# MODUL 5
# INTEGRAL LIPAT DAN PENGGUNAANNYA

Satuan Acara Perkuliahan Modul 5 (Integral Lipat dan Penggunaannya) sebagai berikut.

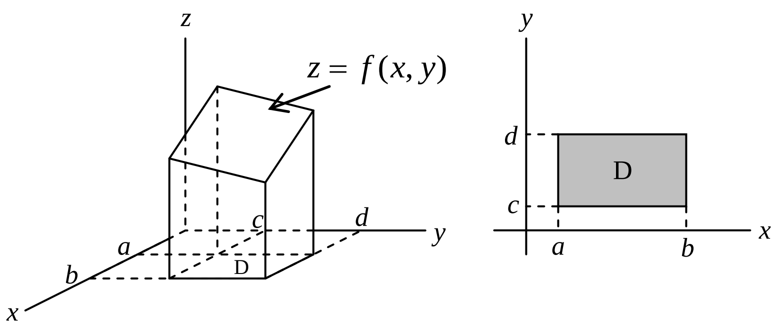
| Pertemuan ke- | Pokok/Sub Pokok Bahasan | Tujuan Pembelajaran |
|---|---|---|
| 1 | **Integral Lipat**<br>Integral Lipat Dua | Mahasiswa diharapkan mampu:<br>▪ menghitung integral lipat dua dengan menggunakan integral berulang. $\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]dx$<br>▪ menggunakan interpretasinya untuk menentukan masalah real seperti penentuan volume benda pejal.<br>▪ memahami daerah pengintegralan yang lebih umum dan menentukan batas-batasnya.<br>▪ menuliskan integral lipat dua sebagai integral berulang.<br>$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\right]dx$ atau<br>$\iint_S f(x,y)\,dA = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)\,dx\right]dy$. |
| | Mengubah Urutan Pengintegralan | ▪ melakukan perubahan urutan pengintegralan dari $dxdy$ menjadi $dydx$ atau sebaliknya,<br>▪ menggunakannya untuk menentukan masalah real seperti penentuan volume benda pejal dan sejenisnya. |
| | Integral Lipat Tiga | ▪ menghitung integral lipat tiga menggunakan integral berulang,<br>▪ menggunakan integral lipat tiga untuk menentukan volume benda. |
| 2 | **Integral Lipat**<br>Transformasi Integral Lipat Dua pada Koordinat Polar | Mahasiswa diharapkan mampu:<br>▪ memahami daerah pengintegralan dalam koordinat polar/kutub dan menentukan batas-batasnya.<br>▪ menuliskan integral lipat dua sebagai integral berulang $\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_R f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdrd\theta$.<br>▪ melakukan transformasi integral dari koordinat Cartesius ke koordinat polar dan sebaliknya $\iint_R f(x,y)\,dxdy = \iint_R f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdrd\theta$ |
| | Mengganti Peubah Integral; Transformasi | ▪ mentransformasikan satu ke satu pada daerah S di bidang-uv ke daearah D di bidang-xy dengan |

| | | |
|---|---|---|
| | Jacobi | persamaan berbentuk: $x = g(u,v)$, $y = h(u,v)$.<br>▪ menentukan determinan Jacobi<br>▪ mentransformasikan integral menggunakan transformasi Jacobi dengan formula:<br>$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_S f(g(u,v),h(u,v))\,\lvert J(u,v)\rvert\,dudv$ |
| 3 | **Integral Lipat**<br>Transformasi Integral Lipat Tiga pada Koordinat Bola<br><br>Transformasi Integral Lipat Tiga pada Koordinat Tabung | Mahasiswa diharapkan mampu:<br>▪ mengubah koordinat dari koordinat ruang ke koordinat bola atau sebaliknya<br>▪ mentransformasikan integral lipat tiga dalam koordinat ruang menjadi koordinat bola dan menghitungnya<br><br>▪ mengubah koordinat dari koordinat ruang ke koordinat tabung atau sebaliknya<br>▪ mentransformasikan integral lipat tiga dalam koordinat ruang menjadi koordinat tabung dan menghitungnya |
| 4 | **Integral Lipat**<br>Penggunaan Integral Lipat | Mahasiswa diharapkan mampu:<br>▪ mampu menggunakan integral lipat dua untuk menyelesaikan berbagai masalah seperti penentuan pusat massa, volume, momen inersia, dan sebagainya.<br>▪ mampu menggunakan integral lipat tiga untuk menyelesaikan berbagai masalah seperti penentuan pusat massa, volume, momen inersia, dan sebagainya. |

# 5.1 Integral Lipat Dua

## 5.1.1 Integral Lipat Dua Pada Bidang Segiempat

Perhatikan **Gambar 5.1**. Proyeksi kurva permukaan $z = f(x, y)$ pada bidang *xoy* adalah daerah pengintegralan D. Jika daerah pengintegralannya berupa bidang segiempat dengan $a \le x \le b$ dan $c \le y \le d$ , secara umum ditulis: $D = \{(x, y) \mid a \le x \le b,\ \ c \le y \le d\}$ .




