hat{a}_y + 4{,}48\,\hat{a}_z}{25}\right)$$

$$\vec{E} = 27\cdot\left(\frac{170{,}96\,\hat{a}_x + 170{,}96\,\hat{a}_z + 820{,}96\,\hat{a}_z}{675}\right)$$

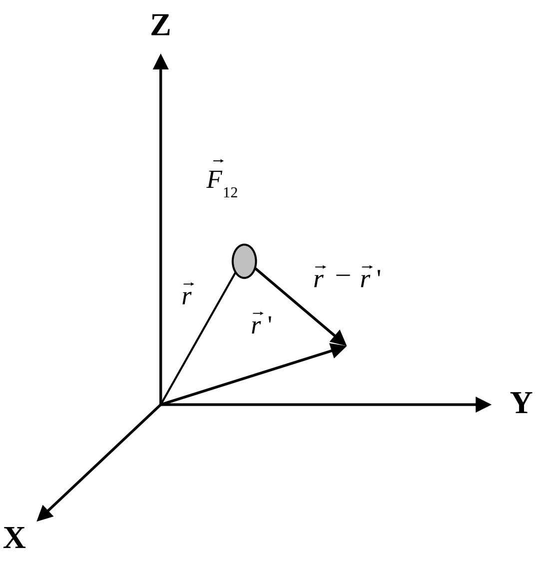
$$\vec{E} = 6{,}84\,\hat{a}_x + 6{,}84\,\hat{a}_y + 32{,}84\,\hat{a}_z$$

$$E = \sqrt{6{,}84^2 + 6{,}84^2 + 32{,}84^2}$$

$$E = 34{,}24\ N/m$$

4.4 MEDAN LISTRIK OLEH DISTRIBUSI MUATAN KONTINU

Jika sumber listrik tidak lagi merupakan muatan titik melainkan dalam suatu bentuk dan ukuran tertentu yang terdistribusi secara kontinu bisa berupa ruang, bidang ataupun garis, maka intensitas medan listriknya adalah :



$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\,\frac{dq\,(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}_i\,'|^3}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \iiint_v \frac{\rho_v}{4\pi\varepsilon}\,\frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')dv}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$

(muatan sumber berbentuk ruang)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \iint_s \frac{\rho_s}{4\pi\varepsilon}\,\frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')ds'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$

muatan sumber berbentuk permukaan.

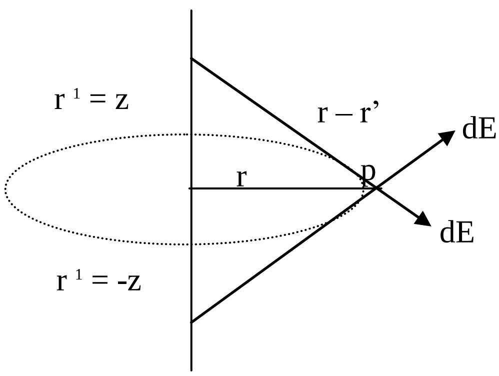
$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_l \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon} \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')dl'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3}$$

muatan sumber berbentuk garis.

Contoh :

Muatan tersebar secara merata pada garis lurus yang panjangnya tak berhingga dengan kecepatan ρ_l tentukan $\vec{E}$ disuatu titik p sejauh r dari muatan garis.

Penyelesaian : Gunakan sistem koordinat silinder



$$dq = \rho_l \cdot dr' = \rho_l \cdot dz$$

$$\vec{r} = z\,\hat{a}_z$$

$$\vec{r}\,' = r\,\hat{a}_r$$

$$\left|r' - r\right| = d$$

$$\left|\vec{r}\,' - \vec{r}\right| = (r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$d\vec{l} = dz$$

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o \left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^2} \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|} \right)$$

$$d\vec{E} = \frac{\rho_l \cdot dz}{4\pi\varepsilon_o (r^2 + z^2)} \frac{(r\hat{a}_r + z\hat{a}_z)}{(r^2 + z^2)^{1/2}}$$

$$d\vec{E} = \frac{\rho_l \cdot dz \;\; (r\hat{a}_r - z\hat{a}_z)}{4\pi\varepsilon_o (r^2 + z^2)^{1/2}}$$

karena pada setiap dq pada z ada dq pada –z sehingga komponen z saling menghilangkan maka :

$$d\vec{E} = \frac{\rho_l \, dz \,(r\hat{a}_r)}{4\pi\varepsilon_o (r^2 + z^2)^{1/2}}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_l .r}{4\pi\varepsilon_o} \int_{-\sim}^{\sim} \frac{dz}{(r^2 + z^2)^{1/2}} \hat{a}_r = \frac{r}{4\pi\varepsilon_o} \left| \frac{z}{r^2\sqrt{r^2 + z^2}} \right|_{z=-\sim}^{z=\sim} \hat{a}_r$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_l r\hat{a}_r}{4\pi\varepsilon_o} \left(\frac{z}{r^2 z} - \frac{(-z)}{r^2 z} \right) = \frac{\rho_l r\hat{a}_r}{4\pi\varepsilon_o} \left(\frac{2}{r^2} \right)$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_o r} \hat{a}_r$$

Contoh :

Pada garis lurus yang ditentukan oleh x = 2 m, y = -4 m tersebar muatan secara bersamaan dengan kerapatan ρ = 20 nC/m. Tentukan kuat medan listrik E di (-2,-1, 4) m.

Penyelesaian :

$$\vec{r} = -2\hat{a}_x - 1\hat{a}_y + 4\hat{a}_z$$

$$\vec{r}\,' = 2\hat{a}_x - 4\hat{a}_y$$

$$(\vec{r} - \vec{r}\,') = -4\hat{a}_x + 3\hat{a}_y + 4\hat{a}_z$$

$$|\vec{r} - \vec{r}\,'| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{41}$$

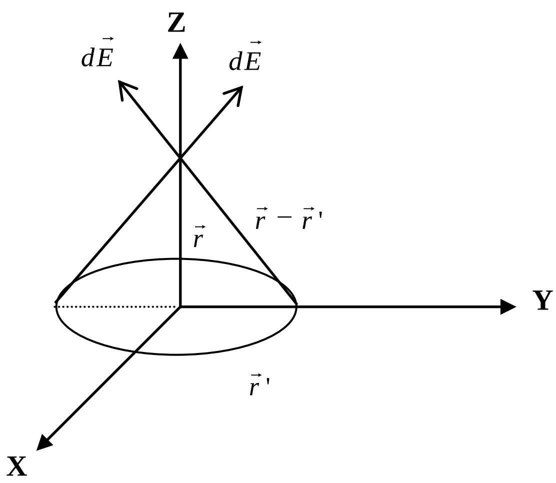
$$\vec{E} = \frac{\rho \cdot (\vec{r} - \vec{r}\,')}{2\pi\varepsilon_o |\vec{r} - \vec{r}|^3}$$

$$\vec{E} = \frac{20 \times 10^{-9}}{(2)(3{,}14)(8{,}85 \times 10^{-12})} \left(\frac{-4\hat{a}_x + 3\vec{a}_y + 4\hat{a}_z}{\sqrt{41}} \right)$$

$$\vec{E} = \frac{(-80\,\hat{a}_x + 60\,\vec{a}_y + 80\,\hat{a}_z) \times 10^{-9}}{355{,}87 \times 10^{-12}}$$

$$\vec{E} = -224{,}8\hat{a}_x + 168{,}6\vec{a}_y + 224{,}8\hat{a}_z \;\left(N/m\right)$$

4.5 MEDAN LISTRIK AKIBAT MUATAN BERBENTUK LEMPENG



Terapkan ungkapan

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_1 .dl}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3}(\vec{r} - \vec{r}\,')$$

$$\vec{r} = z\hat{a}_Z$$

$$\vec{r}\,' = r\hat{a}_r$$

$$dl = ds = rd\varphi$$

karena simetris $\hat{a}_r dz$ saling meniadakan.

Muatan tersebar merata dalam bidang datar tak berhingga dengan kerapatan ρ_S. Tentukan besar medan (intensitas medan) akibat muatan tersebut.

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3}(\vec{r} - \vec{r}\,')$$

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_S .d\varphi .dr .\left\{\dfrac{z\hat{a}_z - r\hat{a}_r}{(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}}{(r - 0)^2 + (r.d\varphi - r.d\varphi)^2 + (z - 0)^2}$$

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_S r.d\varphi .dr}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}(z\hat{a}_z - r\hat{a}_r)$$

karena simetris komponen radial saling meniadakan.

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_S rd\varphi dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}}z\hat{a}_z$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r=0}^{\infty}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{\rho_S rd\varphi dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}}z\hat{a}_z = \frac{\rho_S 2\pi z}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{rdr}{(r^2 + z^2)^{3/2}}\hat{a}_z$$

lihat tabel

$$\vec{E} = \frac{\rho_S z}{2\varepsilon_0}\hat{a}_z\left[\frac{-1}{(r^2 + z^2)^{1/2}}\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\rho_S z\hat{a}_z}{2\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{r \to \infty} + \frac{1}{z}\right]$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_S}{2\varepsilon_0}\vec{a}_z$$

Contoh

Tentukan E disemua titik jika diketahui lempeng seluas 100 cm^2 yang mengandung distribusi muatan yang serba sama sebesar $\frac{10}{9}\mu C$. Tentukan medan listrik disekitar muatan tersebut.

Penyelesaian :

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_o} = 9 \cdot 10^9$$

$$\varepsilon_o = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9}$$

$$E = \frac{\rho}{2\varepsilon_o}$$

dimana : $\rho = \frac{Q}{S}$

$$\rho = \frac{\frac{10}{9} \cdot 10^{-6}}{100 \cdot 10^{-4}} = \frac{10}{9} \cdot 10^{-4} \left(C/m^2 \right)$$

$$E = \frac{\rho}{2\varepsilon_o} = \frac{\frac{10}{9} \cdot 10^{-4}}{2\left(\frac{1}{36\pi \cdot 10^9}\right)}$$

$$= \frac{5}{4} \cdot 10^5 \left(V/m \right)$$

BAB V

FLUKS LISTRIK DAN HUKUM GAUSS

5.1. MEDAN SKALAR DAN MEDAN VEKTOR

φ dikatakan medan skalar jika terdefinisi suatu skalar φ di setiap titik dalam ruang, yaitu φ (x,y,z) atau (suatu fungsi φ yang mengaitkan suatu bilangan dengan φ tiap titik didalam ruang). Medan $\bar{u}$ dikatakan medan vektor jika :

Terdefinisi suatu vektor $\bar{u}$ *disetiap titik didalam ruang atau ditulis dalam hubungan* $\bar{u} = u(r)$ *atau suatu fungsi* $\bar{u}$ *yang berkaitan dengan tiap titik r diruang.*

<u>*Dalam koordinat kartesian*</u> :

$\varphi = \varphi(x, y, z)$ medan scalar

$\bar{u} = \hat{a}_x u_x(x, y, z) + \hat{a}_y u_y(x, y, z) + \hat{a}_z u_z(x, y, z)$ (medan vektor)

<u>*Dalam koordinat silinder*</u> :

$\varphi = \varphi(r, \varphi, z)$ medan skalar

$\bar{u} = \hat{a}_r\, u_r(r, \varphi, z) + \hat{a}_\varphi\, u_\varphi(r, \varphi, z) + \hat{a}_z\, u_z(r, \varphi, z)$ (medan vektor)

<u>*Dalam koordinat bola*</u> :

$\varphi = \varphi(r, \theta, \varphi)$ medan skalar

$\bar{u} = \hat{a}_r u_r(r, \theta, \varphi) + \hat{a}_\theta\, u_\theta(r, \theta, \varphi) + \hat{a}_\varphi\, u_\varphi(r, \theta, \varphi)$ (medan vektor)

Kita lihat, suatu medan vektor adalah ekuivalen dengan 3 komponen medan skalar ini karena $\bar{u}$ ekuivalen dengan komponen

$u_x(r), u_y(r), u_z(r) \Rightarrow$ *Kartesian*

$u_r(r), u_\varphi(r), u_z(r) \Rightarrow$ *Silinder*

$u_r(r), u_\theta(r), u_\varphi(r) \Rightarrow$ *Bola*

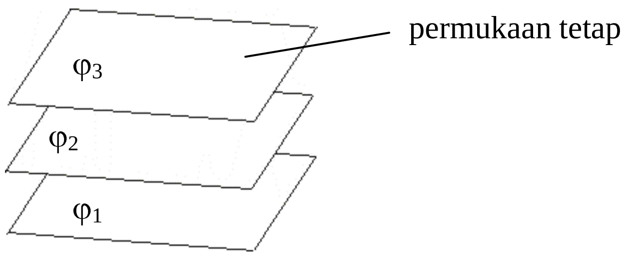
Dari pengertian definisi medan skalar dan medan vektor terlihat bahwa :

Medan vektor berkaitan dengan sumber medan berupa fungsi bernilai vektor. Contoh : medan gaya coulomb, medan gaya magnet, medan gaya gravitasi, dan sebagainya.

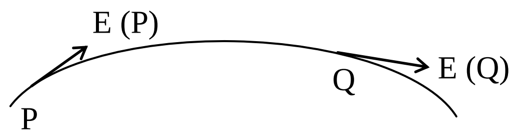
Medan skalar berkaitan dengan sumber medan berupa fungsi bernilai bilangan.

Contoh : fungsi yang memberikan suhu pada tiap titik diruangan.

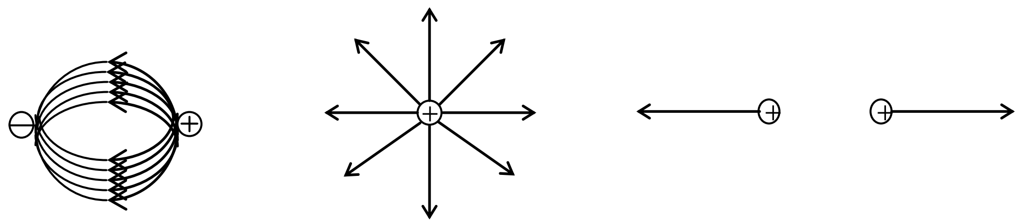
Suatu visualisasi medan skalar φ adalah dengan jalan melukiskan sistem *"permukaan-permukaan φ tutupnya".* Permukaan-permukaan ini adalah tempat kedudukan titik-titik dengan nilai φ yang sama dan biasanya digambarkan dengan beda harga φ, yang sama antara setiap permukaan yang berdekatan.



