BAB 5
PENGGUNAAN TURUNAN

5.1 Nilai Ekstrim Fungsi

Nilai ekstrim fungsi adalah nilai yang berkaitan dengan maksimum atau minimum fungsi tersebut. Ada dua jenis nilai ekstrim, yaitu nilai ekstrim mutlak (global) dan nilai ekstrim relatif (relatif).

Nilai ekstrim mutlak didefinisikan sebagai berikut.

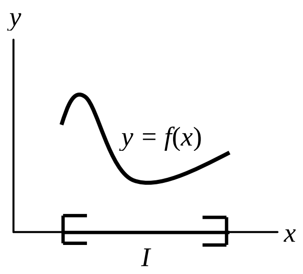
Misalnya I adalah selang tutup yang merupakan daerah asal dari f dan di dalamnya terdapat c (perhatikan **Gambar 5.1**),

(1) $f(c)$ disebut nilai maksimum mutlak f jika $f(c) \geq f(x)$ untuk semua x pada I.

(2) f(c) disebut nilai minimum mutlak f jika $f(c) \leq f(x)$ untuk semua x pada I.

(3) $f(c)$ disebut nilai ekstrim mutlak dari f, baik nilai maksimum maupun minimum mutlak.

(4) fungsi f yang akan dicari nilai ekstrimnya disebut fungsi objektif.



Gambar 5.1

Di titik manakah nilai ekstrim terjadi? Titik-titik yang berpeluang menghasilkan nilai ekstrim disebut titik-titik kritis. Termasuk titik-titik kritis (lihat **Gambar 5.2**) adalah

(1) titik ujung selang tertutup I,

(2) titik stasioner dari f, yakni titik c dimana $f'(c) = 0$, atau

(3) titik singular dari f, yakni titik c dimana $f'(c)$ tidak terdefinisi.

Gambar 5.2 Peluang titik yang menghasilkan nilai ekstrim (titik-titik kritis).

CONTOH 1 Sebuah fungsi didefinisikan pada selang [−2, 5] sebagai berikut. $f(x) = x^3 - 27x + 6$. Cari nilai ekstrim fungsi tersebut.

Penyelesaian

Titik-titik kritis fungsi di atas sebagai berikut.

(1) titik ujung selang, yakni $x = -2$ atau $x = 5$,

(2) titik stasioner,

$$f'(x) = 3x^2 - 27 = 0$$

$$3(x^2 - 9) = 0$$

$$3(x + 3)(x - 3) = 0$$

sehingga diperoleh: $x = -3$ (di luar selang [−2, 5], jadi tidak memenuhi) dan $x = 3$, atau

(3) titik singular. Akan tetapi, fungsi ini tidak memiliki titik singular.

Dengan demikian, titik kritis fungsi di atas adalah $x = -2$, 3, dan 5.

Nilai ekstrimnya dicari dengan memasukkan titik-titik kritis di atas pada fungsi objektif sebagai berikut.

$$f(-2) = (-2)^3 - 27(-2) + 6 = 52$$

$$f(3) = (3)^3 - 27(3) + 6 = -48$$

$$f(5) = (5)^3 - 27(5) + 6 = -4$$

Dengan demikian, nilai maksimum mutlaknya adalah 52, sedangkan nilai minimum mutlaknya adalah –48.

CONTOH 2 Cari nilai maksimum dan minimum dari $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ pada [−1, 2].

Penyelesaian

Titik-titik kritis fungsi di atas sebagai berikut.

(1) titik ujung selang, yaitu $x = -1$ dan $x = 2$,

(2) titik stasioner: $f'(x) = 0$. Akan tetapi, $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ tidak pernah nol.

(3) titik singular: $f'(x)$ tidak terdefinisi pada $x = 0$.

Dengan demikian, titik-titik kritisnya adalah −1, 0, dan 2. Selanjutnya,

$$f(-1) = \sqrt[3]{(-1)^2} = 1$$

$$f(0) = \sqrt[3]{0^2} = 0$$

$$f(2) = \sqrt[3]{(2)^2} \approx 1{,}6$$

Jadi, nilai maksimum mutlaknya adalah 1,6 dan nilai minimum mutlaknya adalah 0.

