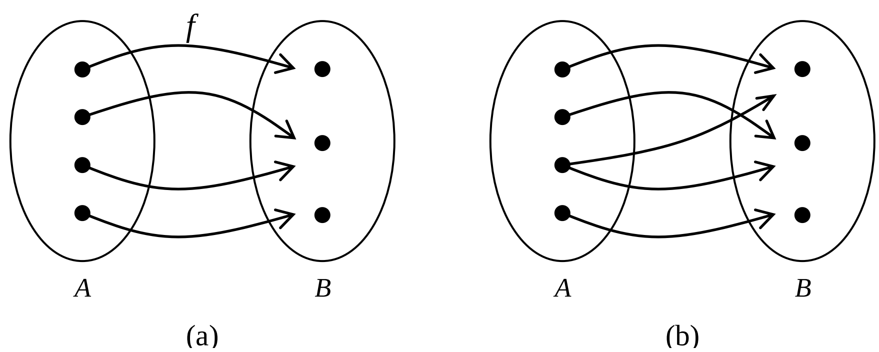
BAB 2
FUNGSI

2.1 Fungsi dan Grafiknya

2.1.1 Definisi Fungsi

Fungsi didefinisikan sebagai aturan yang memetakan setiap unsur himpunan A pada sebuah unsur himpunan B. Himpunan A disebut *daerah asal* (domain) dan himpunan B disebut *daerah hasil* (range). Fungsi dapat diibaratkan sebuah sistem yang menghasilkan output unik untuk setiap input (satu input hanya menghasilkan satu output).



Gambar 2.1 (a) Fungsi dan (b) *bukan* fungsi.

Gambar 2.1 mengilustrasikan hubungan antara dua buah himpunan. Pada **Gambar 2.1(a)** setiap unsur himpunan A tepat dipetakan pada sebuah unsur himpunan B. Hubungan yang memetakan kedua himpunan ini disebut fungsi. Sebaliknya, pada **Gambar 2.1(b)** ada unsur himpunan A yang dipetakan pada dua buah unsur (atau dapat lebih) himpunan B. Hubungan yang memetakan kedua himpunan seperti ini *bukan* sebuah fungsi.

Fungsi dilambangkan oleh huruf tunggal seperti *f, g, h, F, G,* dan lainya. Lambang $f(x)$, dibaca "*f* dari *x*" atau "*f* pada *x*", menunjukkan nilai yang diberikan *f* kepada *x*. Aturan fungsi sering dinyatakan dalam bentuk persamaan $y = f(x)$ dengan x disebut *variabel bebas* dan y disebut *variabel terikat.*

CONTOH 1 Jika $f(x) = x^2 - 2x + 4$, cari $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, $f(a)$, dan $f(1/a)$.

Penyelesaian

$$f(0) = (0)^2 - 2(0) + 4 = 4$$

$$f(1) = (1)^2 - 2(1) + 4 = 3$$

$$f(-1) = (-1)^2 - 2(-1) + 4 = 7$$

$$f(a) = a^2 - 2a + 4$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a^2} - \frac{2}{a} + 4$$

CONTOH 2 Tentukan $f(1)$ jika $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$.

Penyelesaian

Jika $x = 1$ dimasukkan ke fungsi di atas, penyebutnya nol. Pembagian dengan nol tidak didefinisikan. Jadi, fungsi $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ tidak terdefinisi pada $x = 1$.

2.1.2 Daerah Asal dan Daerah Hasil dari Fungsi

Daerah asal sebuah fungsi ada yang dinyatakan secara eksplisit dan tidak. Fungsi "$f(x) = x^2$, $0 \le x \le 5$" merupakan contoh fungsi yang daerah asalnya dinyatakan secara eksplisit, yakni bilangan real yang memenuhi pertidaksamaan $0 \le x \le 5$. Jika daerah asal fungsi $y = f(x)$ tidak disebutkan, daerah asalnya diasumsikan sebagai himpunan semua bilangan real sedemikian rupa sehingga fungsi $y = f(x)$ terdefinisi. Himpunan ini disebut daerah asal alami.

Dua hal yang harus diperhatikan dalam menentukan daerah asal alami, yakni menghindari *pembagian dengan nol* dan *akar bilangan negatif*. Daerah asal fungsi f dilambangkan oleh D_f.

Daerah hasil dari fungsi f, dilambangkan oleh R_f, adalah himpunan bilangan real $f(x)$ untuk seluruh $x \in D_f$.

Daerah asal alami fungsi f, D_f, dan daerah hasilnya, R_f, dari beberapa fungsi diperlihatkan pada **Tabel 2-1**.

Tabel 2-1

Daerah asal dan daerah hasil beberapa fungsi.

Fungsi	Daerah Asal (D_f)	Daerah Hasil (R_f)
$f(x) = x^2$	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \infty)$
$f(x) = 1/x$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$f(x) = \sqrt{x}$	$(0, \infty)$	$(0, \infty)$
$f(x) = \sqrt{1-x}$	$(-\infty, 1]$	$(0, \infty)$
$f(x) = \sqrt{1-x^2}$	$[-1, 1]$	$[0, 1]$

CONTOH 3 Cari daerah asal masing-masing fungsi berikut.

(a) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ (b) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ (c) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

Penyelesaian

(a) Hindari pembagian dengan nol maka daerah asal untuk fungsi $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ adalah bilangan real x yang memenuhi syarat $x - 1 \neq 0$. Jadi,

$$D_f : \{x \mid x \neq 1, x \in R\} \text{ atau } (-\infty, 1) \cup (1, \infty).$$

(b) Hindari akar bilangan negatif maka daerah asal untuk fungsi $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ adalah bilangan real x yang memenuhi syarat $4-x^2 \geq 0$. Selanjutnya,

$$4-x^2 \geq 0$$
$$x^2 \leq 4$$
$$|x| \leq 2 \qquad \text{atau} \qquad -2 \leq x \leq 2.$$

Jadi, D_f : [–2, 2].