Cara melukiskan medan vektor salah satunya adalah dengan cara melukiskan garis medan dalam medan gaya, garis medan ini disebut garis gaya. Garis gaya listrik dilukiskan sehingga arah medan listrik menyinggung garis gaya tersebut.



Kuat lemahnya medan listrik ditentukan oleh kerapatan garis gaya tersebut. Perhatikan gambar dibawah ini.



(a) (b) (c)

Keterangan :

Garis gaya keluar dari muatan positif menuju ke muatan negatife.

Untuk muatan positif yang tidak ada pasangan muatan negatifnya, garis gaya menuju ke tempat tak berhingga.

Untuk muatan yang sejenis garis gayanya saling menjauhi.

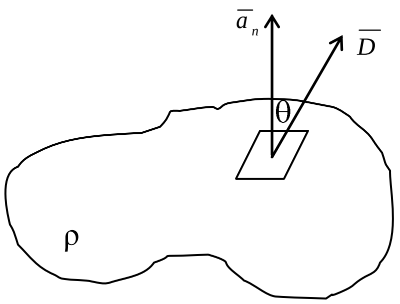
5.2 FLUKS LISTRIK

Fluks listrik didefinisikan sebagai jumlah garis gaya yang menembus permukaan yang saling tegak lurus. Dengan demikian muatan satu coulomb menimbulkan fluks listrik satu coulomb. Maka Ψ = Q Coulomb.

Jika fluks Ψ adalah besaran skalar, maka kerapatan fluks listrik (density of electric flux) D adalah medan vektor.

Gambar dibawah memperlihatkan distribusi muatan ruang kerapatan muatan ρ yang ditutupi oleh permukaan S.

Maka untuk elemen kecil permukaan ds, kita memperoleh differensial fluks yang menembus ds sebagai berikut :



$$\begin{aligned} d\Psi &= \overline{D} \cdot \overline{ds} \\ &= \overline{D} \cdot \hat{n}\, \overline{ds} \\ &= D\ ds\ \cos\theta \end{aligned}$$

Ini karena D tidak selalu dalam arah normal terhadap permukaan dan misalkan θ adalah sudut antara $\overline{D}$ dengan normal permukaan dan d$\overline{s}$ adalah vektor elemen permukaan yang mempunyai arah $\overline{a}_n$ (normal).

Kerapatan Fluks listrik (Density of Electrical Flux) D

D adalah medan vektor yang arahnya sama dengan arah garis gaya.

$\overline{D} = \frac{d\Psi}{dA}\hat{a}_n \left(C/m^2\right)$ ($\hat{a}_n$ adalah unit vektor dari D)

5.3 HUKUM GAUSS

"Flux total yang keluar dari suatu permukaan tertutup adalah sama dengan jumlah muatan di dalam permukaan tersebut."

Fluks total yang menembus permukaan yang tertutup didapat dengan menjumlahkan differensial yang menembus permukaan ds.

$$\psi = \oiint \vec{D} \cdot d\vec{s}$$

sehingga bentuk matematik hukum gauss sebagai berikut :

$$\psi = \oiint \vec{D} \cdot d\vec{s} = \text{muatan yang dilingkupi} = Q$$

Muatan yang dilingkupi bisa terdiri dari :

Beberapa muatan titik

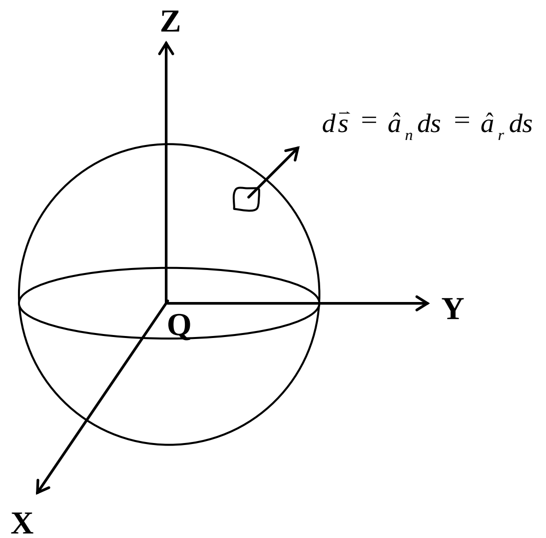
Distribusi muatan garis

Distribusi muatan permukaan (tidak perlu permukaan tertutup)

Distribusi muatan volume

5.4 HUBUNGAN ANTARA KERAPATAN FLUX DAN KUAT MEDAN LISTRIK

Kita pandang suatu muatan Q positif yang terletak di pusat bola yang berjari-jari r, dari definisi garis gaya yang terjadi akibat muatan Q ini akan menuju tak hingga (~) sehingga $\overline{D} = \hat{a}_r \; D$ (berarah keluar sesuai dengan arah $\hat{a}_r$).



Gunakan hukum Gauss

$$Q = \oiint \vec{D} \cdot d\vec{s} = \oiint \hat{a}_r D \cdot \hat{a}_r r^2 \sin\theta \; d\theta \; d\varphi$$

dimana $\hat{a}_r$ dan $\hat{a}_n$ sejajar sehingga $\hat{a}_r \cdot \hat{a}_n = l$

Untuk permukaan bola θ = 0 s/d π

φ = 0 s/d 2π

Sehingga $Q = (4\pi r^2) D$

$$D = \frac{Q}{4.\pi.r^2}$$

$$\overline{D} = \frac{Q}{4.\pi.r^2}\hat{a}_r$$

Kita tahu intensitas medan listrik radial oleh sebuah muatan titik dipusat bola dalam vakum adalah :

$$\overline{E} = \frac{Q}{4.\pi\varepsilon_o.r^2}\hat{r}$$

Maka $\overline{D} = \varepsilon_o.\overline{E}$ berlaku untuk ruang vacuum dan umumnya untuk setiap medium yang mempunyai permitivitas listrik $\varepsilon \rightarrow D = \varepsilon \cdot E$

5.5 DISTRIBUSI MUATAN

a) Muatan ruang

Jika muatan tersebar dalam suatu volume, rapat muatan didefinisikan sebagai $\rho = \frac{dQ}{dv} \left(C/m^3 \right)$ atau

$dQ = \rho \text{ dv} \rightarrow Q = \iiint_v \rho \cdot dv$ atau dapat ditulis $Q = \int_v \rho.dv$.

b) Muatan permukaan

Jika permukaan tersebar dalam suatu lembaran permukaan $Q = \int_s \rho.ds$ begitu pula dengan muatan garis $Q = \int_s \rho.dl$

Contoh

Tentukan jumlah muatan yang ada didalam bola yang ditentukan oleh $1 \leq r \leq 2$ m dan kerapatannya adalah $\rho = \frac{5\cos^2\varphi}{r^4} \left(C/m^2 \right)$

Penyelesaian :

$$Q = \iiint \rho \cdot dv$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=1}^{2} \left(\frac{5\cos^2\varphi}{r^4} \right) r^2 dr \, \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=1}^{2} \frac{5}{r^2} .dr \, \sin\theta \cdot d\theta \cdot \cos^2\varphi \cdot d\varphi$$

$$= \left(\frac{-5}{r} \right)_1^2 \left(-\cos\theta \right)_0^{\pi} \cdot \left(\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi \right)_0^{2\pi}$$

$$= \left(\frac{5}{2} \right) \cdot \left(2 \right) \cdot \left(\pi + 0 \right)$$

$$= 10\pi \quad \textit{Coulomb}$$

5.6 PEMAKAIAN HUKUM GAUSS

a) Beberapa distribusi muatan

Hukum Gauss $Q = \oiint \vec{D} \cdot d\vec{s}$

Pemecahannya akan mudah jika dipilih permukaan tertutup yang memenuhi syarat sebagai berikut :

D_S normal terhadap permukaan sehingga $\vec{D}_s \cdot d\vec{s} = D_s ds$ dan juga menyinggung permukaan sehingga $D_s \cdot ds = 0$

Pada harga $\vec{D}_S \cdot d\bar{s} \neq 0$, D_S adalah suatu konstanta.

Contoh :

Muatan titik dipusat koordinat bola, kita pilih permukaan tertutup yang memenuhi kedua syarat tersebut, yaitu permukaan bola yang pusatnya dipusat koordinat dan jari-jarinya r.

Penyelesaian :

Arah D_S di setiap titik pada permukaan adalah normal terhadap permukaan tersebut, dan besar D_S di setiap titik adalah sama.

$$Q = \oint_S \overline{D}_s \cdot d\bar{s}$$

$$= \oint \overline{D}_s .ds = D_s \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} r^2 \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$$

$$= D_s \cdot 4\pi r^2$$

atau

$$D_s = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

Karena harga r diambil sembarang

D_S mempunyai arah radial keluar

Maka $D = \dfrac{Q}{4\pi . r^2}\hat{a}_r$

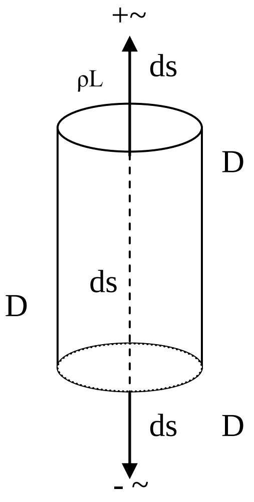
Tinjau distribusi muatan garis dengan kerapatan muatan serba sama ρ_D. Misalkan distribusi muatan tersebut memanjang sepanjang sumbu z dari
(- ~) ke (~).

Penyelesaian :

Kita pilih permukaan tertutup yang memenuhi kedua syarat tersebut yaitu permukaan silinder. Besar $\vec{D}$ tetap dan arahnya selalu tegak lurus terhadap permukaan silinder di setiap titik pada permukaan tersebut $(\vec{D} \parallel bidang\ \ datar)$.

Sehingga : $$Q = \oiint \vec{D} \cdot d\vec{s}$$
$$= \iint \vec{D} \cdot d\vec{s}_1 + \iint \vec{D} \cdot d\vec{s}_2 + \iint \vec{D} \cdot d\vec{s}_3$$

Karena untuk tutup atas dan tutup bawah $\overline{D}_s \perp d\bar{s}$ sehingga harga $\overline{D}_s \cdot d\bar{s} = 0$



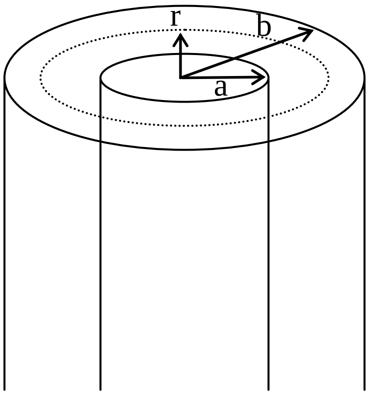
$$Q = D \int_{z=0}^{z=L} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} r d\varphi \cdot dz$$
$$= D\, 2\pi\, rl \quad \Rightarrow Q = \rho_l \cdot l$$

maka

$$\overline{D} = \frac{\rho}{2\pi\ r}\hat{a}_r$$

Kabel koaksial

Kita pilih permukaan Gauss yang memenuhi syarat yaitu permukaan tabung dengan panjang L dan jari-jari a<r<b.



Dari hukum Gauss, $Q = \oiint \vec{D} \cdot d\vec{s}$

Sehingga :

Q = D_s (2 π r L) ⇒ $D_s = \dfrac{Q}{2\pi . r . L}$

Muatan total pada konduktor dalam (r = a) dengan panjang L :

$$Q = \int_{z=0}^{L} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho_s a \cdot d\varphi \cdot dz = 2\pi .aL\rho_s$$

Sehingga $D_s = \frac{a}{r}\rho_s$ atau $\overline{D_s} = \frac{a}{r}\rho_s \; \hat{a}_r$ (a < r < b)

Jika konduktor dalam panjangnya menjadi 1 m, maka $\overline{D} = \frac{a}{r}\frac{\rho_L}{2\pi a} = \frac{\rho_L}{2\pi r}\hat{a}_r$

(sama dengan muatan garis tak berhingga).

Karena tiap garis fluks listrik :

Berawal dari muatan positif pada tabung dalam (inner surface) ke muatan negatif tabung luar (outer surface).

Maka :

Q (tabung luar) = -Q (tabung dalam)

$$2\pi \; bL\rho_s' = 2\pi \; aL\rho_s$$
$$sehingga \quad \rho_s' = \rho_s$$

Jika dipilih r > b untuk permukaan Gauss, maka $Q_{total} = 0$ (karena ada muatan yang besarnya sama tapi tanda berlawanan).

Sehingga $D_s = 0$ (r > b)

Demikian juga untuk r < a, untuk $D_s = 0$

5.7 TEOREMA DIVERGENSI GAUSS

Seperti telah dijelaskan dalam pembuktian makna fisis divergensi bahwa divergensi adalah nilai kerapatan fluks, sekarang akan kita buktikan teorema divergensi Gauss yang didefinisikan :

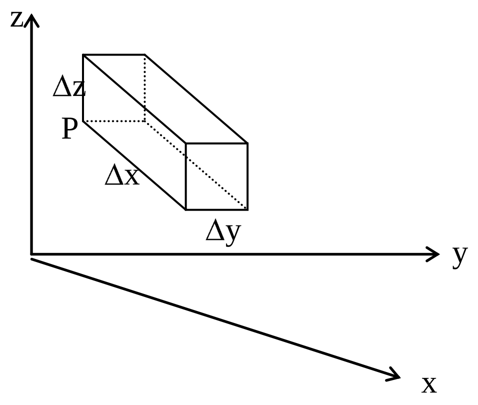
$$\iiint \nabla . \mathrm{A} \, dv = \oiint \overrightarrow{\mathrm{A}} . \; ds$$

$\iint A \cdot ds =$ integral permukaan tertutup

$\iiint \nabla \cdot A \; dv =$ integral volume dari divergensi A

untuk membuktikan teorema di atas kita lihat dalam koordinat yang paling kita kenal “kartesian”.