**Gambar 5.1**

Pengintegralan $f(x, y)$ terhadap daerah $D = \{(x, y) \mid a \le x \le b,\ \ c \le y \le d\}$ dinyatakan sebagai *integral berulang* sebagai berikut:

$$\boxed{\iint\limits_D f(x, y)\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dy\,dx}$$

*Catatan*: Ketika mengintegralkan terhadap *x*, anggap *y* konstanta. Demikian pula, ketika mengintegralkan terhadap *y*, anggap *x* konstanta.

*CONTOH 1* Hitung $\iint\limits_D (2x + y)\,dA$ dengan $D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 2,\ \ 0 \le y \le 1\}$ .

**Penyelesaian**

Integralkan dulu bagian dalam terhadap *y* (anggap *x* konstanta), hasilnya kemudian integralkan terhadap *x*.

$$\iint\limits_D (2x + y)\,dA = \int_0^2 \int_0^1 (2x + y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^2 [2xy + \tfrac{1}{2} y^2]_0^1\,dx = \int_0^2 (2x + \tfrac{1}{2})\,dx = [x^2 + \tfrac{1}{2} x]_0^2 = 5$$

*CONTOH 2* Hitung $\int_0^3 \int_1^2 (x^2 y + xy^2) dxdy$.

**Penyelesaian**

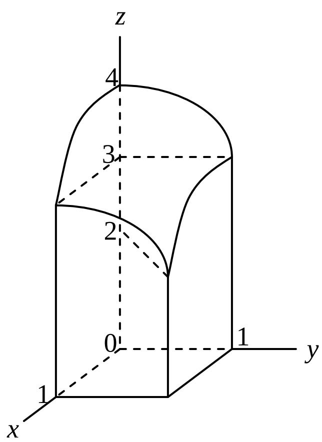
$$\int_0^3 \int_1^2 (x^2 y + xy^2) dxdy = \int_0^3 [\tfrac{1}{3} x^3 y + \tfrac{1}{2} x^2 y^2]_1^2 dy$$

$$= \int_0^3 [\tfrac{7}{3} y + \tfrac{3}{2} y^2] dy = [\tfrac{7}{6} y^2 + \tfrac{1}{2} y^3]_0^3 = 24$$

**Interpretasi geometris integral lipat dua** $\iint_D f(x, y) dA$ adalah volume bangun di bawah permukaan $z = f(x, y)$ yang berada di atas bidang D. Jika $f(x, y) = 1$, integral tersebut $\left( \iint_D dA \right)$ sama dengan luas bidang D.

*CONTOH 3* Tentukan volume bangun di bawah permukaan $z = 4 - x^2 - y^2$ yang berada di atas bidang $D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$.

**Penyelesaian**




**Gambar 5.2**

Bangun di bawah permukaan $z = 4 - x^2 - y^2$ yang berada di atas bidang $D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ adalah seperti pada **Gambar 5.2** di samping. Volume bangun tersebut adalah

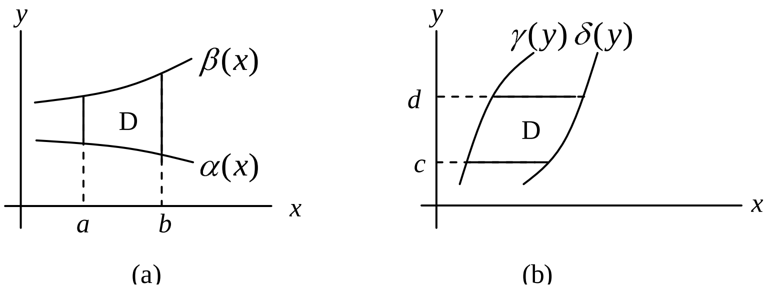
$$V = \iint_D (4 - x^2 - y^2) dA = \int_0^1 \int_0^1 (4 - x^2 - y^2) dydx$$

$$= \int_0^1 [4y - x^2 y - \tfrac{1}{3} y^3]_0^1 dx = \int_0^1 (\tfrac{11}{3} - x^2) dx$$

$$= [\tfrac{11}{3} x - \tfrac{1}{3} x^3]_0^1 = \tfrac{10}{3}$$

## 5.1.2 Integral Lipat Dua Pada Bidang Bukan Segiempat

Daerah pengintegralan dapat berupa bidang sebarang (bukan segiempat), seperti diilustrasikan pada **Gambar 5.4**. Untuk kasus seperti ini, kita dapat mengambil batas pada sumbu-*x* konstanta, sedangkan batas pada sumbu y sebagai fungsi dari *x* atau sebaliknya. Pada **Gambar 5.4(a)**, daerah pengintegralan adalah $D = \{(x, y) \mid a \le x \le b,\ \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$. Sementara itu, pada **Gambar 5.4(b)**, daerah pengintegralan adalah $D = \{(x, y) \mid \gamma(y) \le x \le \delta(y),\ c \le y \le d\}$.