(c) Hindari pembagian dengan nol dan akar bilangan negatif maka daerah asal untuk fungsi $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ adalah bilangan real yang memenuhi $4-x^2>0$. Lihat cara pada jawaban (b), jadi D_f : (–2, 2).

2.1.3 Grafik Fungsi

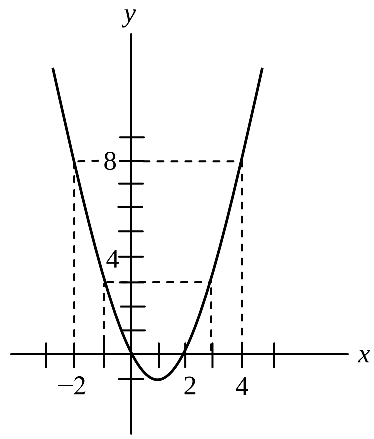
Misalnya x merupakan unsur himpunan daerah asal yang berkaitan dengan unsur himpunan daerah hasil y, titik-titik (x, y) dalam koodinat bidang akan membentuk sebuah grafik fungsi. Grafik fungsi $y = x + 3$, sebagai contoh, merupakan sekumpulan titik dengan koordinat (x, y) yang memenuhi $y = x + 3$.

CONTOH 4 Gambarkan grafik fungsi $f(x)=x^2-2x$ pada koordinat bidang.

Penyelesaian

Secara kasar, penggambaran grafik dapat dilakukan dengan merajah beberapa titik yang memenuhi fungsi di atas, kemudian dengan menghubungkan setiap titik, diperoleh grafiknya sebagai berikut.

x	$y = f(x)$
–2	8
–1	3
0	0
1	–1
2	0
3	3
4	8



Gambar 2.2.

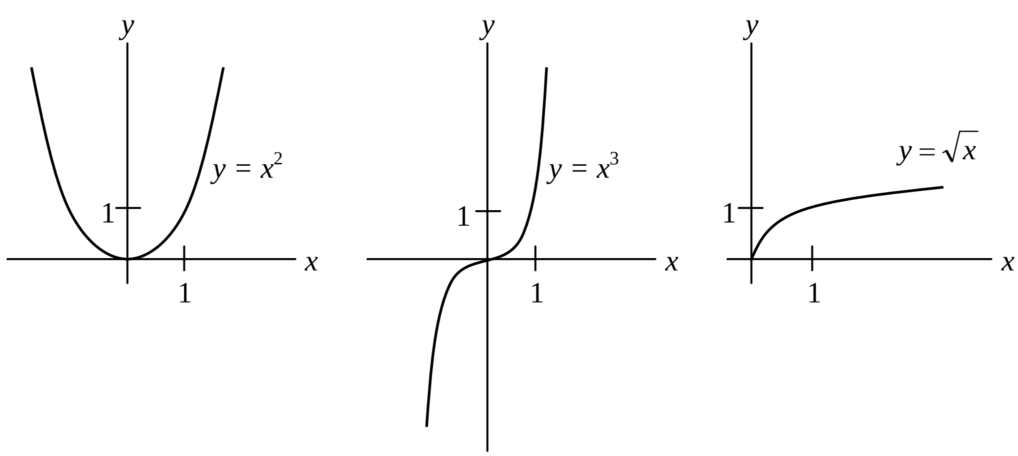
Titik-titik potong grafik dapat ditentukan sebagai berikut. Titik potong dengan sumbu-x, y = 0 maka

$$x^2 - 2x = 0$$
$$x(x-2) = 0$$

sehingga diperoleh x = 0 dan x = 2.

Dengan demikian, grafik $f(x) = x^2 - 2x$ memotong sumbu-x pada titik (0, 0) dan (2, 0). Sementara itu, titik potong dengan sumbu-y, x = 0 maka y = f(0) = 0, jadi grafik memotong sumbu-y di titik (0, 0).

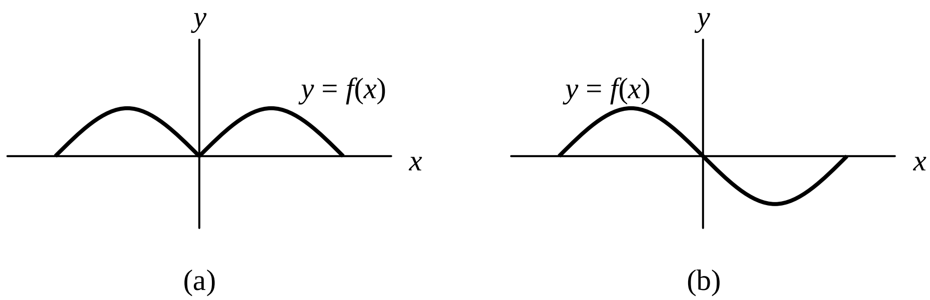
Beberapa contoh grafik fungsi pangkat yang sering muncul dalam kalkulus diperlihatkan pada **Gambar 2.3** berikut.



Gambar 2.3

2.1.4 Kesimetrian Grafik: Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil

Gambar 2.4 menunjukkan dua buah grafik fungsi. Pada **Gambar 2.4(a)**, grafik $y = f(x)$ simetri terhadap sumbu-y, sedangkan pada Gambar 2.4(b) simetri terhadap titik asal. Fungsi yang grafiknya simetri terhadap sumbu-y disebut fungsi genap. Sementara itu, fungsi yang grafiknya simetri terhadap titik asal disebut fungsi ganjil.