Dipilih suatu kubus kecil dengan sisi Δx, Δy, Δz yang sejajar dengan sb x, y, z sepeti pada gambar :

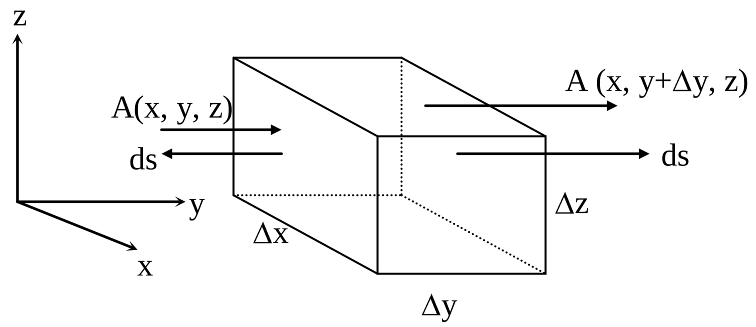


misal titik P dengan posisi (x, y, z) yang dimaksud integral permukaan tertutup adalah :

$\iiint A \cdot ds$ harus diungkapkan untuk ke-6 muka kubus sehingga :

$$\oint_s A \cdot ds = \int_{depan} A \cdot ds_1 + \int_{blk} A \cdot ds_2 + \int_{kiri} A \cdot ds_3 + \int_{kanan} A \cdot ds_4 + \int_{atas} A \cdot ds_5 + \int_{bawah} A \cdot ds_6$$

Ambil muka kiri dan kanan (dengan memperbesar gambar) :



$$\int_{kiri} A \cdot ds \approx -A_y(y)\Delta x \Delta z$$

$$\int_{kanan} A \cdot ds \approx A_y(y + \Delta y)\Delta x \Delta z$$

Gunakan deret Taylor → $A_y(y + \Delta y)\Delta x \Delta z = \left(A_y(y) + \frac{\partial A_y}{\partial y}\Delta y \right)\Delta x \Delta z$

Sehingga :

$$\int_{kiri} A \cdot ds_3 + \int_{kanan} A \cdot ds_4 \approx \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\int_{depan} A \cdot ds_1 + \int_{belakang} A \cdot ds_2 \approx \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\int_{bawah} A \cdot ds_6 + \int_{atas} A \cdot ds_5 \approx \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

atau : $\oint A \cdot ds \approx \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$

Dengan membagi ruas kiri dan kanan oleh (ΔV) di mana ΔV = dx dy dz dan membuat ΔV menuju nol maka didapat :

Maka : $\lim_{\Delta v \to 0} \oint \frac{\bar{A}.d\bar{s}}{\Delta v} = divA = \nabla .A$

Soal-soal dengan penyelesaiannya

1. Tentukanlah muatan total dalam volume yang didefinisikan oleh $0 \le x \le 1\ m$, $0 \le y \le 1\ m$ dan $0 \le z \le 1\ m$, kalau $\rho = 30 x^2 y$. Bagaimana pula hasilnya kalau pembatasan y diubah menjadi $-1 \le y \le 0\ m$?

   Penyelesaian :

   karena dQ = ρ dv

$$Q = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 30 x^2 y \ dx \ dy \ dz$$

$$= \left(\frac{30}{3} x^3 \right)_0^1 \cdot \left(\frac{1}{2} y^2 \right)_0^1 \cdot \left(z \right)_0^1$$

$$= 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1$$

$$= 5 \ Coulomb$$

   untuk batas-batas y yang diubah,

$$Q = \int_0^1 \int_{-1}^0 \int_0^1 30x^2 y \; dx \; dy \; dz$$

$$= \left(\frac{30}{3} x^3 \right)_0^1 \cdot \left(\frac{1}{2} y^2 \right)_{-1}^0 \cdot (z)_0^1$$

$$= 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1$$

$$= 5 \; Coulomb$$

2. Tetapkanlah jumlah muatan dalam volume yang ditentukan oleh $1 \le r \le 2 \; m$ dalam koordinat bola. Kerapatannya adalah $\rho = \dfrac{5\cos^2 \varphi}{r^4}$

Penyelesaian :

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_1^2 \frac{5\cos^2 \varphi}{r^4} \cdot r^2 \sin\theta \; d\theta \; d\varphi \; dr$$

$$= \left(\frac{-5}{r} \right)_1^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \; \Big|_0^{2\pi} \right) \cdot \left(-\cos\theta \; \Big|_0^{\pi} \right)$$

$$= (5) \cdot (\pi) \cdot (2)$$

$$= 10\pi \quad Coulomb$$

3. Tiga muatan titik Q_1 = 30 nC, Q_2 = 150 nC dan Q_3 =-70 nC, dikelilingi oleh permukaan tertutup S. Berapa besarnya fluks netto yang melalui S ?

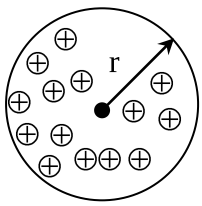
Penyelesaian :

Karena fluks listrik didefinisikan sebagai bersumber dimuatan positif dan brakhir dimuatan negaatif, sebagian fluks dari muatan-muatan itu berakhir di muatan negatif.

$$\Phi_{net} = Q_{net} = 30 + 150 - 70 = 110 \; nC$$

4. Berapa fluks netto melalui permukaan tertutup S di gambar 1 yang berisi distribusi muatan dalam bentuk lempeng berjari-jari 4 m dengan kerapatan $D_s = \dfrac{\sin^2 \varphi}{2r} \hat{a}_z$ C/m^{2}dan $d\bar{s} = r \; dr \; d\varphi \; \hat{a}_z$

Penyelesaian :



$$\Psi = Q = \oint\!\!\oint D \cdot ds$$

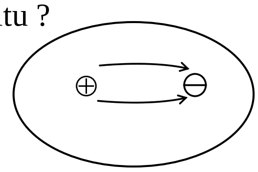
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{4} \hat{a}_z \frac{\sin^2 \varphi}{2r} \cdot \hat{a}_z \, r dr \, d\varphi$$

$$= \left(\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi \right)_0^{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{2} r \right)_0^{4}$$

$$= \pi \cdot 2$$

$$= 2\pi \quad Tesla$$

5. Dua muatan yang sama besar tapi berlawanan tanda dilingkupi oleh permukaan S apakah fluks dapat melalui permukaan itu ?



Penyelesaian :

fluks dapat melalui permukaan itu, sepeerti ditunjukkan di gambar 2, tapi fluks total yang dari S adalah nol, asalkan jumlah muatan didalam S adalah nol.

6. Suatu piringan bulat berjari- jari 4 m dengan rapat muatan $D = 12 \sin \varphi$ dikelilingi permukaan tertutup S. Berapa fluks total yang melalui S ?

Penyelesaian :

$$\Psi = Q = \oint\!\!\oint D \cdot ds$$

$$= \int_{r=0}^{4} \int_{\varphi=0}^{2\pi} 12 \sin \varphi \, r dr \, d\varphi$$

$$= 12 \cdot \left(\frac{1}{2} r^2 \right)_0^{4} \cdot \left(-\cos \varphi \right)_0^{2\pi}$$

$$= (12) \cdot (8) \cdot (2)$$

$$= 192 \quad Tesla$$

7. Muatan titik Q = 30 nC terletak di titik asal suatu koordinat katesian. Tentukan kerapatan fluks D di (1, 3, -4) m.

Penyelesaian :

$$\oiint D \cdot ds = Q$$

$$\iint \hat{a}_r D \cdot \hat{a}_r ds = Q$$

$$\int_{r=0}^{r} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} D \cdot r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = Q$$

$$D \, 4\pi \, r^2 = Q$$

$$D = \frac{Q}{4\pi \, r^2} \hat{a}_r$$

$$r = \sqrt{(1)^2 + (3)^2 + (-4)^2}$$

$$= \sqrt{26}$$

$$D = \frac{30 \cdot 10^{-9}}{4\pi \, 26} \cdot \frac{(a_x + 3a_y - 4a_z)}{\sqrt{26}}$$

$$= \frac{30 \cdot 10^{-9}}{1665,14} (a_x + 3a_y - 4a_z)$$

$$= 0,018 \cdot (a_x + 3a_y - 4a_z)$$

$$= (18 a_x + 54 a_y - 72 a_z) \cdot 10^{-3}$$

$$= \sqrt{(18)^2 + (54)^2 + (-72)^2} \cdot 10^{-3}$$

$$= 91,78 \cdot 10^{-3} \, C/m^2$$

8. Jika diberikan D = 10 xa_x (C/m^2) tentukan fluks yang melalui luas 1 m^2 yang normal pada sumbu x di x = 3 m.

Penyelesaian :

karena D konstan dan tegak lurus pada permukaan itu

maka :

$$\Psi = Q = D \cdot A$$

$$= 10 \, x \, a_x \cdot 1$$

$$= 10 \, (3) \cdot 1$$

$$= 30 \, C$$

9. Suatu konfigurasi muatan dalam koordinat silindris diberikan oleh $\rho = 5re^{-2r} \, (C/m^3)$. Pakai hukum gauss untuk menetapkan D.

Penyelesaian :

Karena ρ bukan fungsi Ø atau z, maka fluks adalah semata-mata radial. Juga bahwa pada r yang tetap harga D pastilah konstan. Maka permukaan gauss khusus yang sesuai untuk hal ini adalah silinder lingkaran yang tegak. Integral pada permukaan ujung-ujung silinder itu hilang, sehingga hukum gauss menjadi

$$\oint\!\!\oint D \cdot ds = Q_{enc}$$

$$\int_{z=0}^{l} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \hat{a}_r D \cdot \hat{a}_r r \; d\varphi \; dz = \int_{z=0}^{l} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{r} 5re^{-2r} rdr \; d\varphi \; dz$$

$$D(2\pi\, rl) = 5 \cdot \left[(r-1)e^{-2r}\right]_0^r \cdot \left(\varphi\right)_0^{2\pi} \cdot \left(z\right)_0^l$$

$$D(2\pi\, rl) = 10\pi\, l\left((r-1)e^{-2r} + 1\right)$$

$$D = \frac{10\pi\, l\left((r-1)e^{-2r} + 1\right)}{2\pi\, rl}$$

$$= \frac{5\left((r-1)e^{-2r} + 1\right)}{r}\hat{a}_r \; \left(C/m^2\right)$$

10. Volume dalam koordinat bola yang ditentukan oleh r ≤ a , dimana a jari-jari bola. Berisi muatan dengan kerapatan yang serba sama. Pakai hukum gauss untuk menentukan D. Berapa besarnya muatan dititik asal yang akan menghasilkan medan D yang sama untuk r > a ?

Penyelesaian :

$$\oint\!\!\oint D \cdot ds = Q_{enc}$$

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \hat{a}_r D \cdot \hat{a}_r r^2 \sin\theta \; d\theta \; d\varphi = \frac{4}{3}\pi\, a^3 \rho$$

$$D(4\pi\, r^2) = \frac{4}{3}\pi\, a^3 \rho$$

$$D = \frac{a^3 \rho}{3r^2} \left(C/m^2\right)$$

kalau suatu muatan titik Q = (4/3) πa^3 ρ diletakkan dititik asal, medan D untuk r > a, yang dibangkitkannya akan sama besar dengan bola yang bermuatan yang berdistribusi merata

BAB VI

ENERGI DAN POTENSIAL

6.1 ENERGI YANG DIPELUKAN UNTUK MENGGERAKKAN MUATAN TITIK DALAM MEDAN LISTRIK.

Muatan Q dalam medan listrik E akan mengalami gaya interaksi Coulomb sebesar : $F_E = QE$ (Newton), jika ingin menggerakkan Q dengan arah melawan E diperlukan gaya yang melawan F_E .

$$\begin{aligned} F_{pakai} &= -F_E \\ &= -QE \end{aligned}$$

F_{pakai} sama dengan F_E dan arahnya berlawanan. Dengan demikian jika kita ingin memidahkan Q sejauh dl dengan arah melawan medan harus menyediakan energi (dilakukan usaha) sebesar:

$$dW = -QE \cdot dl \quad (dot \ \ product \ \ dari \ \ dua \ \ vektor)$$
$$dW = -QE \ dl \ \cos\varphi \quad (\varphi = sudut \ \ antara \ \ E \ dan \ dl)$$

Untuk memindahkan Q pada jarak tertentu (berhingga) harus ditentukan dengan mengintegrasikan:

$$W_{AB} = -\int_{awal}^{akhir} \mathrm{E} \cdot dl$$

dimana :

$$\begin{aligned} dl &= dx\ \hat{a}_x + dy\ \hat{a}_y + dz\ \hat{a}_z && (kartesian) \\ dl &= dr\ \hat{a}_r + rd\varphi\ \hat{a}_\varphi + dz\ \hat{a}_z && (silinder) \\ dl &= dr\ \hat{a}_r + rd\theta\ \hat{a}_\theta + r\sin\theta\ d\varphi\ \hat{a}_\varphi && (bola) \end{aligned}$$

Usaha yang dilakukan untuk memindahkan muatan titik dari titik awal (B) ke titik akhir (A) dalam medan listrik E serba sama, pada setiap lintasan tertutup adalah nol.

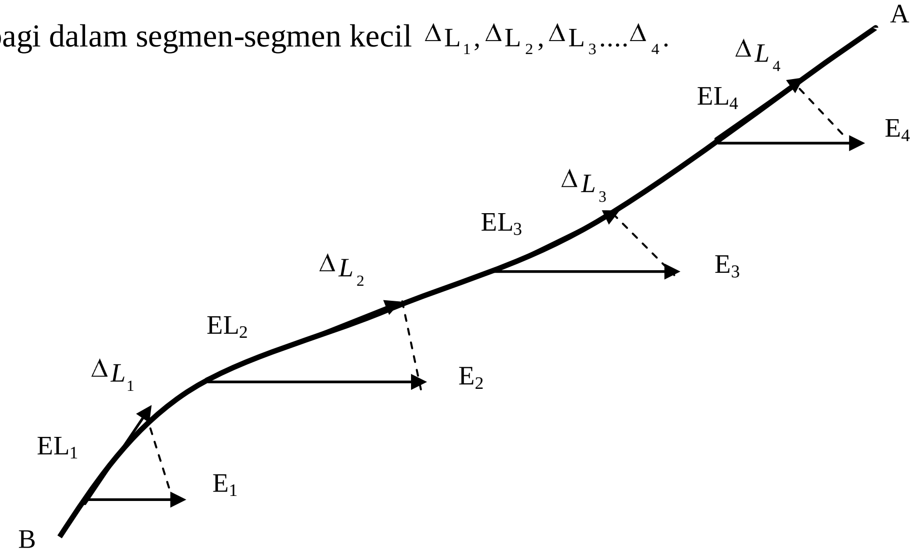
$$\oint E \cdot dl = 0 \quad (Medan \ \ Statis)$$

medan vektor dengan sifat tersebut disebut **medan konservatif.**

6.2 INTEGRAL GARIS

Persamaan $W = -Q\int_{awal}^{akhir} E \cdot dl$ merupakan contoh integral garis. Integral garis diatas dalam medan (E) yang serba sama tidak bergantung pada lintasan yang dipilih, hal inipun berlaku untuk medan yang tidak serba sama, tetapi pada umumnya tidak berlaku untuk E yang merupakan fungsi waktu.