**Gambar 5.4**

Jika $f(x,y)$ diintegralkan terhadap $D = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$, integralnya ditulis sebagai

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy\,dx}$$

Di lain pihak, jika daerah pengintegralannya $D = \{(x,y) \mid \gamma(y) \le x \le \delta(y),\ c \le y \le d\}$,

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx\,dy}$$

*CONTOH 4* Hitung $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} xy\,dy\,dx$.

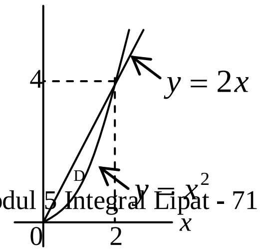
**Penyelesaian**

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} xy\,dy\,dx = \int_0^2 [\tfrac{1}{2}xy^2]_{x^2}^{2x}\,dx = \int_0^2 (2x^3 - \tfrac{1}{2}x^5)\,dx = [\tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{1}{12}x^6]_0^2 = \tfrac{8}{3}.$$

*CONTOH 5* Tentukan luas daerah D yang dibatasi oleh $y = 2x$ dan $y = x^2$.

**Penyelesaian**

Dari skets daerah pengintegralan diperoleh






**Gambar 5.3**

$$D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 2,\ \ x^2 \le y \le 2x\}$$

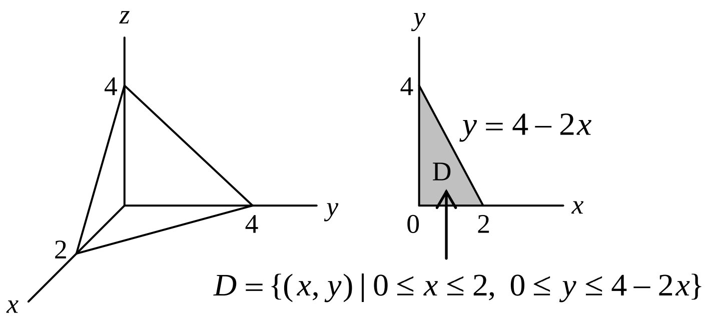
Dengan demikian, luas daerah D adalah

$$A = \iint_D dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} dy\,dx = \int_0^2 (2x - x^2)\,dx \ = [x^2 - \tfrac{1}{3}x^3]_0^2 \ = \frac{4}{3}$$

*CONTOH 6* Tentukan volume tetrahedron yang dibatasi oleh bidang $z = 4 - 2x - y$ dan bidang koordinat.

**Penyelesaian**

Bangun tetrahedron yang dibatasi oleh bidang $z = 4 - 2x - y$ dan bidang koordinat diperlihatkan pada **Gambar 5.5**.




**Gambar 5.5**

Daerah pengintegralan (proyeksi bangun pada bidang *xoy*) berupa segitiga dan dapat dinyatakan oleh $D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 4 - 2x\}$. Dengan demikian, volume tetrahedron tersebut dapat ditentukan sebagai berikut.

$$V = \iint_D (4 - 2x - y)\,dA = \int_0^2 \int_0^{4-2x} (4 - 2x - y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^2 [4y - 2xy - \tfrac{1}{2}y^2]_0^{4-2x}\,dx = \int_0^2 (4(4 - 2x) - 2x(4 - 2x) - \tfrac{1}{2}(4 - 2x)^2)\,dx$$

$$= \int_0^2 (16 - 8x - 8x + 4x^2 - \tfrac{1}{2}(16 - 16x + 4x^2))\,dx$$

$$= \int_0^2 (8 - 8x + 2x^2)\,dx = [8x - 4x^2 + \tfrac{2}{3}x^3]_0^2 = \frac{16}{3}$$

**Mengubah Urutan Pengintegralan** Kadang-kadang, mengintegralkan dalam urutan tertentu sulit dilakukan. Salah satu cara mengatasinya adalah dengan mengubah urutan pengintegralan dari bentuk ”*dydx*” menjadi ”*dxdy*”. Meskipun urutan pengintegralan ini berubah, daerah pengintegralannya tetap sehingga hasil akhirnya akan tetap sama. Mengubah urutan pengintegralan dapat dilakukan jika fungsi batas pengintegralan memiliki invers.