Gambar 2.4 Kesimetrian grafik $f(x)$: (a) simetri terhadap sumbu-y dan (b) simetri terhadap titik asal.

Kesimetrian grafik dapat diprediksi dari persamaan fungsi. Sebuah fungsi dikatakan **fungsi genap** (simetri terhadap sumbu-y) jika

$$\boxed{f(-x) = f(x)}$$

dan **fungsi ganjil** (simetri terhadap titik asal) jika

$$\boxed{f(-x) = -f(x)\,.}$$

Fungsi yang tidak memenuhi salah satu dari persamaan di atas bukan merupakan fungsi genap atau fungsi ganjil (bukan keduanya).

CONTOH 5 Periksa apakah fungsi-fungsi berikut merupakan fungsi genap, fungsi ganjil, atau bukan keduanya.

(a) $f(x) = x$ (b) $f(x) = x^2$ (c) $f(x) = x^3 + 2x$

Penyelesaian

(a) $f(x) = x$ maka $f(–x) = –x$ sehingga diperoleh $f(–x) = –f(x)$. Jadi, $f(x) = x$ merupakan fungsi ganjil.

(b) $f(x) = x^2$ maka $f(-x) = (-x)^2 = x^2$ sehingga diperoleh $f(-x) = f(x)$. Jadi, $f(x) = x^2$ merupakan fungsi genap.

(c) $f(x) = x^3 + 2$ maka $f(-x) = (-x)^3 + 2 = -x^3 + 2$. Karena $f(-x) \neq f(x)$ dan $f(-x) \neq -f(x)$, $f(x) = x^3 + 2$ bukan merupakan fungsi genap atau fungsi ganjil.

2.1.5 Fungsi Sebagian-sebagian

Tinjau sebuah fungsi yang didefinisikan sebagai berikut.

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ x^2 - 5, & x \geq 1 \end{cases}$$

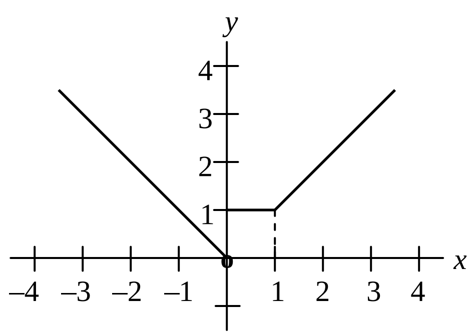
Ungkapan di atas menyatakan bahwa $f(x) = x$ untuk $x < 1$ dan $f(x) = x^2 - 5$ untuk $x \geq 1$. Fungsi yang didefinisikan berbeda pada tiap bagian domainnya, seperti pada contoh di atas, disebut fungsi sebagian-sebagian.

CONTOH 6 Gambarkan grafik fungsi berikut.

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 1 \\ x & x \geq 1 \end{cases}$$

Penyelesaian

Pada interval $x < 0$, $f(x) = -x$, pada interval $0 \leq x < 1$, $f(x) = 1$, dan pada interval $x \geq 1$, $f(x) = x^2$. Grafiknya sebagai berikut.

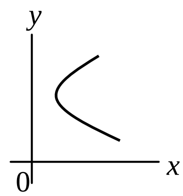


Tanda bulat kosong [○] menunjukkan bahwa bagian $f(x)$ tidak didefinisikan pada bagian domain yang sesuai.

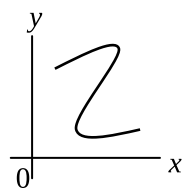
SOAL-SOAL LATIHAN 2.1

1. Manakah di antara grafik berikut yang merupakan fungsi atau bukan fungsi? Berikan alasannya.

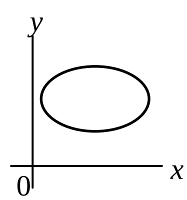
(a)



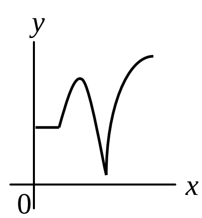
(b)



(c)



(d)



Pada soal nomor 2 – 5 berikut, tentukan daerah asal dan daerah hasil setiap fungsi.

2. $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$

3. $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

4. $H(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t^2 - 4t - 5}}$

5. $h(w) = \dfrac{1}{w^2 - 2w - 3}$

Pada soal nomor 6 – 8 berikut, gambarkan grafik fungsinya.

6. $f(x) = -x^2 + 2$

7. $h(t) = \sqrt{t}$

8. $g(s) = \dfrac{1}{s}$

Pada soal nomor 9 - 11, tentukan apakah fungsi tersebut merupakan fungsi genap, fungsi ganjil, atau bukan keduanya.

9. $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

10. $h(x) = |x^3 + x|$

11. $F(t) = t^{-4}$

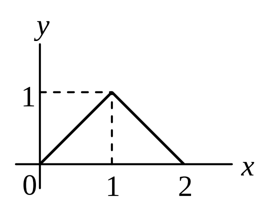
Pada soal nomor 12 – 13, gambarkan grafik fungsinya. Kemudian tentukan daerah asal dan daerah hasilnya.

12. $f(x) = \begin{cases} x-3, & x < -1 \\ -2x, & x \geq -1 \end{cases}$

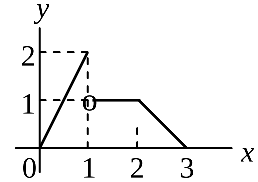
13. $h(s) = \begin{cases} s, & s < 0 \\ -s^2, & 0 \leq s < 5 \\ 2s+1, & s \geq 5 \end{cases}$

Pada soal nomor 14 – 15, tentukan persamaan fungsinya.

