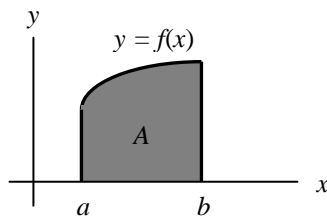


BAB 7

PENGGUNAAN INTEGRAL

7.1 Luas Daerah Bidang Datar

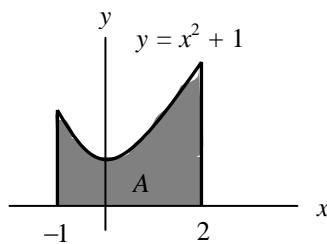
Daerah di atas sumbu- x Luas daerah dibatasi oleh kurva $y = f(x) > 0$, $y = 0$, $x = a$, dan $x = b$ adalah



$$A = \int_a^b y dx$$

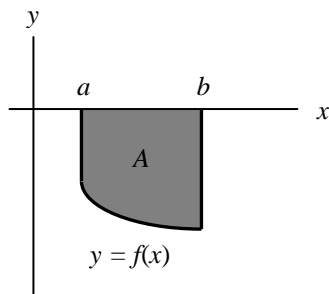
CONTOH 1 Cari luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = -1$ dan $x = 2$.

Penyelesaian



$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^2 (x^2 + 1) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + x \right]_{-1}^2 \\ &= \left[\frac{1}{3} \cdot 2^3 + 2 \right] - \left[\frac{1}{3} \cdot (-1)^3 + (-1) \right] \\ &= 6 \end{aligned}$$

Daerah di bawah sumbu- x Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x) < 0$, $y = 0$, $x = a$, dan $x = b$ adalah



$$A = - \int_a^b y dx$$

CONTOH 2 Cari luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^2 + 2x - 3$ dan $y = 0$.

Penyelesaian

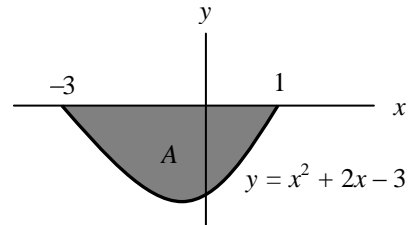
Titik potong kurva dengan sumbu- x

$$y = x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x + 3)(x - 1) = 0$$

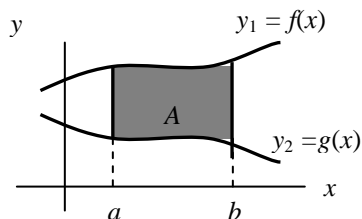
$$x = -3 \text{ dan } x = 1$$

Daerah yang dimaksud ditunjukkan pada gambar di samping. Luasnya adalah



$$\begin{aligned} A &= - \int_{-3}^1 (x^2 + 2x - 3) dx \\ &= - \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x \right]_{-3}^1 \\ &= - \left[\left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot (-3)^3 + (-3)^2 - 3 \cdot (-3) \right) \right] \\ &= 10 \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Daerah yang dibatasi oleh dua kurva Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y_1 = f(x)$, $y_2 = g(x)$, $x = a$, dan $x = b$, dengan $y_1 > y_2$ adalah



$$A = \int_a^b (y_1 - y_2) dx$$

CONTOH 3 Cari luas daerah yang dibatasi oleh $y = 2 - x^2$ dan $y = x$.

Penyelesaian

Daerah yang dimaksud ditunjukkan pada gambar. Batas bawah dan batas atas integral diperoleh dengan mencari titik potong kedua kurva sebagai berikut.

$$y_1 = y_2 \text{ maka}$$

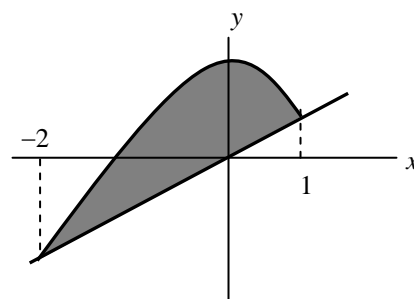
$$2 - x^2 = x$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x + 2)(x - 1) = 0$$

$$x = -2 \text{ (batas bawah) dan } x = 1 \text{ (batas atas).}$$

Dengan demikian,



$$\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^1 \left[2 - x^2 \right] dx \\
&= \int_{-2}^1 \left[2x - x^2 \right] dx \\
&= \left[2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-2}^1 \\
&= \left[2 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{3} \cdot 1^3 \right] - \left[2 \cdot (-2) - \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 - \frac{1}{3} \cdot (-2)^3 \right] \\
&= 4,5
\end{aligned}$$

Catatan Jika daerahnya dibatasi oleh $x_1 = f(y)$, $x_2 = g(y)$, $y = c$, dan $y = d$, dengan $x_1 > x_2$,

$$A = \int_c^d \left[x_1 - x_2 \right] dy$$

CONTOH 4 Cari luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y^2 = 4x$ dan garis $4x - 3y = 4$.