Sebagai contoh kita lihat gambar dibawah ini kita pilih kedudukan awal titik B dan kedudukan akhir diberi tanda A dalam medan listrik yang serba sama lintasan dibagi dalam segmen-segmen kecil $\Delta L_1, \Delta L_2, \Delta L_3 .... \Delta_4$.



EL_1 proyeksi E pada ΔL_1

EL_2 proyeksi E pada ΔL_2

EL_3 proyeksi E pada ΔL_3

EL_4 proyeksi E pada ΔL_4

Besarnya kerja yang diperlukan dari B ke A adalah :

$$W_{AB} = -Q(EL_1\Delta L_1 + EL_2\Delta L_2 + EL_3\Delta L_3 + EL_4\Delta L_4)$$

atau dengan memakai notasi vektor

$$W_{AB} = -Q(\vec{E}_1\Delta L_1 + \vec{E}_2\Delta L_2 + \vec{E}_3\Delta L_3 + \vec{E}_4\Delta L_4)$$

Karena kita menjumlahkan terhadap medan yang serba sama

$E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E$

$W = -QE\,(\Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3 + \Delta L_4)$

Penjumlahan $\Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3 + \Delta L_4$ merupakan penjumlahan vektor (penjumlahan jajaran genjang) yang hasilnya merupakan vektor yang mempunyai arah dari titik awal B ke titik akhir A, L_{BA} (tidak tergantung lintasan yang dipilih).

$W = -QE.L_{BA}$ (E serba sama)

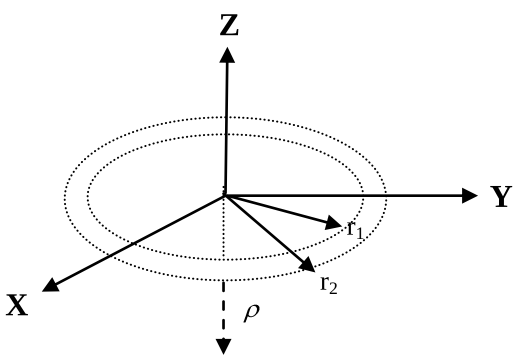
Bentuk integral dari penjumlahan di atas :

$$\begin{aligned} W &= -Q\int_B^A E.dl \\ &= -QE\int_B^A dl \quad ....E \ serba \ sama \\ &= -QEL_{BA} \end{aligned}$$

dengan dl adalah elemen panjang, ditulis dalam bentuk sebagai berikut :

$$\begin{aligned} dl &= dx\,\hat{a}_x + dy\,\hat{a}_y + dz\,\hat{a}_z \quad (kartesian) \\ dl &= dr\,\hat{a}_r + rd\varphi\,\hat{a}_\varphi + dz\,\hat{a}_z \quad (silinder) \\ dl &= dr\,\hat{a}_r + rd\theta\,\hat{a}_\theta + r\sin\theta\,d\varphi\,\hat{a}_\varphi \quad (bola) \end{aligned}$$

Pada pembicaraan interaksi Coulumb dan intensitas medan listrik, kuat medan listrik yang diakibatkan oleh muatan garis lurus adalah



Medan listrik sekitar muatan garis adalah arah radial

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2\pi\varepsilon_o r}\hat{a}_r$$

untuk memindahkan muatan dari r_1 ke r_2 diperlukan kerja.

$$W_{21} = -Q\int_{awal}^{akhir} E \cdot dl$$

$$= -Q\int_{awal}^{akhir} \frac{\rho}{2\pi\varepsilon_o r}\hat{a}_r \cdot \left(\hat{a}_r dr + \hat{a}_\varphi r d\varphi + \hat{a}_z dz\right)$$

$$= -Q\int_{awal}^{akhir} \frac{\rho}{2\pi\varepsilon_o r} dr$$

$$= -Q\int_{r_1}^{r_2} \frac{\rho}{2\pi\varepsilon_o r} dr$$

$$= -Q\int_{r_1}^{r_2} \frac{\rho}{2\pi\varepsilon_o r}$$

$$= -Q\int_{r_1}^{r_2} \frac{\rho}{2\pi\varepsilon_o r}$$

$$= -Q\frac{\rho}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

$$W_{21} = -\frac{Q\rho}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

Jika ingin memindahkan Q dalam arah $\hat{a}_z$ dan arah $\hat{a}_\varphi$ tidak memerlukan usaha, sebab $E \perp dl$ (ingat aturan dot pruduct dari vektor).

6.3 DEFINISI BEDA POTENSIAL DAN POTENSIAL

Kerja yang diperlukan oleh gaya luar untuk memindahkan muatan Q dari satu titik ke titik lain dalam medan listrik $\bar{E}$:

$$W = -Q\int_{awal}^{akhir} E \cdot dl$$

Beda potensial didefinisikan sebagai energi (yang dikerjakan oleh sumber luar) untuk memindahkan satu satuan muatan dari satu titik ke titik lain dalam medan listrik, atau dalanm bentuk matematik.

Beda potensial $$V = \frac{W}{Q} = -\int_{awal}^{akhir} E \cdot dl$$

V_{AB} didefinisikan sebagai kerja yang diperluka untuk memindahkan satu satuan muatan dari B ke A atau V_{AB} adalah perbedaan potensial antara titik A dan B.

$$V_{AB} = V_A - V_B = -\int_B^A E \cdot dl$$

satuan yang dipakai adalah volt yang identik dengan dengan (joule/Coulumb)

Contoh

1. Disekitar muatan garis panjang dengan kerapatan ρ jika kita ingin memindahkan muatan Q dari r_2 ke r_1 diperlukan energi sebesar ?

   Penyelesaian :

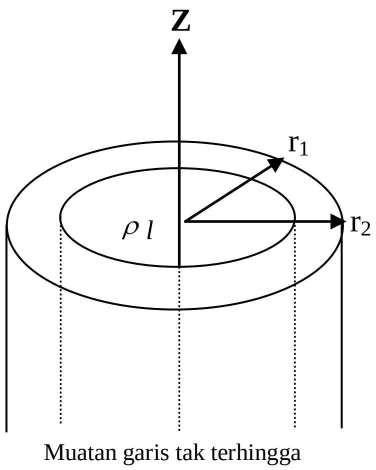
   $$W = \frac{Q\ \rho}{2\pi\varepsilon_o} \ln \frac{r_2}{r_1} \qquad W = QV$$

   $$W = Q \frac{\rho}{2\pi\varepsilon_o} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

   jadi beda potensial $V_{12} = \dfrac{W}{Q} = \dfrac{\rho}{2\pi\varepsilon_o} \ln \dfrac{r_2}{r_1}$

Bukti :

Unsur diferensial *dl* dipilih dalam koordinat tabung dan lintasan radial yang dipilih mengharuskan *dz* dan $d\varphi = 0; dl = \hat{a}_r dr$



Muatan garis tak terhingga

$$W = -\int_{awal}^{akhir} \frac{\rho}{2\pi\varepsilon_o r} \hat{a}_r \cdot dr\ \hat{a}_r$$

Sehingga $$= -Q\int_{r_2}^{r_1} \frac{\rho}{2\pi\varepsilon_o r} \frac{dr}{r}$$

$$= \frac{Q\rho}{2\pi\varepsilon_o} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

jadi beda potensial $V_{12} = \dfrac{\rho}{2\pi\varepsilon_o} \ln \dfrac{r_2}{r_1}$

2. Disekitar muatan titik jika kita ingin memindahkan 2 dari titik B ke A diperlukan energi sebesar ?

   Penyelesaian :

$$W = -Q\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{l}.$$

$$V_{AB} = \frac{W}{Q} = -\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$V_{AB} = -\int_B^A \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q.\hat{a}_r}{r^2}\left(\hat{a}_r dr + \hat{a}_\theta r d\theta + \hat{a}_\varphi r\sin\theta\, d\varphi\right)$$

$$= -\frac{Q_s}{4\pi\varepsilon_0}\int_B^A \frac{dr}{r^2} = \frac{Q_s}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right)$$

$$V_{AB} = V_A - V_B = \frac{Q_s}{4\pi\varepsilon_0 r_A} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_B}$$

Jika $r_B > r_A$ beda potensial $V_{AB} > 0$, secara fisis berarti : diperlukan energi oleh sumber luar untuk membawa muatan Q positif dari r_B ke r_A (karena 2 muatan yang sejenis selalu tolak-menolak). Kalau kita membicarakan potensial mutlak (bukan beda potensial) maka harus dipilih suatu acuan potensial nol, misal:

- Acuan nol diperlukan bumi (eksperimental/empiris)
- Acuan nol dititik tak berhingga (teoritis)
- Untuk persoalan simetri tabung, misal dalam kabel koaksial, konduktor luarnya bisa dipilih sebagai acuan potensial nol.

Beda potensial di titik A dan B adalah beda potensial di titik A **relatif** terhadap beda potensial di titik B. Jika potensial dititik A adalah V_A dan potensial dititik B adalah V_B maka beda potensial titik A dan titik B adalah :

$$V_{AB} = V_A - V_B$$

6.4 MEDAN POTENSIAL SEBUAH MUATAN TITIK

Dari contoh di atas $V_{AB} = V_A - V_B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right]$ walaupun titik A dan B mempunyai θ, φ yang berbeda hasil V_{AB} hanya ditentukan oleh rekapitalisasi r_A dan rekapitalisasi$_B$, tidak ditentukan oleh lintasan yang diambil. komponen θ, dan φ tidak berpengaruh karena $\bar{E}$ berarah radial $\bar{E} = \hat{a}_r E$.

jika titik potensial nol didefinisikan sebagai titik terjauah tak hingga maka potensial di titik A adalah

$$V_{ao} = V_A - (V = 0) = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_o r_A}\int_{\sim}^{r_A}\frac{1}{r^2}\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r_A}$$

sehingga $V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_A}$ sama halnya dengan potensial di titik B $V_B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_B}$

atau biasa ditulis: $V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

cara menyatakan potensial tanpa memilih acuan nol diperoleh dengan mengindetifikasikan rekapitalisasi r_A sebagai r dan $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_B}$ sebagai konstan,

sehingga: $V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C$

C dipilih supaya V = 0 pada r tertentu.

Atau kita bisa memilih acuan $V = V_0$ pada $r = r_0$, karena beda potensial bukanlah fungsi dari C.

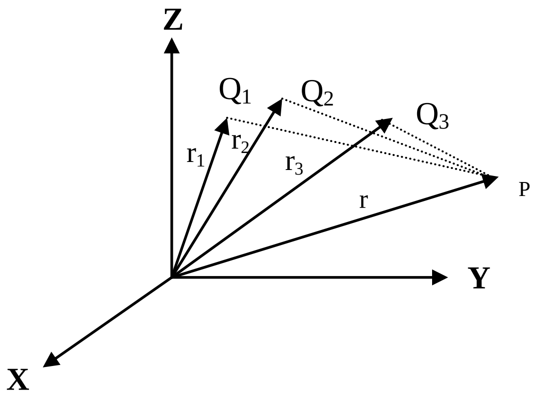
Definisi permukaan equipotensial

Permukaan Equipotensial adalah permukaan yang mirip tempat kedudukan semua titik yang mempunyai potensial yang sama. Untuk memindahkan sebuah muatan pada permukaan equipotensial tidak diperlukan kerja. Permukaan equipotensial dalam medan potensial sebuah muatan titik adalah bola yang berpusat pada muatan titik tersebut.

6.5 MEDAN POTENSIAL AKIBAT DISTRIBUSI MUATAN.

a) Medan Potensial Akibat Muatan Titik

Untuk mencari medan potensial akiabat muatan-muatan titik, sama seperti mencari medan gaya yang diakibatkan oleh muatan-muatan titik berlaku cara superposisi. Titik yang ingin diketahui medan potensialnya yaitu titik titik P.



Titik yang ingin diketahui medan potensialnya yaitu titik P.

$$V_{(r)} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 \left| r - r_1 \right|} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 \left| r - r_2 \right|} + \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 \left| r - r_3 \right|} + \dots$$

$$V_{(r)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0 \left| r - r_i \right|}$$

b) Medan Potensial Akibat Distribusi Muatan Kontinu

Medan potensial yang diakibatkan oleh muatan terdistribusi kontinu caranya sama seperti ketika kita mencari medan gaya listrik. Untuk muatan berbentuk ruang dipakai rumus :

$$\mathrm{V}_{(r)} = \iiint \frac{\rho(r')\,dv}{4\pi\varepsilon_o \left| r - r_1 \right|}$$

Untuk muatan terdistribusi kontinu dalam bidang:

$$\mathrm{V}_{(r)} = \iint_s \frac{\rho_s(r')\,ds}{4\pi\varepsilon_o \left| r - r_1 \right|}$$

Dan untuk muatan yang terdistribusi kontinu dalam garis :

$$V(r) = \int_l \frac{\rho_s(r')\,dl}{4\pi\varepsilon_o |r - r_1|}$$

Hasil-hasil di atas didapat dengan memilih titik acuan (medan potensial = 0) pada titik ~ (tak hingga) atau :

$$V_A = -\int_{\sim}^{A} E \cdot dl$$

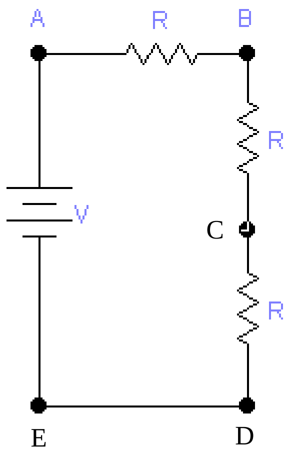
$$V_{AB} = -\int_{B}^{A} E \cdot dl$$

Seperti yang telah dijelaskan dimuka bahwa integrasi di atas tidak bergantung pada lintasannya hanya melihat titik awal dan akhir saja, dengan demikian maka jika kita pilih lintasan tertutup akan menghasilkan harga

$$V = \oint E \cdot dl = 0 \qquad (\textit{untuk medan statis})$$

$$V = \oint_C E \cdot dl = 0 \qquad (\textit{sesuai dengan pernyataan Kirchoff})$$

Berlaku $V = \oint E \cdot dl = 0$ dalam lintasan tertutup medan potensialnya sama dengan nol.