14.

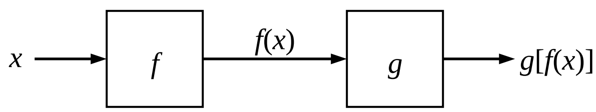


15.



2.2 Fungsi Komposisi

Di awal telah disebutkan bahwa fungsi dapat diibaratkan sebuah sistem yang menghasilkan output unik untuk setiap input (satu input hanya menghasilkan satu output). Sekarang tinjau dua sistem yang terkait satu sama lain (**Gambar 2.5**). Sistem pertama mendapat input x sehingga menghasilkan output $f(x)$. Output dari sistem pertama merupakan input dari sistem kedua sehingga sistem kedua menghasilkan output $g(f(x))$. Fungsi $g(f(x))$ disebut fungsi komposisi.



Gambar 2.5 Komposisi dua fungsi.

Komposisi fungsi g pada f dilambangkan oleh $g \circ f$. Aturannya ditulis sebagai berikut.

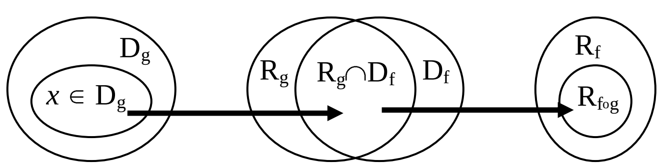
$$\boxed{(g \circ f)(x) = g[f(x)]}$$

Berdasarkan aturan di atas jelas bahwa $f \circ g$ berbeda dengan $g \circ f$.

CONTOH 1 Jika $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 9}$ dan $g(x) = \sqrt{x}$, cari (a) daerah asal dari $(f \circ g)(x)$ dan (b) $(f \circ g)(2)$.

Penyelesaian

(a) Untuk menentukan daerah asal dari $f \circ g$, perhatikan gambar berikut.



Daerah asal $g(x) = \sqrt{x}$ adalah $D_g = [0, \infty)$

Daerah hasil $g(x) = \sqrt{x}$ adalah $R_g = [0, \infty)$

Daerah asal $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 9}$ adalah $D_f = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$ atau $x \neq \pm 3$.

Dari gambar di atas, daerah asal $f \circ g$ adalah $x \in D_g$ yang dipetakan oleh g ke daerah $R_g \cap D_f$. Karena $R_g \cap D_f = [0, \infty) \cap \{(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)\} = [0, 3) \cup (3, \infty) = R_f$ kecuali $x = 3$. Ini berarti $g(x) = \sqrt{x} \neq 3$ sehingga $x \neq 9$. Jadi, daerah asal dari $f \circ g$ adalah $[0, 9) \cup (9, \infty)$.

(b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 9}$ dan $g(x) = \sqrt{x}$ maka

$$f \circ g = f[g(x)] = f(\sqrt{x}) = \frac{\sqrt{x}}{[\sqrt{x}]^2 - 9} = \frac{\sqrt{x}}{x - 9}$$

sehingga diperoleh $(f \circ g)(2) = \dfrac{\sqrt{2}}{2 - 9} = -\dfrac{1}{7}\sqrt{2}$.

CONTOH 2 Diketahui $f(x) = \sqrt{x}$ dan $g(x) = x^2$. Tentukan daerah asal dari $g \circ f$.

Penyelesaian

Daerah asal $f(x) = \sqrt{x}$ adalah $D_f = [0, \infty)$

Daerah hasil $f(x) = \sqrt{x}$ adalah $R_f = [0, \infty)$

Daerah asal $g(x) = x^2$ adalah $D_g = (-\infty, \infty)$

Selanjutnya, daerah asal $f \circ g$ adalah $x \in D_f$ yang dipetakan oleh g ke daerah $R_f \cap D_g$. Karena $R_f \cap D_g = [0, \infty) \cap (-\infty, \infty) = [0, \infty) = R_f$ maka daerah asal $g \circ f$ adalah $[0, \infty)$.

CONTOH 3 Nyatakan fungsi $s(x) = (x^2 + 5)^4$ sebagai fungsi komposisi f o g.

Penyelesaian

Ambil $g(x) = x^2 + 5$ maka $s(x) = x^4$ sehingga $s(x) = f \circ g = f(g(x))$.

SOAL-SOAL LATIHAN 2.2

1. Jika $f(x) = x + 2$ dan $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$, tentukan
   (a) $f \circ g$
   (b) $(f \circ g)(2)$
   (c) $g \circ f$
   (d) $(g \circ f)(-1)$

2. Jika $f(x) = \sqrt{x}$ dan $g(x) = \dfrac{1}{9 - x^2}$, tentukan daerah asal dan daerah hasil dari:
   (a) $f \circ g$
   (b) $g \circ f$

Pada soal nomor 3–5, $h = f \circ g$. Tentukan $f(x)$ dan $g(x)$ jika:

3. $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

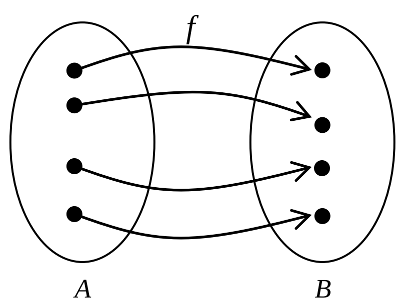
4. $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} - 4}$

5. $h(x) = (x + 1)^5$

2.3 Fungsi Satu ke Satu dan Fungsi Invers

2.3.1 Fungsi Satu ke Satu

Perhatikan **Gambar 2.6**. Setiap unsur himpunan A hanya berhubungan dengan satu unsur himpunan B yang berbeda. Sebaliknya, setiap himpunan bagian B juga hanya berhubungan dengan satu unsur himpunan A yang berbeda. Hubungan seperti ini dikatakan hubungan satu ke satu. Fungsi yang memetakan setiap unsur himpunan A ke satu unsur himpunan B atau sebaliknya disebut fungsi satu ke satu.