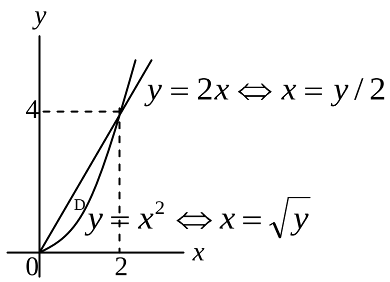
*CONTOH 7* Hitung $\iint_D x^2 y\,dA$ dengan *D* adalah daerah yang dibatasi oleh garis $y = 2x$ dan $y = x^2$. Hitung integral ini dengan dua cara (berbeda urutan).

**Penyelesaian**

Daerah pengintegralan D seperti diperlihatkan pada **Gambar 5.6**. Daerah D ini dapat dinyatakan dalam dua cara sebagai berikut.

(1) $D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 2,\ \ x^2 \le y \le 2x\}$

(2) $D = \{(x, y) \mid 0 \le y \le 4,\ \ y/2 \le x \le \sqrt{y}\}$




**Gambar 5.6**

Untuk $D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 2,\ \ x^2 \le y \le 2x\}$:

$$\iint_D x^2 y\,dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} x^2 y\,dy\,dx = \int_0^2 [\tfrac{1}{2} x^2 y^2]_{x^2}^{2x} dx = \int_0^2 (2x^4 - \tfrac{1}{2} x^6)dx = [\tfrac{2}{5} x^5 - \tfrac{1}{14} x^7]_0^2 = \tfrac{128}{35}$$

Untuk $D = \{(x, y) \mid 0 \le y \le 4,\ \ y/2 \le x \le \sqrt{y}\}$:

$$\iint_D x^2 y\,dA = \int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} x^2 y\,dx\,dy = \int_0^4 [\tfrac{1}{3} x^3 y]_{y/2}^{\sqrt{y}} dx = \int_0^4 (\tfrac{1}{3} y^{\frac{5}{2}} - \tfrac{1}{24} y^4)dx = [\tfrac{2}{21} y^{\frac{7}{2}} - \tfrac{1}{120} y^5]_0^4 = \tfrac{128}{35}$$

Perhatikan bahwa hasil akhirnya sama. Jadi, mengubah urutan pengintegralan tidak akan mengubah hasil akhir hasil pengintegralan.

*CONTOH 8* Hitung $\int_0^2 \int_{x^2}^4 \dfrac{x^3}{\sqrt{x^4 + y^2}} dy\,dx$.

**Penyelesaian**

Pengintegralan dengan urutan seperti di atas sulit dilakukan. Oleh karena itu, kita ubah urutan pengintegralannya. Dari batas-batas pengintegralan di atas diperoleh daerah pengintegralannya adalah $D = \{(x, y) \mid x^2 \le y \le 4,\ 0 \le x \le 2\}$. Daerah ini diperlihatkan pada **Gambar 5.7**. Daerah ini juga dapat dinyatakan sebagai $D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le \sqrt{y},\ 0 \le x \le 4\}$. Dengan demikian, menghitung integralnya sebagai berikut.

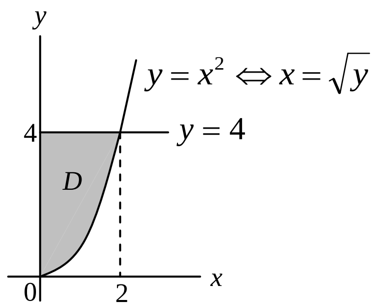
$$\int_0^2\int_{x^2}^4 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+y^2}}dydx = \int_0^4\int_0^{\sqrt{y}} \frac{x^3}{\sqrt{x^4+y^2}}\,dxdy \quad (*)$$

Untuk mengintegralkan bagian dalam (terhadap *x*), gunakan metode substitusi:

$$u = x^4 + y^2 \rightarrow du = 4x^3dx$$

dengan batas-batas: $x = 0 \rightarrow u = y^2$,

$$x = \sqrt{y} \rightarrow u = 2y^2$$




**Gambar 5.7**

Dengan demikian, diperoleh

$$\int_0^4\int_0^{\sqrt{y}} \frac{x^3}{\sqrt{x^4+y^2}}\,dxdy = \int_0^4\int_{y^2}^{2y^2} \tfrac{1}{4}u^{-1/2}dudy = \tfrac{1}{2}\int_0^4 [u^{1/2}]_{y^2}^{2y^2}\,dy = \tfrac{1}{2}\int_0^4 (\sqrt{2}-1)ydy$$

$$= [\tfrac{1}{4}(\sqrt{2}-1)y^2]_0^4 = 4(\sqrt{2}-1)$$

Jadi,

$$\int_0^2\int_{x^2}^4 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+y^2}}dydx = \int_0^4\int_0^{\sqrt{y}} \frac{x^3}{\sqrt{x^4+y^2}}\,dxdy = 4(\sqrt{2}-1).$$

---

## SOAL-SOAL LATIHAN 5.1

1. Hitung integral berikut.

   (a) $\int_1^2\int_0^3 (x^2+\sqrt{y})dxdy$ (b) $\int_0^2\int_1^4 xy^2dydx$

2. Tentukan $\iint_D xydA$ jika:

   (a) D adalah daerah yang dibatasi oleh garis $x = 0$, $x = 2$, dan $y = 2x$.