CONTOH 3 Sebuah segiempat memiliki dua sudut pada sumbu-x dan dua sudut lainnya pada parabola $y = 12 - x^2$, dengan $y \geq 0$ (lihat gambar). Cari dimensi segiempat yang memberikan luas segiempat maksimum.

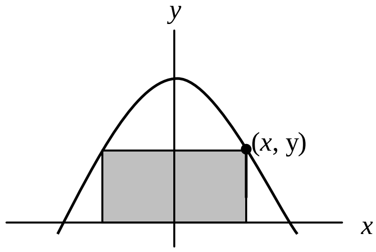
Penyelesaian

Perhatikan gambar. Luas segiempat adalah

$L = 2xy$, dengan $x, y \geq 0$.

$y = 12 - x^2$ maka

$L = 2x(12 - x^2) = 24x - 2x^3$



Dalam kasus ini, titik kritis sama dengan titik stasionernya maka

$$\frac{dL}{dx} = 24 - 6x^2 = 0$$

$$6(4 - x^2) = 0$$

$$6(2 + x)(2 - x) = 0$$

sehingga diperoleh $x = -2$ (tidak termasuk karena tidak memenuhi $x \geq 0$) atau $x = 2$.

Dengan demikian, dimensi segiempat yang memberikan luas maksimum adalah

Lebar = $2x = 2 \cdot 2 = 4$ satuan

Panjang = $y = 12 - x^2 = 12 - (2)^2 = 8$ satuan.

5.2 Bentuk Grafik: Kemonotonan, Kecekungan, dan Titik Belok

5.2.1 Kemonotonan Fungsi dan Uji Turunan Pertama

Tinjau grafik yang ditunjukkan pada **Gambar 5.3**. Jika kita bergerak dari titik A ke titik B pada kurva, nilai $f(x)$ bertambah besar, dikatakan bahwa fungsi tersebut monoton naik. Sebaliknya, jika bergerak dari B ke C, nilai $f(x)$ bertambah kecil, dikatakan fungsi tersebut monoton turun.

Kemonotonan fungsi didefinisikan sebagai berikut.

Misalnya f didefinisikan pada selang I (terbuka, tertutup, atau keduanya),

(1) f monoton naik pada I jika, untuk setiap pasangan bilangan x_1 dan x_2 dalam I, $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) < f(x_2)$

(2) f monoton turun pada I jika, untuk setiap pasangan bilangan x_1 dan x_2 dalam I, $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) > f(x_2)$.

Kemonotonan dapat dicari dengan menguji turunan pertama sebagai berikut.

(1) Jika $f'(x) > 0$ untuk semua x dalam I, f monoton naik pada I.

(2) Jika $f'(x) < 0$ untuk semua x dalam I, f monoton turun pada I.

Gambar 5.3

CONTOH 1 Jika $f(x) = 3x + 3$, cari di mana f monoton naik dan monoton turun.

Penyelesaian

Uji turunan pertama: $f'(x) = 3 > 0$. Ini menunjukkan turunan pertama selalu positif untuk setiap x. Jadi, f monoton naik pada $(-\infty, \infty)$ dan f tidak pernah turun.

CONTOH 2 Jika $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$, cari di mana f monoton naik dan monoton turun.

Penyelesaian

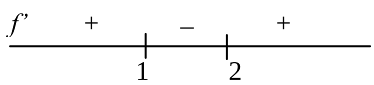
Turunan pertama: $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$. Untuk mengetahui selang di mana $f'(x) > 0$ (positif) dan $f'(x) < 0$ (negatif), cari titik pemisah selang dengan mengambil $f'(x) = 0$ maka

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 0$$

$$6(x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$6(x-1)(x-2) = 0$$

sehingga diperoleh titik pemisah selang $x = 1$ dan $x = 2$. Titik-titik ini membagi garis bilangan menjadi tiga selang, yaitu $(-\infty, 1]$, $[1, 2]$, dan $[2, \infty)$. Nilai $f'(x)$ dicari dengan memasukkan salah satu titik pada tiap selang (misal, dalam kasus ini, 0; 1,5; dan 3). Hasilnya seperti yang ditunjukkan pada gambar.