Gambar 2.6.

Definisi fungsi satu ke satu sebagai berikut.

> Sebuah fungsi $f(x)$ disebut fungsi satu ke satu pada daerah asalnya, D_f, jika $f(a) \neq f(b)$ untuk $a \neq b$.

Grafik satu ke satu merupakan grafik monoton murni (fungsi naik atau fungsi turun) pada daerah asalnya. Dengan demikian, setiap fungsi yang monoton murni pasti merupakan fungsi satu ke satu.

CONTOH 1 Kenali apakah fungsi berikut merupakan fungsi satu ke satu atau bukan.

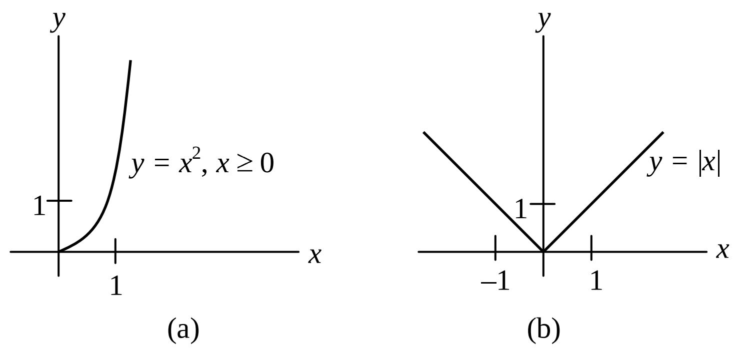
(a) $f(x) = x^2$, $x \geq 0$ dan (b) $f(x) = |x|$

Penyelesaian

Grafik fungsi $f(x) = x^2,\ x \geq 0$ dan $f(x) = |x|$ masing-masing diperlihatkan pada **Gambar 2.7**.

(a) Dari **Gambar 2.7(a)** jelas bahwa $f(x)$ monoton naik pada $x \geq 0$. Dengan kata lain, $f(a) \neq f(b)$ untuk $a \neq b$. Jadi, $f(x) = x^2,\ x \geq 0$ merupakan fungsi satu ke satu.

(b) Dari **Gambar 2.7(b)** jelas bahwa $f(x)$ monoton turun pada $x < 0$. $f(x)$ monoton naik pada $x \geq 0$. Dengan kata lain, ada $f(a) = f(b)$ untuk $a \neq b$ {sebagai contoh: $f(-1) = f(1) = 1$}. Jadi, $f(x) = |x|$ *bukan* fungsi satu ke satu.



Gambar 2.7.

2.3.2 Fungsi Invers

Karena setiap output fungsi satu ke satu berasal dari satu input, fungsi satu ke satu dapat dibalikkan untuk mengirimkan output kembali ke inputnya. Fungsi yang didefinisikan dengan membalikkan fungsi satu ke satu disebut *invers dari f*. Invers dari f diberi simbol f^{-1} (dibaca: *f invers*). Perhatikan bahwa tanda –1 pada f^{-1} bukan menyatakan pangkat. Dengan kata lain, dalam hal ini $f^{-1}(x) \neq 1/f(x)$.

Karena grafik fungsi satu ke satu merupakan grafik monoton murni, berlaku teorema berikut.

Jika f monoton murni pada daerah asalnya, f memiliki invers.

Selanjutnya, dua buah fungsi, f dan f^{-1}, dikatakan pasangan invers jika dan hanya jika

$$\boxed{f(f^{-1}(x)) = x \text{ dan } f^{-1}(f(x)) = x\,.}$$

CONTOH 2 Buktikan bahwa $f(x) = 3x$ dan $g(x) = \frac{x}{3}$ merupakan pasangan invers.

Penyelesaian

Pertama ambil $f^{-1}(x) = g(x) = \frac{x}{3}$ maka

$$f(f^{-1}(x)) = f(g(x)) = f\left(\frac{x}{3}\right) = 3\left(\frac{x}{3}\right) = x\,.$$

Selanjutnya,

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(3x) = \frac{3x}{3} = x\,.$$

Karena memenuhi $f(f^{-1}(x)) = x$ dan $f^{-1}(f(x)) = x$ maka $f(x) = 3x$ dan $g(x) = \frac{x}{3}$ merupakan pasangan invers.

CONTOH 3 Tunjukkan bahwa $f(x) = 2x + 3$ memiliki invers dan tentukan inversnya. Verifikasi hasilnya.

Penyelesaian

Grafik $f(x) = 2x + 3$ merupakan garis lurus dengan gradien 2 maka f monoton naik (murni) pada $D_f = (-\infty, \infty)$. Karena f monoton murni, f memiliki invers.

Untuk mendapatkan inversnya, ambil

$$y = f(x) = 2x + 3 \Leftrightarrow x = \frac{y-3}{2}.$$

Tukarkan x dan y pada hasil terakhir maka

$$y = \frac{x-3}{2}.$$

Dengan demikian diperoleh

$$f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}\,.$$

Untuk memverifikasi hasilnya,

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x-3}{2}\right) = 2\left(\frac{x-3}{2}\right) + 3 = x$$

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x+3) = \frac{(2x+3)-3}{2} = x$$

Dengan demikian jelas bahwa invers dari fungsi $f(x) = 2x+3$ adalah $f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{2}$.