   (b) D adalah daerah yang dibatasi oleh garis $y = x$ dan $y = x^2$.

3. Nyatakan luas daerah D berikut dalam bentuk integral lipat dua, kemudian hitung integralnya.

   (a) $D = \{(x,y)\,|\,0 \le x \le 4,\;\; x \le y \le \sqrt{x}\}$

   (b) D adalah daerah yang dibatasi oleh garis $x = 1$, $x = 3$, dan $y = x + 3$.

4. Tentukan volume benda padat yang dibatasi oleh permukaan $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$ dan bidang $9x + 4y - 6z = 0$.

5. Tentukan volume bangun yang dibatasi oleh bidang $2x + y + 2z - 4 = 0$ dengan bidang koordinat.

6. Ubah urutan pengintegralan dari integral berikut.

(a) $\int_0^2 \int_1^x f(x,y)dydx$  (b) $\int_0^4 \int_0^{y/2} f(x,y)dxdy$

7. Skets daerah pengintegralan, ubah urutannya, kemudian hitung integralnya.

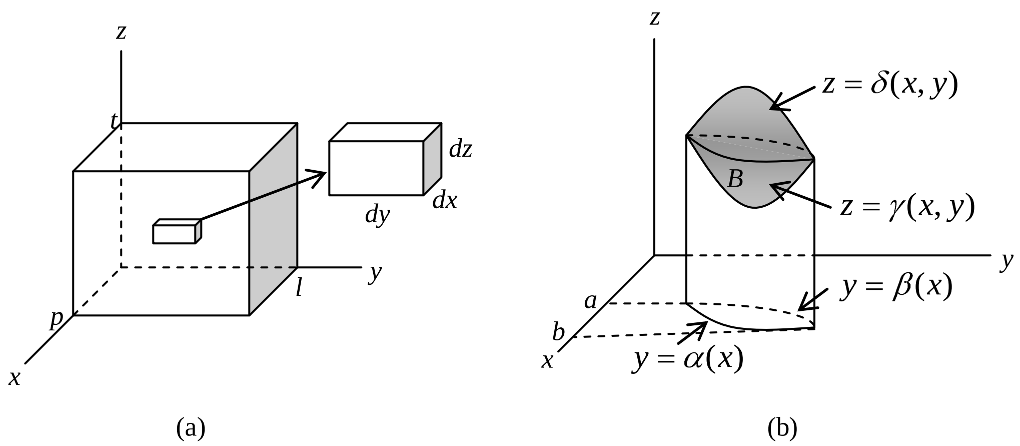
(a) $\int_0^1 \int_0^y e^{x^2} dxdy$  (b) $\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin y}{y} dydx$

---

## 5.2 Integral Lipat Tiga

Integral lipat tiga merupakan perluasan dari integral lipat dua ke dimensi yang lebih tinggi. Sebagai ilustrasi, tinjau sebuah balok yang panjangnya *p*, lebarnya *l*, dan tingginya *t*, seperti pada **Gambar 5.8(a)**. Dalam bentuk integral lipat dua, volume balok ditentukan dengan mengintegralkan $z = f(x,y) = t$ pada daerah $D = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le p,\ 0 \le y \le l\}$ sebagai berikut.

$$V = \iint_D f(x,y)dA = \int_0^p \int_0^l tdydx = \int_0^p [ty]_0^l dx = \int_0^p ltdx = [ltx]_0^p = plt$$




**Gambar 5.8**

Sekarang, ambil segmen panjang pada *x* = *dx*, segmen panjang pada *y* = *dy*, dan segmen panjang pada *z* = *dz*. Segmen volume balok adalah $dV = dzdydx$. Daerah penginteralannya adalah $B = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le p,\ 0 \le y \le l,\ 0 \le z \le t\}$. Volume total balok ditentukan dengan integral lipat tiga sebagai berikut.

$$\iiint_B dV = \int_0^p \int_0^l \int_0^t dzdydx = \int_0^p \int_0^l tdydx = \int_0^p ltdx = plt.$$

Hasilnya sama dengan cara menggunakan integral lipat dua.