6.6 GRADIEN POTENSIAL

Perhatikan rumusan medan potensial: $V = -\int E.\, dl$ atau dapat ditulis dalam bentuk $\Delta V = -E \cdot \Delta L \quad (\Delta L \to 0)$

Jika antara E dan ΔL membentuk sudut θ maka akan berlaku

$$\Delta V = -E.\, \Delta L\cos\theta$$

atau $$\frac{dV}{dl} = -E\cos\theta$$

Persamaan terakhir ini akan mempunyai nilai maksimum jika $\theta = \pi$ (arah perubahan potensial berlawanan dengan arah pertambahan jarak).

$$\left.\frac{dV}{dl}\right|_{\max} = E$$

(a) Besar E sama dengan harga maksimum perubahan potensial terhadap jarak.
(b) Pertambahan jarak berlawanan arah dengan arah pertambahan potensial.

$$\left(E_{\max} = -\left.\frac{dV}{dl}\right|_{\max}\right)$$

Dari rumus : $\Delta V = -E \cdot \Delta L$

Pada bidang yang mempunyai harga potensial sama (sepotensial bidang = bidang equipotensial) pada bidang ini $\Delta V = 0$.

$\Delta E \cdot \Delta L = 0$ dimana harga E dan Δ L tidak nol dengan demikian $E \perp \Delta L$. Dalam hal ini ΔL mempunyai arah menyinggung bidang sepotensial maka E tegak lurus bidang sepotensial (arah pertambahan potensial terbesar adalah tegak lurus pada permukaan sepotensial yaitu dalam arah potensial bertambah).

Jika $\hat{a}_n$ merupakan arah normal dari permukaan sepotensial (dan mempunyai arah ke potensial yang lebih besar) maka :

- $$\bar{E} = -\left.\frac{dV}{dl}\right|_{mak} \hat{a}_n$$

  Menunjukan bahwa besarnya E sama dengan laju perubahan maksimum V dan arah E adalah normal terhadap permukaan sepotensial (dalam arah pengurangan potensial)

- $$\left.\frac{dV}{dl}\right|_{mak} = \frac{dv}{dn}$$

Karena laju perubahan V yang maksimum terjadi untuk arah yang sama dengan arah E, maka :

$$\bar{E} = -\frac{d\mathrm{V}}{dn}\hat{a}_n$$

$$\bar{E} = -\left(\hat{a}_x\frac{\partial}{\partial x} + \hat{a}_y\frac{\partial}{\partial y} + \hat{a}_z\frac{\partial}{\partial z}\right).V \qquad \text{(kartesian)}$$

atau

$$\begin{aligned}\bar{E} &= -\nabla\,\mathrm{V}\\ &= -\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{n}}\hat{a}_n\end{aligned}$$

$\hat{a}_n$ merupakan vektor satuan yang normal terhadap permukaan sepotensial, dan arah normalnya dipilih dalam arah pertambahan harga V.

ingat : $\frac{\partial}{\partial n}\hat{a}_n = \hat{a}_x\frac{\partial}{\partial x} + \hat{a}_y\frac{\partial}{\partial y} + \hat{a}_z\frac{\partial}{\partial z}$ (kartesian)

dimana $\mathrm{E}_x = -\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}$; $\mathrm{E}_y = -\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}$; $\mathrm{E}_z = -\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}$

atau

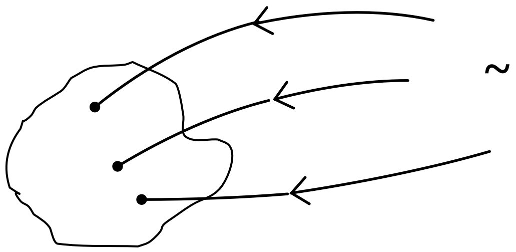
$$\nabla V = \left(\hat{a}_x\frac{\partial}{\partial x} + \hat{a}_y\frac{\partial}{\partial y} + \hat{a}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)V \qquad \textit{(kartesian)}$$

$$\nabla V = \left(\hat{a}_r\frac{\partial}{\partial r} + \hat{a}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{a}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)V \qquad \textit{(silinder)}$$

$$\nabla V = \left(\hat{a}_r\frac{\partial}{\partial r} + \hat{a}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{a}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)V \qquad \textit{(bola)}$$

6.7 KERAPATAN ENERGI DALAM MEDAN ELEKTROSTATIK (LISTRIK STATIS)

Sekarang kita tinjau usaha untuk memindahkan 3 buah muatan, muatan demi muatan (satu demi satu) pada ruangan yang mula- mula bebas muatan.perhatikan gambar sebagai berikut:



Dari definisi energi $W = -Q\int E \cdot dL = QV$

Misalkan urutan pemindahan muatan adalah $Q_{1,}Q_{2,}$ Q_n maka :

$$W_1 = -Q_1 \int E \cdot dL = 0$$

(karena pada saat Q_1 datang, ruang belum ada medan)

$$W_1 = Q_1 \cdot V_{10} = 0$$

$$W_2 = Q_2 \cdot V_{21} \qquad (V_{21} = \textit{potensial dititik } 2 \textit{ disebabkan oleh mua}\tan 1)$$

$$W_3 = Q_2 \cdot V_{21} + Q_3 \cdot (V_{32} + V_{31})$$

$$\therefore W_E = W_1 + W_2 + W_3$$
$$= Q_2 \cdot V_{21} + Q_3 \cdot (V_{31} + V_{32}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Jika urutan pemindahan muatan dibalik mula-mula Q_3 kemudian Q_2 dan Q_1 maka

$$W_E = W_3 + W_2 + W_1$$
$$= 0 + Q_2 \cdot V_{23} + Q_1 \cdot (V_{12} + V_{13}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Jika pers (1) dan pers (2) dijumlahkan maka :

$$2W_E = Q_1 \cdot (V_{12} + V_{13}) + Q_2 \cdot (V_{21} + V_{23}) + Q_3 \cdot (V_{31} + V_{32})$$

Jika kita ingat kembali cara mencari potensial oleh distribusi muatan titik maka:

$$V_1 = V_{12} + V_{13}$$
$$V_2 = V_{21} + V_{23}$$
$$V_3 = V_{31} + V_{32}$$

Dengan demikian kita akan dapatkan

$$2W_E = Q_1V_1 + Q_2V_2 + Q_3V_3$$

$$W_E = \frac{1}{2}\left(Q_1V_1 + Q_2V_2 + Q_3V_3\right)$$

Dapat kita simpulkan energi dalam medan listrik statis oleh muatan n buah ditulis:

$$W_E = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n} Q_n \quad Joule$$

Untuk distribusi muatan kontinu dalam bentuk ruang :

$$W_E = \frac{1}{2}\iiint_{vol} \rho \, V \; dV$$

Dapat ditunjukan bahwa :

$$W_E = \frac{1}{2}\int_v \varepsilon \; E^2 dV$$

$$W_E = \frac{1}{2}\int_v \frac{D^2}{\varepsilon} \; dV$$

$$W_E = \frac{1}{2}\int_v D \cdot E^2 \; dV$$

Bukti:

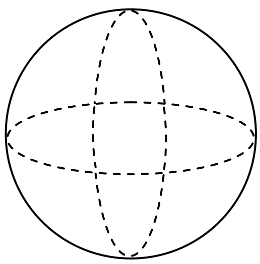
$$W_E = \frac{1}{2}\int_v \rho \; V \; dV \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (1)$$

$$\nabla \cdot D = \rho \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (2)$$

$$\nabla \cdot VD = V\left(\nabla \cdot D\right) + D \cdot \nabla V$$

$$V\left(\nabla \cdot D\right) = \nabla \cdot VD - D \cdot \nabla V \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (3)$$

dengan menggunakan koordinat bola



Volume Bola

Terapkan pers 1, 2, dan 3

$$W_E = \frac{1}{2}\int_{vol} \rho\, V\, dV$$

$$= \frac{1}{2}\int_{vol} (\nabla \cdot D)\, V\, dV$$

$$= \frac{1}{2}\int_{vol} (\nabla \cdot V D)\, dV - \frac{1}{2}\int_{vol} D \cdot (\nabla V)\, dV$$

$$= \frac{1}{2}\oint_{R\to\infty} (V D)\, dS + \frac{1}{2}\int_{vol} D \cdot E\, dV$$

$$untuk \quad R \to \infty \quad \oint (V D)\, dS = 0$$

maka :

$$W_E = \frac{1}{2}\int_{vol} D \cdot E\, dV \qquad (terbukti)$$

$$substitusi\ kan \quad D = \frac{E}{\varepsilon}$$

$$didapat \quad W_E = \frac{1}{2}\int_{vol} \frac{D^2}{\varepsilon} dV \quad dan \quad W_E = \frac{1}{2}\int_{vol} \varepsilon E^2\, dV$$

Contoh

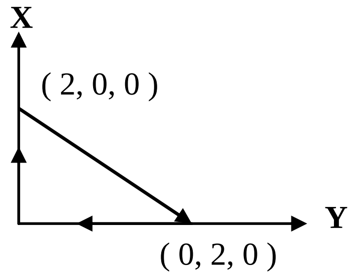
1. Hitunglah usaha yang dilakukan dalam memindahkan muatan +2 C dari (2,0,0) m ke (0,2,0) m melalui lintasan garis lurus penghubung kedua titik $E = 2x\hat{a}_x - 4y\hat{a}_y \; (V/m)$.

   Penyelesaian :

   usaha diferensial adalah

   $$dW = -QEdl$$
   $$dW = -2(2x\,\hat{a}_x - 4y\,\hat{a}_y)(dx\,\hat{a}_x + dy\,\hat{a}_y + dz\,\hat{a}_z)$$
   $$dW = -4xdx + 8ydy$$

   lihat gambar:



   Persamaan bagi lintasan adalah $x + y = 2$ dimana $dy = -dx$

Sepanjang lintasan itu, maka :

$$dW = -4xdx + 8(2-x)(-dx) = (4x-16)dx$$

$$W = -\int_0^2 (4x-16)dx = 24 \ Joule$$

$$ingat \ (1\, {}^{V}\!/_{m} = 1\, {}^{N}\!/_{C} = 1\, {}^{1}\!/_{JCm}).$$

2. Sebuah muatan titik 1,6 nC diletakan di titik asal dalam ruang hampa. Carilah potensial pada r = 0,7 m jika :

   a). Acuan nol di tak berhingga

   b). Acuan nol di r =0,5

   Penyelesaian :

   a). Pada r = ~

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

$$dengan \quad \varepsilon_o = 8{,}854 \times 10^{-12}\, {}^{C^2}\!/_{Nm^2}$$

$$V_{AB} = \frac{1{,}6 \times 10^{-9}}{(4)\cdot(3{,}14)\cdot(8{,}854 \times 10^{-12})}\left(\frac{1}{0{,}7} - \frac{1}{\sim}\right)$$

$$V_{AB} = 20{,}55 - 0 \qquad \textit{(sebab tak berhingga)}$$

$$V_{AB} = 20{,}55\,Volt$$

   b). Pada r = 0,5

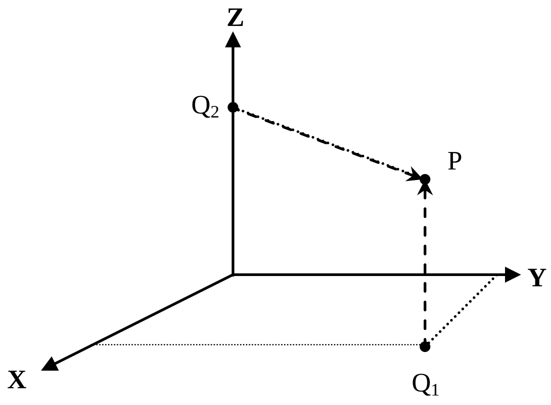
$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

$$V_{AB} = \frac{1{,}6 \times 10^{-9}}{(4)\cdot(3{,}14)\cdot(8{,}854 \times 10^{-12})}\left(\frac{1}{0{,}7} - \frac{1}{0{,}5}\right)$$

$$V_{AB} = 20{,}55 - 28{,}78$$

$$V_{AB} = -8{,}2215 \quad Volt$$

3. Berapa potensial di titik P jika diketahui :



$$r_1 = 6\hat{a}_x + 8\hat{a}_y$$
$$r_2 = 10\,\hat{a}_z$$
$$r = 6\hat{a}_x + 8\hat{a}_y + 10\,\hat{a}_z$$
$$Q_1 = Q_2 = 1{,}6\ nC$$

Penyelesaian :

$$V(r) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o\left|r - r_1\right|} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_o\left|r - r_2\right|}$$

$$\left|r - r_1\right| = \sqrt{\left((6)^2 + (8)^2 + (10)^2\right) - \left((6)^2 + (8)^2\right)}$$
$$= \sqrt{10^2} = 10$$

$$\left|r - r_2\right| = \sqrt{\left((6)^2 + (8)^2 + (10)^2\right) - \left((10)^2\right)}$$
$$= \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

$$V_r = \frac{1{,}6x10^{-9}}{(4)(3{,}14)(8{,}854\,x10^{-12})(10)} + \frac{1{,}6x10^{-9}}{(4)(3{,}14)(8{,}854\,x10^{-12})(10)}$$

$$V_{r=} = \frac{1{,}6x10^{2}}{111{,}206} + \frac{1{,}6x10^{2}}{111{,}206}$$

$$V_r = 1{,}44 + 1{,}44$$

$$V_r = 2{,}88 \quad Volt$$

4. Diketahui medan potensial $V = 50x^2yz + 20y^2$ volt dalam ruang hampa. Carilah :

   a. V pada (1,2,3)

   b. E_P

   Penyelesaian :

   a. P (1,2,3) disubstitusikan pada $V = 50x^2yz + 20y^2$

$$V = 50(1)^2(2)(3) + 20(2)^2$$
$$= 380 \ volt$$

b.

$$E_P = -\nabla V$$

$$E_P = -\frac{dV}{dx}\hat{a}_x - \frac{dV}{dy}\hat{a}_y - \frac{dV}{dz}\hat{a}_z$$

$$E_P = -(100xyz)\hat{a}_x - (50x^2z + 40y)\hat{a}_y - (50x^2y)\hat{a}_z$$

$$E_P = -600\hat{a}_x - 230\hat{a}_y - 100\hat{a}_z \ {}^{V}\!/_{m}$$

5. Diberikan fungsi potensial $V = 2x + 4y$ yang berada dalam vacum, tetapkan energi yang tersimpan dalam volume 1 m^3 yang berpusat dititik asal. Periksa pula volume-volume lain yang besarnya juga 1 m^3 .