SOAL LATIHAN 2.3

Untuk soal No. 1 – 4, kenali apakah fungsi tersebut satu ke satu atau bukan.

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = x+2$
3. $f(x) = x^3,\ x \geq 0$
4. $f(x) = \sqrt{x}$

Soal No. 5 – 7 Tentukan invers dari fungsi tersebut.

5. $f(x) = \dfrac{1}{x},\ x > 0$
6. $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$
7. $f(x) = 5-4x$

Soal No. 8 – 10, tentukan $f^{-1}(2)$ jika

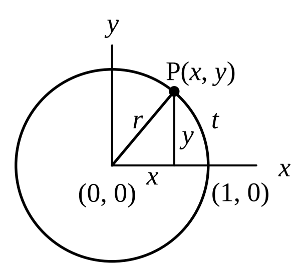
8. $f(x) = x^2+1,\ x \geq 0$
9. $f(x) = x^{2/3},\ x > 0$
10. $f(x) = \dfrac{x}{x+2},\ x > -2$

2.4 Fungsi Trigonometri

2.3.1 Definisi Fungsi Trigonometri

Perhatikan sebuah segitiga yang berada pada lingkaran satuan (lingkaran dengan jari-jari 1 satuan) seperti ditunjukkan pada **Gambar 2.8**. Nilai sinus dan cosinus suatu sudut didefinisikan sebagai berikut.

$$\boxed{\sin t = y \text{ dan } \cos t = x}$$



Gambar 2.8

dengan t dinyatakan dalam satuan radian (rad).

Dalam satuan rad, t didefinisikan sebagai panjang busur dibagi jari-jari. Untuk jari-jari 1 satuan, nilai t sama dengan panjang busur. Dengan mengingat bahwa panjang keliling lingkaran berjari-jari r adalah $2\pi r$ maka, untuk r = 1, panjang keliling lingkaran adalah 2π. Sebagai contoh, berdasarkan pada definisi dan **Gambar 2.6** di atas, diperoleh beberapa nilai sin t dan cos t seperti pada **Tabel 2-1** berikut.

Tabel 2-1

P(x, y)	t	sin t	cos t
(1, 0)	0	0	1
(0, 1)	$\pi/2$	1	0
(−1, 0)	π	0	−1
(0, −1)	$3\pi/2$	−1	0

Hubungan antara satuan radian (rad) dan derajat sebagai berikut.

$$180^o = \pi \text{ rad atau } 1 \text{ rad} = 180^o/\pi.$$

Selain fungsi sinus dan cosinus, fungsi-fungsi trigonometri lainnya sebagai berikut.

Tangent : $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ Cotangent : $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$

Secant : $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ Cosecant : $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$

Beberapa nilai fungsi trigonometri pada t tertentu diperlihatkan pada **Tabel 2-2**.

Tabel 2-2

x	**0**	**30º atau π/6**	**45º atau π/4**	**60º atau π/3**	**90º atau π/2**
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos x	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan x	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	Tidak didefinisikan

Beberapa rumus berkaitan dengan fungsi trigonometri sebagai berikut.

$$\sin(-x) = -\sin x \qquad \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x \qquad \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

CONTOH 1 Tentukan (a) $\sin\frac{5\pi}{4}$ dan (b) $\cos\frac{5\pi}{12}$.

Penyelesaian

(a) $\sin\frac{5\pi}{4} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\pi\cos\frac{\pi}{4} + \cos\pi\sin\frac{\pi}{4} = 0\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2} + (-1)(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

(b) $\cos\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = (\frac{1}{2}\sqrt{2})(\frac{1}{2}\sqrt{3}) + (\frac{1}{2}\sqrt{2})(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$.

CONTOH 2 Buktikan bahwa $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$.

Penyelesaian

Dari rumus $\cos(x \pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin x$ diperoleh

$$\cos 2t = \cos(t+t) = \cos t\cos t - \sin t\sin t = \cos^2 t - \sin^2 t \qquad (*)$$

Selanjutnya, dari rumus $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ maka $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ atau $\cos^2 = 1 - \sin^2 t$ sehingga (*) menjadi

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = (1 - \sin^2 t) - \sin^2 t = 1 - 2\sin^2 t$$

2.3.2 Grafik Fungsi Trigonometri

Grafik fungsi-fungsi trigonometri diperlihatkan pada **Gambar 2.9**.

2.3.3 Periode dan Amplitudo pada Fungsi Trigonometri

Periode Secara umum, suatu fungsi *f*(*x*) dikatakan periodik jika ada sebuah bilangan positif *p* sedemikian sehingga

$$\boxed{f(x+p) = f(x)}$$

untuk setiap *x*. Nilai *p* terkecil pada yang memenuhi persamaan di atas disebut periode.

Fungsi-fungsi trigonometri merupakan fungsi periodik. Sebagai contoh, dapat dibuktikan bahwa $\sin x = \sin(x + 2\pi)$. Selain itu, juga dipenuhi