Jadi, f monoton naik pada $(-\infty, 1]$ dan $[2, \infty)$ dan f monoton turun pada $[1, 2]$.

5.2.2 Kecekungan Fungsi dan Uji Turunan Kedua

Misalnya f terdiferensialkan pada selang terbuka I, f *cekung ke atas* pada I jika f' monoton naik pada I, dan f *cekung ke bawah* pada I jika f' monoton turun pada I.

Kecekungan dapat dicari dengan menguji turunan kedua sebagai berikut.

(1) Jika $f''(x) > 0$ untuk semua x dalam I, f cekung ke atas dalam I.

(2) Jika $f''(x) < 0$ untuk semua x dalam I, f cekung ke bawah dalam I.

CONTOH 1 Jika $f(x) = x^4 + 8x^3 - 2$, cari di mana f cekung ke atas dan cekung ke bawah.

Penyelesaian

Turunan pertama dan kedua dari $f(x) = x^4 + 8x^3 - 2$ berturut-turut adalah

$$f'(x) = 4x^3 + 24x^2$$

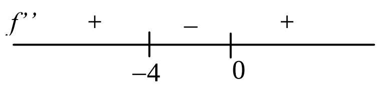
$$f''(x) = 12x^2 + 48x$$

Titik pemisah selang diperoleh dengan menerapkan $f''(x) = 0$ maka

$$f''(x) = 12x^2 + 48x = 0$$

$$12x(x+4) = 0$$

sehingga diperoleh $x = -4$ dan $x = 0$. Selanjutnya dengan memasukkan titik uji -5, -1, dan 1 diperoleh tanda f'' seperti pada gambar.



Jadi, f cekung ke atas pada $(-\infty, -4]$ dan $[0, \infty)$ dan cekung ke bawah pada $[-4, 0]$.

5.2.3 Titik Belok

Misalnya f kontinu di c, titik $(c, f(c))$ disebut titik belok grafik f jika f cekung ke atas pada satu sisi dan cekung ke bawah pada sisi lainnya. Kemungkinan titik belok terjadi pada c di mana $f''(c) = 0$ atau $f''(c)$ tidak terdefinisi.

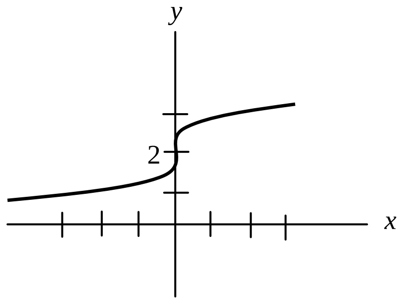
CONTOH 2 Cari semua titik belok dari $f(x) = \sqrt[3]{x} + 2$.

Penyelesaian

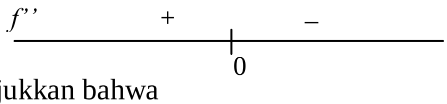
Turunan pertama dan keduanya sebagai berikut

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}$$



Turunan kedua tidak pernah nol dan tidak terdefinisi pada $x = 0$. Dengan demikian, $x = 0$ merupakan titik pemisah selang. Hasil uji nilai turunan kedua seperti pada gambar berikut.



Hasil uji turunan ke dua menunjukkan bahwa

(1) $x < 0, f''(x) > 0$ maka f cekung ke atas

(2) $x > 0, f''(x) < 0$ maka f cekung ke bawah

Pada $x = 0$, $f(0) = \sqrt[3]{0} + 2 = 2$, jadi titik (0,2) merupakan titik belok.