   Penyelesaian :

$$\vec{E} = -\nabla\vec{V}$$
$$= -\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\hat{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\hat{a}_z\right)(2x + 4y)$$
$$= -2\hat{a}_x - 4\hat{a}_y \ ({}^{V}\!/_{m})$$
$$E = \sqrt{(2)^2 + (4)^2}$$
$$= \sqrt{20} \ ({}^{V}\!/_{m})$$

Medan ini konstan dalam besaran $\left(E = \sqrt{20}\,\frac{V}{m}\right)$ dan arahnya ke seluruh ruang, maka energi total yang tersimpan adalah tak berhingga besarnya. (medan ini bisa berupa medan didalam sebuah kapasitor pelat sejajar yang tak berhingga ukurannya. Diperlukan suatu usaha yang besarnya tak berhingga untuk memuati kapasitor seperti itu).

Walaupun demikian adalah mungkin berbicara mengenai kerapatan energi untuk medan ini dan medan lainya.

$$WE = \frac{1}{2}\int \varepsilon E^2 dv$$

Menyarankan suatu cara yang mendukung bahwa dengan setiap elemen volume *dV* terkait kandungan energi sebesar *w dV* dimana

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

Bagi medan yang sekarang ditinjau kerapatan energi itu konstan, maka :

$$W = \frac{1}{o}\varepsilon_o \cdot (20) = \frac{10^{-8}}{36\pi} J/m^3$$

Sehingga setiap volume 1 m^3 mengandung $10^{-8}/36\pi$ Joule energi.

BAB VII

MEDAN MAGNET TUNAK (*STEADY*)

Medan adalah daerah disekitar sumber medan yang masih memiliki/ mendapat pengaruh dari sumber medan. Sejauh ini telah dikenal adanya dua medan, yaitu medan magnet dan medan listrik. Muatan-muatan yang merupakan sumber medan menimbulkan gaya terukur yang bekerja pada muatan lainnya yang dapat dianggap sebagai muatan detektor. Kenyataan bahwa pemberian sifat medan pada sumber muatan dan penentuan efek medan pada muatan detektor, maka hal ini dapat diartikan bahwa telah terjadi pembagian persoalan dasar menjadi dua bagian.

Medan magnet dapat ditimbulkan oleh distribusi arus *(Hk. Ampere, Biot Savart)*. Hukum Ampere menyatakan bahwa integral garis kuat medan magnetik **H** sepanjang lintasan tertutup sama dengan arus **I** yang mengalir di sepanjang lintasan tersebut. Atau:

$$\oint H \cdot dL = I$$

Hukum Biot Savart menyatakan bahwa diferensial kuat medan magnet **dH** didapat dari hasi bagi antara *cross product* ***IdL and a$_r$*** dibagi dengan jarak kuadrat. Atau:

$$dH = \frac{i\ dl \times \hat{a}_r}{4\pi\ r^2} \left(A/m \right)$$

Hukum Biot Savart kadang-kadang disebut *hukum Ampere untuk unsur arus*.

Hubungan antara medan magnet tunak *(steady)* dengan sumbernya lebih rumit daripada hubungan antara medan elektrostatik dengan sumbernya.

7.1 Medan Magnet oleh Arus Listrik

Sumber medan magnetik dapat merupakan sebuah magnet permanen, suatu medan listrik yang berubah secara linier terhadap waktu atau dari suatu arus searah. Biot Savart telah mengembangkan hubungan antara medan magnet yang ditimbulkan oleh unsur diferensial arus searah dalam ruang hampa. Unsur arus diferensial yang dikembangkan oleh Biot Savart dibayangkan sebagai bagian kecil dari filamen konduktor yang dialiri arus yang filamennya merupakan limit dari tabung konduktor berpenampang lingkaran yang jejarinya menuju nol

. Hukum Biot Savart menyatakan bahwa pada setiap titik ***P***, besar intensitas medan magnetik yang ditimbulkan oleh unsur diferensial berbanding lurus dengan perkalian arus, besar panjang diferensial, dan sinus sudut antara filamen dengan garis yang menghubungkan filamen tersebut ke titik ***P***. Besar intensitas medan magnetic berbanding terbalik dengan dengan jarak kuadrat ***r.*** Atau secara matematis, hukum Biot Savart dituliskan dengan notasi:

$$dH = \frac{i\ dl \times \hat{a}_r}{4\pi\ r^2}\ \left(A/m \right)$$

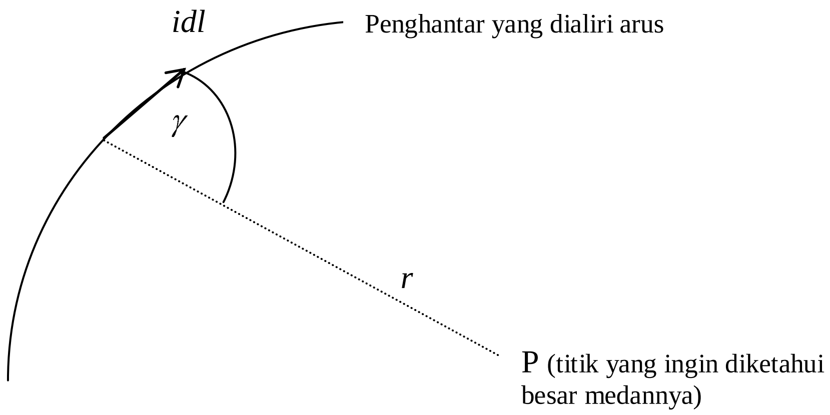
di mana:

dH = diferensial intensitas medan magnet

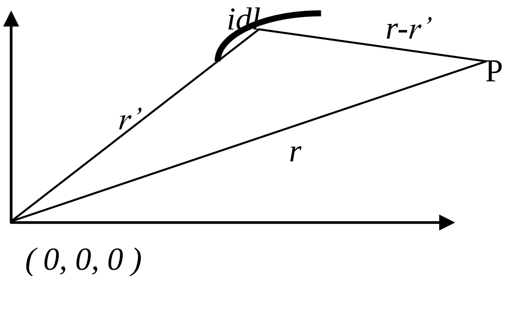
i dl = elemen diferensia arus

$\hat{a}_r$ = unit vektor $\bar{r}$

r = jarak antara elemen arus dengan titik yang ditinjau besar medannya.



Atau secara umum dapat ditulis dengan persamaan matematis sebagai berikut:

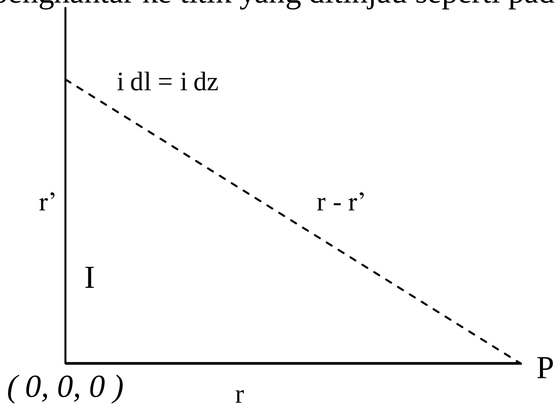


$$dB = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{i\,\overline{dl} \times \left(\bar{r} - \bar{r}' \right)}{\left| \bar{r} - \bar{r}' \right|^3}$$

catatan: $\hat{r} - \hat{r}' = \dfrac{\bar{r} - \bar{r}'}{\left| \bar{r} - \bar{r}' \right|^3}$

Contoh :

1. Medan listrik akibat arus searah pada penghantar yang panjang dan berjarak *r* dari penghantar ke titik yang ditinjau seperti pada gambar:



Gunakan kordinat silinder, sumber terletak di $\vec{r}^{\,'} = z \cdot \hat{a}_z$ sedang $\vec{r} = r \cdot \hat{a}_r$ dan $\vec{r} - \vec{r}^{\,'} = r \cdot \hat{a}_r - z \cdot \hat{a}_z$. Sehingga:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{idz \cdot \hat{a}_z \times (r \cdot \hat{a}_r - z \cdot \hat{a}_z)}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{r \cdot idz \cdot \hat{a}_\varphi}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\mu_o \cdot r \cdot i}{4\pi} \hat{a}_\varphi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

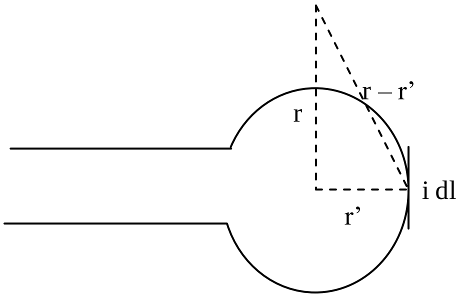
$$= \frac{\mu_o \cdot r \cdot i}{4\pi} \hat{a}_\varphi \left[\frac{z}{r^2 \sqrt{r^3 + z^2}} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} \right]$$

$$= \frac{\mu_o \cdot r \cdot i}{4\pi} \hat{a}_\varphi \left(\frac{z}{r^2 z} + \frac{z}{r^2 z} \right)$$

$$B = \frac{\mu_o \cdot r \cdot i}{4\pi} \hat{a}_\varphi \left(\frac{2}{r^2} \right) = \frac{\mu_o \cdot i}{2\pi r} \hat{a}_\varphi$$

$$B = \frac{\mu_o \cdot i}{2\pi r} \hat{a}_\varphi$$

2. Besarnya induksi magnetik akibat penghantar yang berbentuk lingkaran dengan jari-jari *r*.



$$\vec{dB} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{i\cdot \overline{dl}\times(\bar{r}-\bar{r}')}{|r-r'|^3}$$

$$\vec{dB} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{i\cdot r\cdot d\varphi\cdot \hat{a}_\varphi x (z\cdot \hat{a}_z - r\cdot \hat{a}_r)}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{dB} = \frac{\mu_o}{4\pi}\left(\frac{i\cdot r\cdot d\varphi\cdot \hat{a}_r + i\cdot r^2\cdot d\varphi\cdot \hat{a}_z}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Karena simetris, komponen *z* saling menghilangkan.

$$\vec{dB} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{(i\cdot r^2\cdot d\varphi\cdot \hat{a}_z)}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$B = \frac{\mu_o\cdot i\cdot\left(r^2\right)\cdot 2\pi}{4\pi\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\hat{a}_z$$

$$B = \frac{\mu_o\cdot i\cdot r^2\cdot \hat{a}_z}{4\pi(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$B = \frac{\mu_o\cdot i\cdot(2\pi r^2)}{4\pi(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{a}_z$$

untuk $r<<z$, maka;

$$B = \frac{\mu_o\cdot i\cdot(2\pi r^2)}{4\pi(z^3)}\hat{a}_z$$

$$B = \frac{\mu_o\cdot 2\cdot(\pi\cdot r^2 i)}{4\pi\cdot z^3}\hat{a}_z$$

$$B = \frac{\mu_o\cdot 2\cdot(i\cdot A)}{4\pi\cdot z^3}\hat{a}_z$$

$$B = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{2\cdot m}{z^3}\hat{a}_z$$

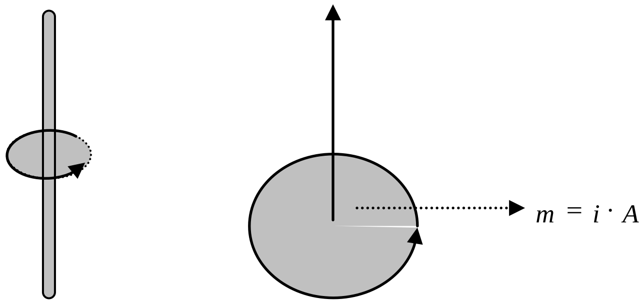
catatan:

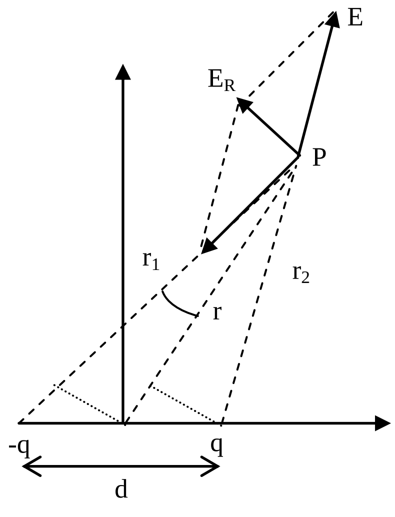
$$m = i \cdot A$$

7.2 Besaran Induksi Magnetik

$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{2m}{z^3}\hat{a}_z$$

dapat digambarkan sebagai berikut:





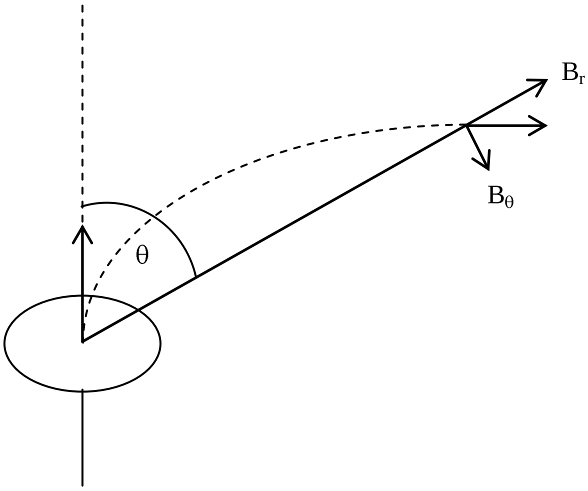
Analog dengan medan listrik akibat dua muatan titik yang berjarak *d* seperti gambaran berikut:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2p}{r^3}$$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2p \cdot \cos\theta}{r^3}$$

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2p \cdot \sin\theta}{r^3}$$

Sehinga besaran *B* di atas dapat diuraikan menjadi komponen *r* dan *θ*

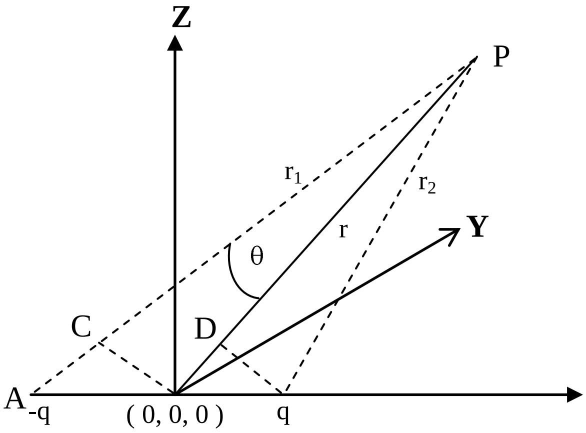


$$\vec{B} = \hat{a}_r \cdot B + \hat{a}_\theta \cdot B_\theta$$

$$B_r = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{2m \cdot \cos\theta}{z^3}$$

$$B_\theta = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{m \cdot \sin\theta}{z^3}$$

Lihat kembali medan akibat dua muatan yang terpisah sejauh *d* dan *d*<< *r*. Untuk menyelesaikan masalah ini, cari terlebih dahulu potensialnya dengan cara sebagai berikut:



$$V_p = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_o r_1} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r_2}$$

$$\begin{aligned} r_1 &= PC - PA \\ &= r + A_o \cdot \cos\theta \\ &= r + \frac{d}{2}\cos\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_2 &= PO - 00 \\ &= r - OB \cdot \cos\theta \\ &= r - \frac{d}{2}\cos\theta \end{aligned}$$

$$Vp = V(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left(-\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

$$Vp = V(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left(-\frac{1}{r + \frac{d}{2}\cos\theta} + \frac{1}{r + \frac{d}{2}\sin\theta}\right)$$

$$Vp = V(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{-\left(r - \frac{d}{2}\cos\theta\right) + \left(r + \frac{d}{2}\sin\theta\right)}{\left(r - \frac{d}{\cos^2\theta}\right)}\right)$$

$$Vp = V(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{(d\cos\theta)}{r^2};\ karena\left(\frac{d^2}{\cos^2\theta} \ll r\right)$$

$$Vp = V(r,\theta) = \frac{P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_o r^2}$$

$p = qd$ disebut momen dipol listrik dan $E_r(r,\theta) = -\frac{\partial}{\partial r}V(r,\theta)$ adalah koordinat polar, maka:

$$E_r(r,\theta) = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_o r^3} \quad , \quad E_\theta(r,\theta) = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}V(r,\theta)$$

$$E_\theta(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{p\sin\theta}{r^3}$$

Ingat: $E(r,\theta) = -\nabla V(r,\theta) = -\frac{\partial}{\partial r}V(r,\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}V(r,\theta)$

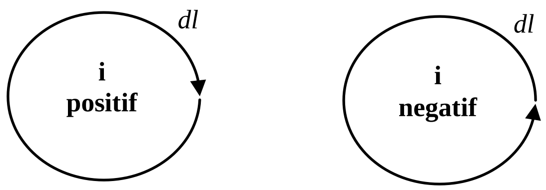
A. Hukum Integral Ampere

Persoalan elektrostatik sederhana dapat dengan mudah dipecahkan dengan menggunakan hukum Coulomb. Tetapi bila persoalan elektrostatik tersebut membutuhkan tingkat kesimetrian yang tinggi, maka akan lebih mudah bila menggunakan hukum Gauss. Prosedur pemecahan masalah dalam medan magnetik baik dengan menggunakan hukum Coulomb atau hukum Gauss adalah sama. Dan dengan prosedur yang sama pula pemecahan masalah elektrostatik akan jauh lebih mudah bila menggunakan hukum integral Ampere *(Ampere's Circuital Law)* atau kadang-kadang disebut sebagai hukum kerja Ampere. *Ampere's Circuital Law* merupakan penurunan dari hukum Biot Savart.

Hukum integral Ampere menyatakan bahwa integral garis kuat medan magnet ***H*** sepanjang lintasan tertutup sama dengan arus yang dilingkupi oleh lintasan tersebut. Atau secara matematis dapat ditulis:

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = i$$

Arus ***i*** dikatakan positif bila arah alirannya searah putaran jarum jam. Dan sebaliknya adalah negatif. Gambar berikut memperlihatkan pernyataan ini.



Pemakaian hukum Gauss adalah mencaari muatan total yang dilingkupi oleh permukaaan tertutup. Sedangkan pemakaian hukum integral Ampere adalah mencari arus total yang dilingkupi oleh lintasan.

Meskipun penggunaan hukum integral Ampere lebih memudahkan dalam perhitungan kuat medan elektrostatik, ada beberapa syarat tertentu yang harus di penuhi terlebih dahulu, yaitu:

1. $\vec{H}$ harus normal atau tangensial pada tiap titik lintasannya.
2. Jika $\vec{H}$ tangensial, maka besarnya harus konstan.

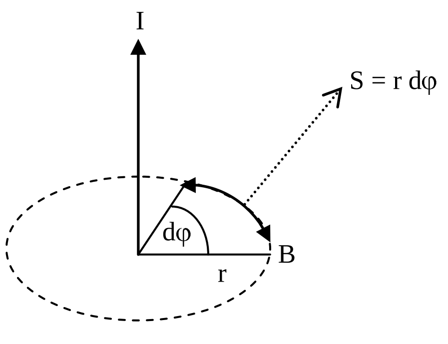
Misalkan lintasan arus berbentuk lingkaran dan berjejari r, makaberlaku hukum integral Ampere:

$$\oint H \cdot dl = \int_0^{2\pi} \hat{a}_\varphi H \cdot \hat{a}_\varphi r \, d\varphi = i$$

$$= H \cdot r \, 2\pi = i$$

$$H = \frac{i}{2\pi r} \hat{a}_\varphi$$

Misalkan induksi magnetik akibat penghantar panjang yang dialiri arus searah:



$$\oint B \cdot dl = \mu_o i$$

$$\int_0^{2\pi} \hat{a}_\varphi B \cdot \hat{a}_\varphi r \, d\varphi = \mu_o i$$

$$B \left(2\pi r \right) = \mu_o i$$

$$B = \frac{\mu_o i}{2\pi r} \left(V/m^2 \right)$$

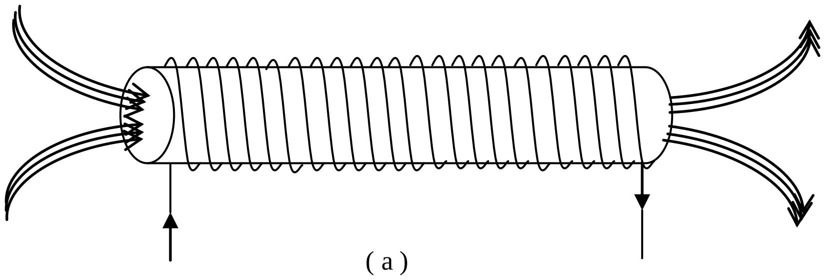
Arah B dapat ditentukan dengan menggunakan kaidah tangan kanan. “Arah ibu jari *merupakan* arah arus ***i*** dan merupakan arah lipatan empat jari lainnya menunjukkan arah $\vec{B}$.” Untuk pernyataan ini berlaku:

$$\vec{B} = \frac{\mu_o i}{2\pi r} \hat{a}_{\varphi}$$

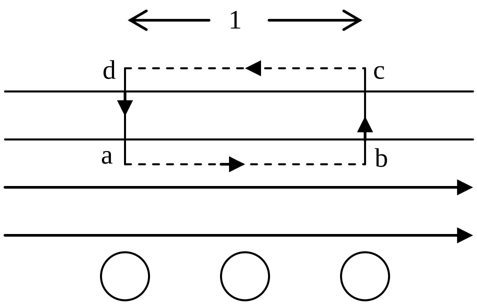
7.4 Medan Magnet dalam Kumparan

Ada dua macam kumparan yang sering digunakan, yaitu solenoida dan toronoida (cincin).

Solenoida



(a)



(b)

Pada bagian tengah solenoida, medan magnet serba sama pada bagian tepi yaitu menyebar (tak homogen). Untuk lilitan yang cukup rapat, kebocoran fliks sangat kecil sehingga induksi magnetic di luar kumparan dianggap nol. Jika kumparan cukup panjang, maka medan magnet di tengah solenoida dianggap homogen.

Untuk mencari besarnya induksi magnet ***B*** dengan menggunakan hukum Ampere seperti pada gambar b adalah sebagai berikut:

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{d}l = \mu_0 i$$

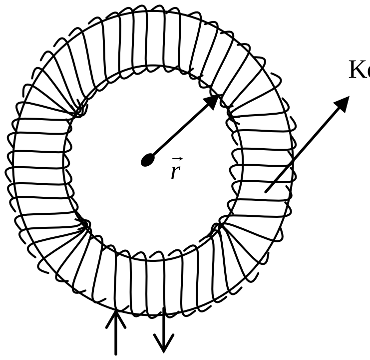
$$\int_{ab} \vec{B} \cdot \vec{d}l + \int_{bc} \vec{B} \cdot \vec{d}l + \int_{cd} \vec{B} \cdot \vec{d}l + \int_{da} \vec{B} \cdot \vec{d}l = \mu_0 i$$

$$B \cdot l = \mu_0 i$$

$$B = \frac{\mu_o \cdot i}{l}$$

Jika tiap lilitan dialiri arus sebesar ***I*** dan rapat lilitan $n = \frac{N}{L}$, maka disepanjang ***l*** terdapat arus sebesar $i = \frac{NI}{L} l$. Sehinga $B = \frac{\mu_0 NI}{L}$

Toroida



$$\oint B \cdot dl = \mu_o i$$

$$\int_0^{2\pi} \hat{a}_\varphi B \cdot \hat{a}_\varphi r d\varphi = \mu_o i$$

$$B(2\pi r) = \mu_o i$$

$$B = \frac{\mu_o i}{2\pi r}$$

Sehingga untuk toroida berlaku:

$$B = \frac{\mu_o i N}{2\pi r}$$

7.5 Hukum Maxwell tentang Induksi Magnet

Sampai saat ini belum ditemukan adanya *monopole magnet*, maka jumlah garis gaya magnet total yang keluar dikurangi yang masuk pada suatu permukaan tertutup selalu sama dengan nol. Atau secara matematis dapat ditulis:

$$\oiint_s \vec{B} \cdot \vec{ds} = 0$$

Dari hukum integral divergensi diperoleh:

$$\oiint \vec{B} \cdot \vec{ds} = \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{B}\ dv = 0$$; (berlaku untuk semua volume)

maka:

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \cdot B = \frac{\oiint \vec{B} \cdot ds}{\Delta v}$$

secara fisis :

$$\nabla \cdot B = \frac{\sum (fluks\ \ keluaran\ - fluks\ \ masukan)}{volume}$$

untuk fluks magnetic selalu sama dengan nol.

TEOREMA MAXWELL

(UMUM)

Persoalan-persoalan elektromagnetik adalah persoalan yang menyangkut atau yang berhubungan dengan medan magnetik dan medan elektrik. Medan-medan tersbut adalah berupa besaran-besaran vector yang telah ditetapkan melalui hukum-hukum yang disebut **Persamaan-persamaan (teorema) Maxwell.**

A. $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon}$ **; Hukum Gauss**

Perhatikan hukum Gauss:

$$\oiint \vec{D} \cdot \vec{ds} = Q$$

$\oiint \vec{D} \cdot \vec{ds} = \int_v \rho \cdot dv$; Hukum Maxwell (dalam bentuk integral)

Dari teorema divergensi Gauss:

$$\oiint \vec{D} \cdot \vec{ds} = \int_v \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{D}\right) \cdot dv$$

$$\therefore \int_v \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \int_v \rho \cdot dv$$

sehingga:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

karena:

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$$

maka:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

B. $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ **; bentuk lain dari hukum Faraday**

Hukum Faraday:

$$e = -\frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$$e = -\frac{\partial}{\partial t}\int_s \vec{B} \cdot \vec{d}s$$

$$e = e \cdot m \cdot f = \oint E \cdot dl$$

$\therefore \oint E \cdot dl = \int_s B \cdot ds$; bentuk integral dari hukum Maxwell-Faraday

dengan teorema integral Stokes:

$$\oint E \cdot dl = \int_s (\nabla \times E)\, ds$$

maka:

$$\int (\nabla \times E)\, ds = -\frac{\partial}{\partial t}\int_s B \cdot ds$$

karena terjadi pada permukaan yang identik, maka:

$\nabla \times E = -\frac{\partial}{\partial t} B$; bentuk titik Faraday-Maxwell

C. Hukum Maxwell tentang Induksi Magnet

Dengan beranggapan bahwa di dunia ini tidak ada *monopole magnetic*, maka *netto* garis gaya yang melalui suatu permukaan tertutup selalu sama dengan nol.

$$\oint_s B \cdot ds = 0$$

Bentuk Maxwell dalam integral yang menyatakan ketidakadaan *monopole*. Jika diterapkan teorema divergnsiGauss, maka:

$$\oint_s B \cdot ds = \int_v \nabla \cdot B \; dv = 0$$

$$\therefore \int_v \nabla \cdot B \; dv = 0$$

Dan berlaku untuk sembarang volume, maka:

$$\nabla \cdot B = 0$$

Ini juga bias ditafsirkan dari arti fisis divergensi:

$$\nabla \cdot B = \left\{ \frac{(garis\ \ gaya\ \ keluar \times luas\ \ permukaan) - (garis\ \ gaya\ \ masuk \times luas\ \ permukaan)}{volume} \right\}$$

netto

fluks magnetik dari permukaan tertutup selalu nol.