$$\sin(x+4\pi) = \sin(x-2\pi) = \sin(x+12\pi) = \sin x .$$

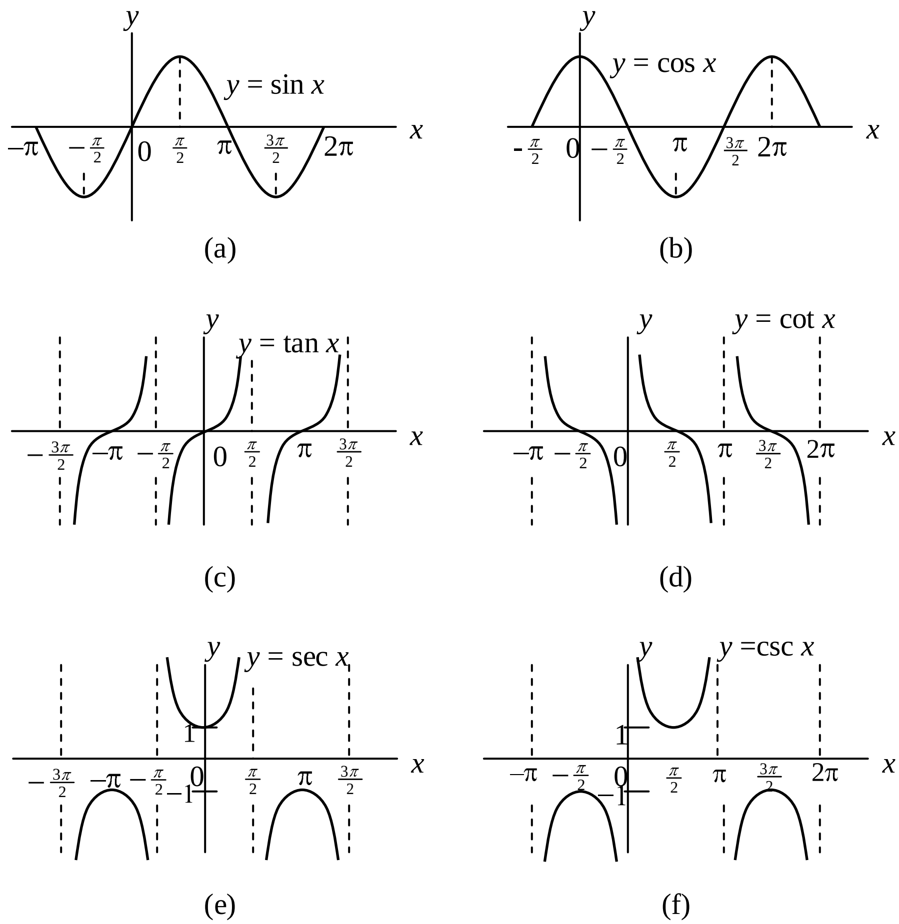
Nilai-nilai -2π, 2π, 4π, dan 12π adalah semua bilangan *p* yang memenuhi $\sin(x+p) = \sin x$. Karena 2π merupakan nilai *p* terkecil, periode dari fungsi sinus adalah 2π.

Selanjutnya, jika fungsi sinus dinyatakan sebagai

$$y = \sin\left(\frac{2\pi}{T}x\right),$$

periodenya adalah T sebab

$$\sin\left[\frac{2\pi}{T}(x+T)\right]=\sin\left(\frac{2\pi}{T}x+2\pi\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{T}x\right).$$



Gambar 2.9 Grafik fungsi trigonometri: (a) sinus, (b) cosinus, (c) tangent, (d) cotangent, (e) secant, dan (d) cosecant.

CONTOH 3 Tentukan periode fungsi trigonometri berikut: $y=4\sin 4\pi x$.

Penyelesaian

Bandingkan $y=4\sin 4\pi x$ dengan $y=\sin\left(\frac{2\pi}{T}x\right)$ maka diperoleh

$$\frac{2\pi}{T}=4\pi \rightarrow T=\frac{1}{2}.$$

Jadi, periode fungsi $y=4\sin 4\pi x$ adalah ½.

Amplitudo Jika fungsi periodik *f* mempertahankan nilai maksimum dan minimum, amplitudo *A* didefinisikan sebagai setengah kali jarak antara nilai maksimum dan nilai minimum.

CONTOH 4 Tentukan amplitudo dari (a) $y = 4\sin 2x$ dan (b) $y = 5 + 2\sin x$.

Penyelesaian

(a) Daerah hasil dari $y = 4\sin 2x$ adalah [–4, 4] maka

$$A = \tfrac{1}{2}\left(y_{\max} - y_{\min}\right) = \tfrac{1}{2}[4 - (-4)] = 4.$$

(b) Daerah hasil dari $y = 5 + 2\sin x$ adalah [3, 7] maka

$$A = \tfrac{1}{2}\left(y_{\max} - y_{\min}\right) = \tfrac{1}{2}(7 - 3) = 2.$$

SOAL-SOAL LATIHAN 2.3

1. Ubah ukuran derajat berikut ke dalam radian.
   (a) 45^o
   (b) 60^o
   (c) 120^o
   (d) -150^o
2. Tanpa menggunakan kalkulator, hitung:
   (a) $\sin 75^o$
   (b) $\cos 225^o$
   (c) $\tan 15^o$
   (d) $\csc 15^o$
3. Buktikan bahwa
   (a) $\sin x(\csc x - \sin x) = \cos^2 x$
   (b) $(1 - \sin x)(1 + \sin x) = \cos^2 x$
4. Tentukan periode dan amplitudo fungsi periodik berikut. Kemudian gambarkan grafiknya.
   (a) $y = 3\cos 2t$
   (b) $y = 2 - 2\sin 3t$
5. Mana di antara fungsi-fungsi trigonometri berikut yang merupakan fungsi ganjil atau genap atau bukan keduanya?
   (a) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
   (b) $y = -\cos(\pi - x)$
   (c) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
   (d) $y = \sin(\pi - x)$

2.4 Fungsi Eksponen dan Logaritma

2.4.1 Fungsi Eksponen

Fungsi eksponen umum Fungsi eksponen umum didefinisikan sebagai berikut. Jika a > 1 dan $a \in$ R, fungsi

$$f(x) = a^x$$

disebut fungsi eksponen dengan basis a.

Sifat-sifat eksponen sebagai berikut. Jika a > 0 dan b > 0, persamaan berikut benar untuk semua bilangan real x dan y.