Secara umum, fungsi $f(x,y,z)$ dapat diintegralkan pada daerah pengintegralannya. Daerah pengintegralan integral lipat tiga (lihat **Gambar 5.8(b)**) secara umum ditulis:

$$B = \{(x,y,z)\,|\, a \le x \le b,\ \ \alpha(x) \le y \le \beta(x),\ \ \gamma(x,y) \le z \le \delta(x,y)\}.$$

Bentuk integral lipat tiga dalam ditulis sebagai

$$\boxed{\iiint_B f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \int_{\gamma(x,y)}^{\delta(x,y)} f(x,y,z)dzdydx}$$

**Interpretasi geometri dan fisis** Secara geometri, dalam kasus $f(x,y,z)=1$, $\iiint_B f(x,y,z)dV = \iiint_B dV$ adalah volume benda B. Secara fisis, untuk $f(x,y,z) > 0$ pada B, $\iiint_B f(x,y,z)dV =$ massa benda dengan $f(x,y,z) =$ massa jenis benda B di $(x,y,z)$.

*CONTOH 1* Hitung $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} \int_0^y xyzdzdydx$.

**Penyelesaian**

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} \int_0^y xyzdzdydx = \int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} [\tfrac{1}{2}xyz^2]_0^y dydx = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} xy^3 dydx$$

$$= \tfrac{1}{8}\int_0^1 [xy^4]_x^{\sqrt{x}} dx = \tfrac{1}{8}\int_0^1 (x^3 - x^5)dx = \tfrac{1}{8}[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{6}x^6]_0^1 = \tfrac{1}{96}.$$

*CONTOH 2* Tentukan $\iiint_B x^2 yzdV$ dengan

$$B = \{(x,y,z)\,|\, 0 \le x \le 1,\ \ x^2 \le y \le 2x,\ \ 0 \le z \le xy\}.$$

**Penyelesaian**

$$\iiint_B x^2 yzdV = \int_0^1 \int_{x^2}^{2x} \int_0^{xy} x^2 yzdzdydx = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \int_{x^2}^{2x} [x^2yz^2]_0^{xy} dydx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^1 \int_{x^2}^{2x} x^4y^3 dydx = \tfrac{1}{8}\int_0^1 [x^4y^4]_{x^2}^{2x} dx$$

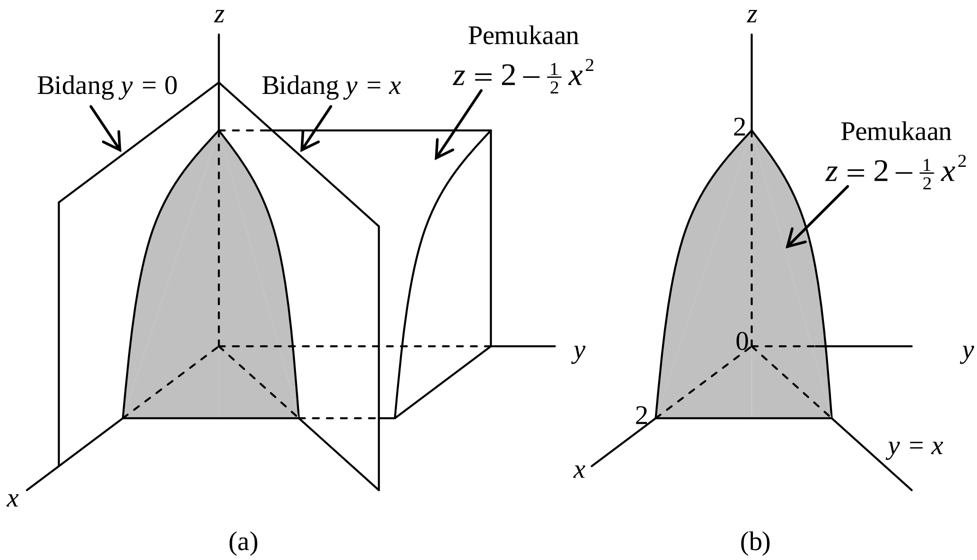
$$= \tfrac{1}{8}\int_0^1 (16x^8 - x^{12})dx = \tfrac{1}{8}[\tfrac{16}{9}x^9 - \tfrac{1}{13}x^{13}]_0^1 = \tfrac{119}{936}$$

*CONTOH 3* Sebuah benda B dibatasi oleh silinder parabol $z = 2 - \frac{1}{2}x^2$ dan bidang $z = 0$, $y = x$, dan $y = 0$. Nyatakan volume benda dalam bentuk integral lipat tiga, kemudian carilah nilainya.