D. Hukum Integral Ampere

menyatakan bahwa integral garis ***H*** sepanjang lintasan tertutup dengan arus searah yang dilingkupi oleh lintasa tersebut.

$$\oint H \cdot dl = i$$

Dari definisi fluks $B = \mu_0 \cdot H$ (dalam vakum), maka:

$$\oint B \cdot dl = \mu_0 \cdot i \text{ (vakum)}$$

untuk definisi fluks di dalam suatu lintasan :

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint \left(J + \varepsilon \frac{\partial F}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s}$$

$$\int \nabla \times H \cdot d\vec{s} = \iint \left(J + \varepsilon \frac{\partial F}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s}$$

$$\therefore \nabla \times H = J + \varepsilon \frac{\partial F}{\partial t}$$

BAB VIII

PERSAMAAN POISSON DAN LAPLACE

Persamaan Poisson dan Laplace didapat dari persaman Maxwell dan pernyataan bahwa medan listrik adalah negatif gradien potensial sebagai berikut :

1. $\nabla \cdot E = \dfrac{\rho}{\varepsilon}$

2. $E = -\nabla V$

dari pers. (1) dan (2) didapat :

$$\nabla \cdot (\nabla V) = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla \cdot (\nabla V) = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

divergensi dari gradien ditulis $\nabla \cdot (\nabla V) = \nabla^2 V$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

disebut persamaan Poisson untuk daerah yang bebas muatan ρ =0; maka persamaan diatas akan menjadi $\nabla^2 V = 0$

8.1 Bentuk-Bentuk Explisit Persamaan Laplace dan Poisson

Simbol bisa diuraikan dalam berbagai bentuk sistem koordinat yakni dengan cara mencari divergensi dari gradien dalam sistem koordinat tersebut untuk sistem ***koordinat kartesian***.

$$\nabla \cdot (\nabla V) = \left(\hat{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\hat{a}_x \frac{\partial V}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \hat{a}_z \frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

maka *persamaan laplace* dalam koordinat kartesis adalah :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Sedang *persamaan Poisson* adalah :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

Pada sistem koordinat lain didapat dengan cara yang sama untuk ***koordinat silinder***

$$\nabla^2 V = \nabla \cdot \nabla V$$

$$= \left(\hat{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{a}_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\hat{a}_r \frac{\partial V}{\partial r} + \hat{a}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} + \hat{a}_z \frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

Yang perlu diperhatikan dalam hal ini adalah operator sebelah kiri, jika dikerjakan ke suku yang ada dikanannya harus dioperasikan sebagai operasi diferensial seperti :

Dot product antara dua unit vektor yang tidak sejenis menghasilkan harga nol (tidak berharga) sehingga hasil akhir untuk koordinat silinder adalah :

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Atau :

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Maka *persamaan Laplace* untuk sistem koordinat silinder adalah :

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Dan *persamaan Poissonnya* adalah :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

Dengan metoda yang sama dapat diturunkan persamaan Laplace dan Poisson dalam ***koordinat Bola***.

$$\nabla^2 V = 0$$

$$0 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$

sehingga dapat diperoleh *persamaan Laplace* untuk system koordinat bola adalah

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0$$

Dan *persamaan Poisson* dalam kordinat Bola adalah:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

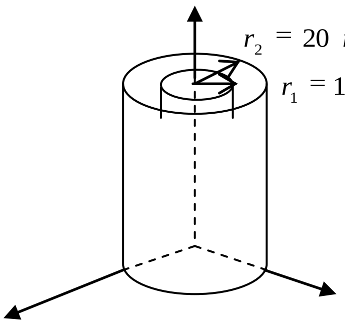
8.2 Teorema Keunikan

Penyelesaian persamaan Laplace atau Poisson harus menghasilkan jawaban yang unik, untuk itu diperlukan syarat-syarat batas yang lengkap. Dua jawaban dari persamaan Laplace atau Poisson, keduanya harus memenuhi syarat batas yang sama maka kedua jawaban harus identik satu sama lain.

Perhatikan contoh soal di bawah ini yang menggambarkan persoalan lengkap dengan syarat-syaratnya .

Contoh :

1. Tetapkan fungsi potensial dan identitas medan listrik di dalam ruangan di antara dua silinder tegak yang konsentris, jika V=0 pada r=1 mm dan V = 150 Volt pada r =20 mm, abaikan efek-efek sisi.



Penyelesaian :

Dari syarat batas potensial dalam persoalan ini konstan tehadap perubahan y dan z maka persamaan Laplace dalam bentuk koordinat silinder hanya dipakai komponen r nya saja :

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) = 0$$

Karena deferensial tidak tergantung pada Q dan Z maka akan menjadi deferensial biasa dan kalikan kiri kanan dengan r maka

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) = 0$$

Integralkan kiri kanan akan menjadi

$$r\frac{dv}{dr} = c \qquad \Rightarrow c = Kons\tan ta$$

Maka :

$$dv = \frac{cdr}{r}$$

$$\int dv = \int c\frac{dr}{r}$$

Maka

$$V = C \ln r + B$$

Terapkan syarat batas :

V = 0 ; untuk r = 1 mm = 1x 10^{-3} m

V = 150 V ; untuk r = 20 mm = 2x 10^{-2} m

$$\text{Untuk} \quad V = 0$$

$$0 = C \ln 10^{-3} + B ....(1)$$

$$\text{Untuk} \quad V = 150$$

$$150 = C \ln\ 2\cdot 10^{-2} + B ....(2)$$

$$\textit{dari pers (1) dan (2)}$$

$$C \ln 10^{-3} + B = 0$$

$$\underline{C \ln\ 2\cdot 10^{-2} + B. = 150} \quad -$$

$$C\left(\ln 10^{-3} - \ln\ 2\cdot 10^{-2}\right) = -150$$

$$C = \frac{-150}{\left(\ln 10^{-3} - \ln\ 2\cdot 10^{-2}\right)}$$

$$C = 50{,}1 \quad ....(3)$$

$$\textit{substitusikan pers (3) ke pers (1)}$$

$$B = -C \ln 10^{-3}$$

$$= -(50{,}1)(-6{,}91)$$

$$= 346{,}2$$

Sehingga

$$V = 50{,}1 \ln r + 346{,}2 \ volt$$

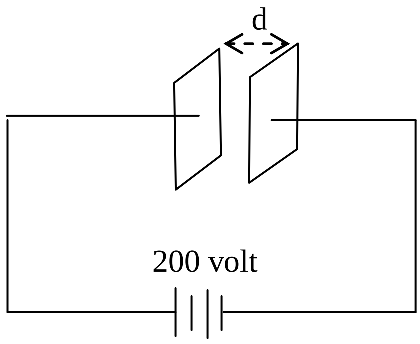
Untuk mendapatkan E gunakan hubungan

$$E = -\nabla V$$

$$= -\left(\hat{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{a}_\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)(50{,}1 \ln r + 346{,}2)$$

$$= -\frac{50{,}1}{r}\hat{a}_r \left(volt/m \right)$$

2. Dua plat paralel seperti pada gambar dimana daerah diantara kedua plat bebas muatan (ρ =0). Tentukan V dan E ?



Penyelesaian :

Dari gambar terlihat bahwa :

pada Y = 0 V = 200 Volt

Y = d V = 0 volt

Karena ρ =0 , maka :

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = C \qquad \Rightarrow C = konstanta$$

$$V = Cy + B \Rightarrow B = konstanta$$

berdasarkan syarat batas :

$$y = 0 \quad V = 200 \ volt$$

$$B = 200 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . (1)$$

$$y = d \quad V = 0 \ volt$$

$$0 = Cy + B \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$dari \ \ pers \ (1) \ dan \ (2) \ didapat \ :$$

$$C = -\frac{200}{d}$$

$$maka \ \ pers \ V \ adalah$$

$$V = -\frac{200}{d} y + 200 \ (volt)$$

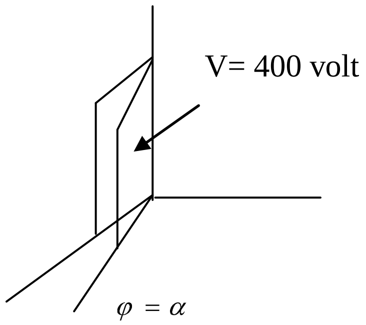
untuk menentukan E digunakan hubungan :

$$E = -\nabla V$$

$$= -\left(\hat{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(-\frac{200}{d}y + 200\right)$$

$$= \frac{200}{d}\hat{a}_y \left(volt/m\right)$$

3. Jika efek sisi diabaikan dan sumbu z diisolasi, carilah V dan E diantara permukaan keping dalam gambar dibawah ini ?



Penyelesaian :

Karena potensial konstan terhadap r dan z , persamaan laplace menjadi

$$\frac{1}{r}\frac{d^2V}{d\varphi^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = A \qquad \Rightarrow A = kons\tan ta$$

$$V = A\varphi + B \qquad \Rightarrow B = kons\tan ta$$

Dengan syarat batas

$$V = 0 \qquad \varphi = 0$$

$$0 = A(0) + B$$

$$B = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$V = 400 \qquad \varphi = \alpha$$

$$400 = A(\alpha) + B \ldots\ldots\ldots (2)$$

dari pers (1) dan (2) diperoleh :

$$A \cdot \alpha = 400$$

$$A = \frac{400}{\alpha}$$

sehingga persamaannya menjadi :

$$V = \frac{400}{\alpha}\varphi \quad (Volt)$$

untuk menentukan harga E digunakan hubungan :

$$E = -\nabla V$$

$$= -\left(\hat{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{a}_\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{400}{\alpha}\varphi\right)$$

$$= -\frac{400}{r\alpha}\hat{a}_\varphi \left(V/m\right)$$

4. Dalam koordinat bola V = 0 ; untuk r = 10 cm dan V = 95 Volt untuk r = 2 m. Carilah V dan E diantara kedua permukaan bola tersebut .

   Penyelesaian :

Syarat batas :

$$V = 0 \qquad r = 10\,cm = 0{,}1m$$

$$V = 95 \qquad r = 2m$$

persamaan Laplacenya adalah :

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0$$

$$r^2 \frac{\partial V}{\partial r} = C \qquad \Rightarrow C = kons\tan ta$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{C}{r^2}$$

$$V = -\frac{C}{r} + B \qquad \Rightarrow B = kons\tan ta$$

untuk

$V = 0 \qquad r = 10\,cm = 0{,}1m$

$0 = -10C + B$ .... (1)

untuk

$V = 95 \qquad r = 2m$

$$95 = -\frac{1}{2}C + B$$

$190 = C + 2B$ .... (2)

dari pers (1) dan (2) didapat :

$$\begin{array}{ll} B - 10C = 0 & \| \times 2 \\ \underline{2B + C = 190} & \| \times 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 2B - 20C = 0 & \\ \underline{2B + C = 190} & - \\ -21C = -190 & \end{array}$$

$C = 9{,}05$ .... (3)

substitusi pers (3) ke pers (1)

$B = 10C$

$B = 90{,}5$

maka persamaannya menjadi :

$$V = -\frac{9{,}05}{r} + 90{,}5 \ (volt)$$

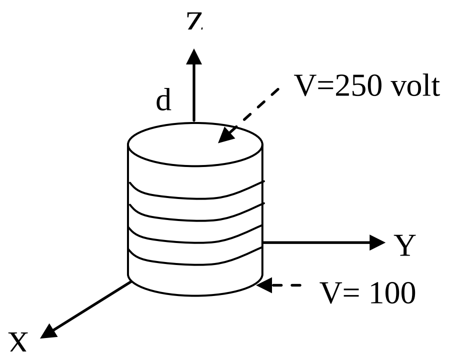
untuk menentukan E gunakan hubungan :

$$E = -\nabla V$$

$$= -\left(\hat{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{a}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{a}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)\left(-\frac{9{,}05}{r} + 90{,}5\right)$$

$$= 9{,}05 \ \ln r \ \hat{a}_r \ \left(V/m\right)$$

5. Dua piringan seperti pada gambar dibawah ini dipisahkan sejauh 5 mm, tentukan V dan E diantara piringan tesebut dengan menganggap ρ = 0



Syarat Batas :

$V = 100 \ volt \qquad Z = 0$

$V = 250 \ volt \qquad Z = d$

Persamaan laplacenya adalah ;

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = A \qquad \Rightarrow A = kons\tan ta$$

$$V = Az + B \ \Rightarrow B = kons\tan ta$$

berdasarkan syarat batas

$V = 100 \ volt \qquad Z = 0$

$100 = A(0) + B$

$B = 100$ ....(1)

$V = 250 \ volt \qquad Z = d$

$250 = A \cdot d + B$ ....(2)

dari pers (1) dan (2) diperoleh :

$$A = \frac{150}{d}$$

maka

$$V = \frac{150}{d} z + 100 \ (volt)$$

Untuk menentukan E gunakan hubungan :

$$E = -\nabla V$$

$$= -\left(\hat{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{a}_\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{150}{d} z + 100\right)$$

$$= -\frac{150}{d}\hat{a}_z \ (V/m)$$

DAFTAR PUSTAKA

1. Boas, Mary L. *Mathematical Methads in The Physical Sciences*. 1983, Jhon Wiley & Sons. Inc
2. Edminister, Josep A. *Theory And Problems Of Electromagnetics (Schaum Series)*. 1984, Mc Graw – Hill. Inc
3. Feymen, Richard. *The Feymen Lecturey on Physics Mainly Electromagneticsm and Matter*. 1966. Addis on-Wesly Publishing Company.
4. Sadiku, Mathew N. O. *Elements Of Electromagnetics*. 1989, Saundres College Publishing.
5. Spiegel, Murray R. *Theory And Problems Of Vektor Analysis (Schaum Series)*. 1959, Mc Graw- Hill. Inc