Penyelesaian

Titik potong kedua kurva

$$x_1 = x_2 \rightarrow \frac{y^2}{4} = \frac{3y + 4}{4}$$

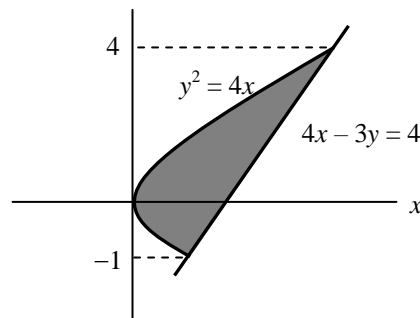
$$y^2 - 3y + 4 = 0$$

$$(y + 1)(y - 4) = 0$$

$y = -1$ (batas bawah) dan $y = 4$ (batas atas)

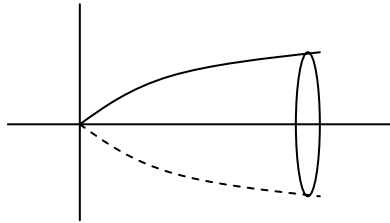
Dengan demikian,

$$\begin{aligned}
A &= \int_a^b (x_2 - x_1) dy \\
&= \int_{-1}^4 \left[\left(\frac{3y + 4}{4} \right) - \frac{y^2}{4} \right] dy \\
&= \frac{1}{4} \int_{-1}^4 \left[y + 4 - y^2 \right] dy \\
&= \frac{1}{4} \left[\frac{3}{2}y^2 + 4y - \frac{1}{3}y^3 \right]_{-1}^4 \\
&= \frac{1}{4} \left[\left(\frac{3}{2} \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot 4^3 \right) - \left(\frac{3}{2} \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) - \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 \right) \right] \\
&= \frac{125}{24}
\end{aligned}$$



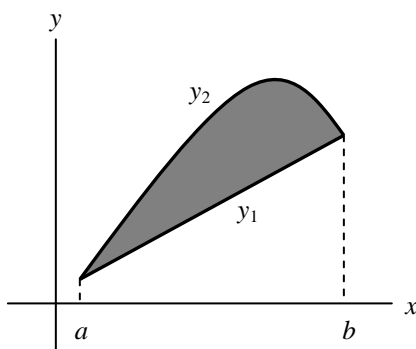
7.2 Volume Benda Putar

Pemutaran terhadap sumbu-x Jika $y = f(x)$ dengan batas $a \leq x \leq b$ diputar ke sumbu-x positif, volume yang dihasilkannya adalah



$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

Jika bidang yang diputar dibatasi oleh dua kurva,



$$V = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx$$

CONTOH 1 Sebuah bidang R didefinisikan sebagai daerah yang dibatasi oleh $y = x^2$, $y = 0$, $x = 0$, dan $x = 4$. Cari volume yang dihasilkan jika R diputar ke sumbu- x .

Penyelesaian

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_0^4 x^2 dx = \pi \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^4 = \pi \left[\frac{1}{3} \cdot 4^3 - 0 \right] = 9\pi \text{ satuan volume.}$$

CONTOH 2 Sebuah bidang R didefinisikan sebagai daerah yang dibatasi oleh $y = x^2$, $y = x + 2$, dan $x = 0$. Cari volume yang dihasilkan jika R diputar ke sumbu- x .

Penyelesaian

Batas-batas integral dapat ditentukan oleh titik potong kedua grafik maka

$$\begin{aligned} y_1 = y_2 &\Rightarrow x^2 = x + 2 \\ &\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \\ &\Rightarrow (x + 1)(x - 2) = 0 \\ &\Rightarrow x = -1 \text{ dan } x = 2 \end{aligned}$$

Akan tetapi $x = -1$ berada di luar daerah yang didefinisikan maka batas bawah integral adalah $x = 0$ dan batas atasnya $x = 2$ sehingga

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_a^b (x_2^2 - y_1^2) dx = \pi \int_0^2 (x^2 + 2x - x^4) dx \\
 &= \pi \int_0^2 (x^2 + 4x + 4 - x^4) dx \\
 &= \pi \left[\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^2
 \end{aligned}$$

CONTOH 3 Tentukan volume benda yang dihasilkan oleh pemutaran bidang ke-sumbu-y seperti ditunjukkan pada gambar.

Penyelesaian

Titik potong kedua kurva,

$$\begin{aligned}
 x_1^2 &= x_2^2 \Rightarrow y^2 = 2 - y \\
 &\Rightarrow y^2 + y - 2 = 0 \\
 &\Rightarrow (y + 2)(y - 1) = 0 \\
 &\Rightarrow y = -2 \text{ dan } y = 1
 \end{aligned}$$

maka batas bawah integral $y = 0$ dan batas atanya $y = 1$ sehingga

$$V = \pi \int_c^d (x_2^2 - x_1^2) dy = \pi \int_0^1 (2 - y - y^2) dy$$