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
3. $(a^x)^y = a^{xy}$
4. $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
5. $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$

Fungsi eksponen asli Fungsi eksponen dengan basis $a = e$ = 2,718281828459045…, yakni $f(x) = e^x$, disebut fungsi eksponen asli.

Fungsi eksponen asli sering digunakan untuk memodelkan pertumbuhan atau peluruhan eksponen. Secara umum, fungsi pertumbuhan atau peluruhan eksponen dinyatakan oleh

$$\boxed{y = y_0 e^{kx}}$$

dengan k > 0 untuk pertumbuhan eksponen, k > 0 untuk peluruhan eksponen, dan y_0 adalah nilai awal.

CONTOH 1 Sejumlah bakteri yang tumbuh setelah t jam memenuhi persamaan $B = 100e^{0,693t}$. (a) Berapakah jumlah bakteri pada saat awal? (b) Berapa jumlah bakteri setelah 6 jam?

Penyelesaian

(a) Jumlah bakteri pada saat awal, t = 0, adalah

$$B = 100e^{0,693t} = 100e^0 = 100\,.$$

(b) Jumlah bakteri setelah 6 jam, t = 6, adalah

$$B = 100e^{0,693t} = 100e^{0,693\cdot 6} = 100e^{4,138} = 100\cdot 62,677 = 6267,7 \approx 6268\,.$$

2.4.2 Fungsi Logaritma

Fungsi logaritma umum Fungsi logaritma dengan basis $a > 0$ dengan $a \neq 1$, $f(x) = {}^{a}\log x$, merupakan kebalikan dari fungsi eksponen $f(x) = a^x$. Dengan kata lain,

$$\boxed{y = a^x \;\Leftrightarrow\; x = {}^{a}\log y}$$

Fungsi logaritma asli Jika $a = e$, ${}^{e}\log x$ ditulis sebagai $\ln x$. Fungsi

$$\boxed{y = \ln x}$$

disebut fungsi logaritma asli. Fungsi ini merupakan kebalikan dari fungsi eksponen asli. Dengan demikian, $x = e^y \Leftrightarrow \ln x = y$.

Sifat-sifat logaritma dan eksponen natural sebagai berikut.

(1) $\ln 1 = 0$	(4) $\ln a^r = r \ln a$
(2) $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$	(5) $e^{\ln x} = x$, $x > 0$
(3) $\ln ab = \ln a + \ln b$	(6) $\ln e^y = y$

CONTOH 2 Tentukan x jika diketahui (a) ${}^{2}\log 8 = x$, (b) ${}^{x}\log 64 = 4$.

Penyelesaian

Gunakan rumus $y = a^x \Leftrightarrow x = {}^{a}\log y$.

(a) ${}^{2}\log 8 = x \Leftrightarrow 8 = 2^x \Leftrightarrow 2^3 = 2^x$ maka $x = 3$.

(b) ${}^{x}\log 64 = 4 \Leftrightarrow 64 = x^4 \Rightarrow x = \sqrt[4]{64} = 2\sqrt{2}$.

CONTOH 3 Sederhanakan ungkapan berikut.

(a) $e^{3\ln x}$ (c) $e^{\ln x^2 - y\ln x}$

(b) $\ln e^{-2x-3}$ (d) $e^{x-\ln x}$

Penyelesaian

(a) Gunakan sifat (4) dan (5) maka $e^{3\ln x} = e^{\ln x^3} = x^3$.

(b) Gunakan sifat (6) maka $\ln e^{-2x-3} = -2x-3$.

(c) Gunakan sifat (2), (3), (4), dan (5) maka $e^{\ln x^2 - y\ln x} = e^{\ln x^2 - \ln x^y} = e^{\ln \frac{x^2}{x^y}} = e^{\ln x^{2-y}} = x^{2-y}$.

(d) Gunakan sifat (2), (5), dan (6) maka $e^{x-\ln x} = e^{\ln e^x - \ln x} = e^{\ln \frac{e^x}{x}} = \dfrac{e^x}{x}$.

CONTOH 4 Tentukan *x* jika (a) $\ln x = 3t - 2$ dan (b) $e^{2x} = 10$.

Penyelesaian

Gunakan rumus $x = e^y \Leftrightarrow \ln x = y$ maka

(a) $\ln x = 3t - 2 \Leftrightarrow x = e^{3t-2}$.

(b) $e^{2x} = 10 \Leftrightarrow 2x = \ln 10$ sehingga $x = \frac{1}{2}\ln 10 \approx 1{,}15$.

CONTOH 5 Jumlah unsur radioaktif meluruh setiap saat memenuhi persamaan $N = N_0 e^{-kt}$, dengan $k > 0$ dan N_0 adalah jumlah unsur pada saat awal. Tentukan waktu yang diperlukan untuk meluruh sehingga jumlah unsur tersebut tinggal setengahnya (disebut waktu paruh). Nyatakan dalam *k*.

Penyelesaian

$N = N_0 e^{-kt} \Leftrightarrow \frac{1}{2}N_0 = N_0 e^{-kt}$ sehingga $e^{-kt} = \frac{1}{2}$. Selanjutnya, ambil logaritmanya maka

$$\ln e^{-kt} = \ln \tfrac{1}{2} \Leftrightarrow -kt = -\ln 2$$

sehingga diperoleh waktu paruhnya adalah $t = \dfrac{\ln 2}{k}$.

SOAL LATIHAN 2.4

Tentukan *x* jika diketahui:

1. $\log x = 3$
2. $2^x = 8$
3. $\ln x = 3t - 1$
4. $e^{3x} = 4$
5. $\log \dfrac{1}{2x} = 3$