5.3 Nilai Ekstrim Relatif

Misalnya S adalah daerah asal f yang di dalamnya terdapat c maka

(1) $f(c)$ disebut *nilai maksimum relatif* (*relatif*) jika terdapat selang (a, b) yang di dalamnya ada c sedemikian rupa sehingga $f(c)$ adalah nilai maksimum f pada $(a, b) \cap S$;

(2) $f(c)$ disebut *nilai minimum relatif* (*relatif*) jika terdapat selang (a, b) yang di dalamnya ada c sedemikian rupa sehingga $f(c)$ adalah nilai minimum f pada $(a, b) \cap S$;

(3) $f(c)$ disebut *nilai ekstrim relatif* (*relatif*) jika ia berupa nilai maksimum relatif atau minimum relatif.

Nilai ekstrim relatif dapat terjadi pada titik-titik kritis (titik ujung, titik stasioner, dan titik singular).

Uji Turunan Pertama untuk Ekstrim Relatif Misalnya f kontinu pada selang terbuka (a, b) yang di dalamnya terdapat c.

(1) Jika f monoton naik $\{f'(x) > 0\}$ untuk semua x dalam (a, c) dan monoton turun $\{f'(x) < 0\}$ untuk semua x dalam (c, b), $f(c)$ adalah nilai maksimum relatif f.

(2) Jika f monoton turun $\{f'(x) < 0\}$ untuk semua x dalam (a, c) dan monoton naik $\{f'(x) > 0\}$ untuk semua x dalam (c, b), $f(c)$ adalah nilai minimum relatif f.

(3) Jika $f'(x)$ bertanda sama pada $x < c$ dan $x > c$, $f(c)$ bukan nilai ekstrim relatif f.

CONTOH 1 Cari nilai ekstrim relatif dari fungsi $f(x) = x^2 - 10x + 6$ pada $(-\infty, \infty)$.

Penyelesaian

Turunan pertama : $f'(x) = 2x - 10$.

Nilai f'

f' — +

5

f monoton turun pada $(-\infty, 5]$ dan monoton naik pada $[5, \infty)$ maka, sesuai dengan uji turunan pertama $f(5) = (5)^2 - 10(5) + 6 = -19$ adalah nilai minimum relatif.

Uji Turunan Kedua untuk Ekstrim Relatif Misalnya f kontinu pada selang terbuka (a, b) yang di dalamnya terdapat c sedemikian rupa sehingga $f'(c) = 0$.

(1) Jika $f''(c) < 0$, $f(c)$ merupakan nilai maksimum relatif.

(2) Jika $f''(c) > 0$, $f(c)$ merupakan nilai minimum relatif.

(3) $f''(c) = 0$, $(c, f(c))$ merupakan titik belok.

CONTOH 2 Tentukan nilai ekstrim relatif dari $f(x) = x^3 + 3x + 1$.

Penyelesaian

5.4 Limit Bentuk 0/0 dan ∞/∞ : Teorema l'Hopital

Teorema l'Hopital sebagai berikut.

Jika $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$ atau $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = \infty$,

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

CONTOH 1 Cari $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Penyelesaian

Limit di atas berbentuk 0/0 maka sesuai dengan teorema l'Hopital

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2x}{1}=\frac{2\cdot 1}{1}=2\,.$$

CONTOH 2 Cari $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\ln(1+x)}$.

Penyelesaian

Limit di atas berbentuk 0/0 maka sesuai dengan teorema l'Hopital

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1/(1+x)}=\frac{1}{1}=1\,.$$

CONTOH 3 Cari $\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x}$.

Penyelesaian

Limit di atas berbentuk ∞/∞. Sesuai dengan teorema l'Hopital

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x}=0\,.$$

CONTOH 4 Cari $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan x\cdot\ln\sin x)$.

Penyelesaian

Limit di atas berbentuk 0·∞. Bentuk ini dapat diubah menjadi 0/0 dengan mengganti $\tan x$ oleh $\frac{1}{\cot x}$ sehingga teorema l'Hopital berlaku.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan x\cdot\ln\sin x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{\cot x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}{-\csc^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(-\cos x\cdot\sin x)=0\,.$$