**Penyelesaian**

Benda B yang dimaksud seperti ditunjukkan pada **Gambar 5.9**. Dari **Gambar 5.9(b)** jelas bahwa daerah pengintegralannya adalah $B = \{(x, y, z) \mid 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le x,\ 0 \le z \le 2 - \frac{1}{2}x^2\}$. Dengan demikian,

$$V = \iiint_B dV = \int_0^2 \int_0^x \int_0^{2-\frac{1}{2}x^2} dz\,dy\,dx = \int_0^2 \int_0^x (2 - \tfrac{1}{2}x^2)\,dy\,dx = \int_0^2 (2x - \tfrac{1}{2}x^3)\,dx = [x^2 - \tfrac{1}{8}x^4]_0^2 = 2$$




**Gambar 5.9**

---

## SOAL-SOAL LATIHAN 5.2

1. Hitung integral berikut.

   (a) $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2)\,dz\,dy\,dx$ (b) $\int_0^1 \int_0^{3y} \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz\,dx\,dy$

2. Hitung $\iiint_B x\,dz\,dy\,dx$ jika

   (a) $B = \{(x, y, z) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2 - x,\ 0 \le z \le 2 - x - y\}$

   (b) B adalah daerah yang dibatasi oleh permukaan $z = 4 - x^2 - y$ dan bidang $x = 1$, $y = 0$, $y = 1 - x^2$, dan $z = 3$.

3. Benda B dibatasi oleh bidang $y + z = 1$ dan $y = x^2$. Nyatakan volume benda B dalam bentuk integral berulang lipat tiga kemudian tentukan nilainya.
4. Tentukan volume benda yang dibatasi oleh bidang koordinat dan bidang $x + z = 1$ dan $y + 2z = 2$ di oktan pertama.

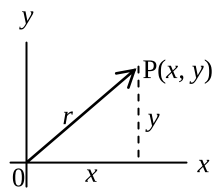
---

# 5.3 Transformasi Koordinat Pada Integral Lipat

## 5.3.1 Transformasi Integral Lipat Dua pada Koordinat Polar

**Koordinat polar** Tinjau **Gambar 5.10**. Titik (*x*, *y*) dalam koordinat bidang dapat dinyatakan dalam koordinat polar (*r*, *θ*). Hubungan antara besaran dalam koordinat kutub dan koordinat polar sebagai berikut.

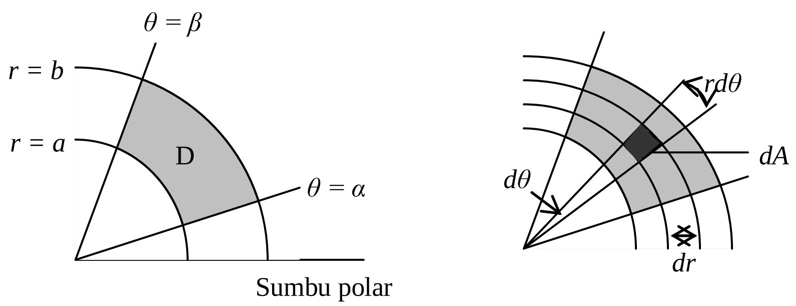
$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ r^2 &= x^2 + y^2 \end{aligned}}$$




**Gambar 5.10**

**Integral lipat dua dalam koordinat polar** Tinjau **Gambar 5.11**. Pada **Gambar 5.11(a)**, daerah pengintegralan dinyatakan oleh $D = \{(r,\theta) \mid a \le r \le \theta,\ \ \alpha \le \theta \le \beta\}$. Pada **Gambar 5.11(b)**, segmen luas *dA* dapat dinyatakan oleh $dA = r dr d\theta$ maka

$$\boxed{\iint_{D^*} f(r,\theta)\,dA = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{a}^{b} f(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta}$$




(a) (b)

**Gambar 5.11**

*CONTOH 1* Hitung $\iint_D r^2 \sin\theta dA$ dengan D adalah bidang setengah lingkaran berjari-jari 2.

**Penyelesaian**

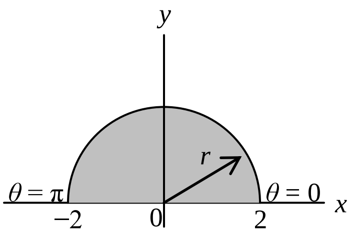
Daerah pengintegralannya adalah $D = \{(r,\theta) \mid 0 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le \pi\}$ (**Gambar 5.12)** maka

$$\iint_D r^2 \sin\theta dA = \int_0^{\pi}\int_0^{2} r^2 \sin\theta \cdot r dr d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2} r^3 \sin\theta dr d\theta$$

$$= \tfrac{1}{4}\int_0^{\pi} [r^4]_0^2 \sin\theta d\theta$$

$$= 8\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = 8[-\cos\theta]_0^{\pi} = 16$$




**Gambar 5.12**

**Transformasi Integral Lipat Dua pada Koordinat Polar** Hubungan antara integral lipat dua dalam koordinat bidang dan koordinat polar sebagai berikut.

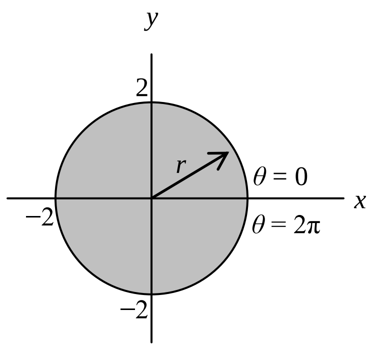
$$\iint_D f(x,y) dA = \iint_{D^*} f(r,\theta) r dr d\theta .$$

dengan $D^* = \{(r,\theta) \mid \alpha \le \theta \le \beta,\ g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta)\}$.

*CONTOH 2* Hitung $\iint_S e^{x^2+y^2} dA$ dengan S adalah bidang lingkaran $x^2 + y^2 = 4$.

**Penyelesaian**

Persamaan $x^2 + y^2 = 4$ adalah lingkaran berpusat di (0, 0) dan berjari-jari 2. Dengan demikian, daerah pengintegralanya dapat dinyatakan oleh $S = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$ seperti diperlihatkan pada **Gambar 5.13**. Dalam bentuk polar, daerah ini dinyatakan oleh $S^* = \{(r,\theta) \mid 0 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$. Dengan transformasi koordinat, $r^2 = x^2 + y^2$, maka




**Gambar 5.13**

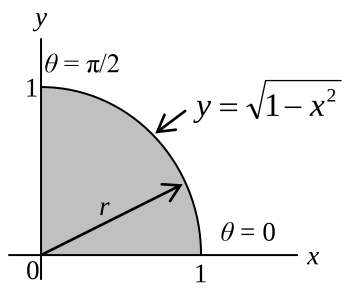
$$\iint_S e^{x^2+y^2} dA = \iint_{S^*} e^{r^2} dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{2} e^{r^2} r dr d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} [e^{r^2}]_0^2 d\theta = \tfrac{1}{2}(e^4 - 1)\int_0^{2\pi} d\theta = \pi(e^4 - 1)$$

*CONTOH 3* Hitung $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dydx$.

**Penyelesaian**

Daerah pengintegralan dari integral di atas adalah $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le\sqrt{1-x^2}\}$. Daerah ini diperlihatkan pada **Gambar 5.14**. Dengan memperhatikan **Gambar 5.14**, daerah D dapat dinyatakan dalam bentuk polar sebagai berikut.




**Gambar 5.14**

$$y=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow y^2=1-x^2$$
$$x^2+y^2=1\Rightarrow r^2=1$$

sehingga diperoleh

$$D^*=\{(r,\theta)\,|\,0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le\pi/2\}$$

Dengan transformasi koordinat ke koordinat polar,

$$\sqrt{1-x^2-y^2}=\sqrt{1-r^2}$$
$$dA=dydx=rdrd\theta$$

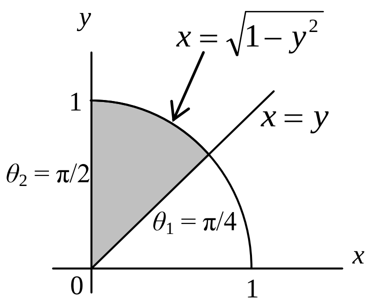
maka

$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dydx=\int_0^{\pi/2}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\,rdrd\theta=-\int_0^{\pi/2}\left[\sqrt{1-r^2}\right]_0^1 d\theta=\int_0^{\pi/2}d\theta=\frac{\pi}{2}.$$

*CONTOH 4* Hitung $\displaystyle\int_0^1\int_y^{\sqrt{1-y^2}}\sin(x^2+y^2)\,dxdy$.

**Penyelesaian**

Daerah pengintegralan di atas adalah $D=\{(x,y)\,|\,0\le y\le 1,\ \ y\le x\le\sqrt{1-y^2}\}$. Daerah ini diperlihatkan pada **Gambar 5.15**. Dengan memperhatikan **Gambar 5.15**, daerah D dapat dinyatakan dalam bentuk polar sebagai berikut.




**Gambar 5.15**

Titik potong kedua kurva: $x_1=x_2$

$$y=\sqrt{1-y^2}\Rightarrow y^2=1-y^2$$
$$2y^2=1\Rightarrow y=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}=x$$

maka $\tan\theta_1=\dfrac{y}{x}=\dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}}=1\rightarrow\theta_1=\frac{\pi}{4}$

Untuk $y=1$, $x=0$ maka $\tan\theta_2=\frac{1}{0}\rightarrow\theta_2=\frac{\pi}{2}$

sehingga diperoleh $\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$. Selanjutnya,

$$x = \sqrt{1-y^2} \Rightarrow x^2 = 1 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow r^2 = 1$$

sehingga diperoleh $D^* = \{(r,\theta) \mid 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le \pi/2\}$.

Dengan transformasi koordinat ke koordinat polar,

$$\sin(x^2 + y^2) = \sin r^2$$

$$dA = dxdy = rdrd\theta$$

maka

$$\int_0^1 \int_y^{\sqrt{1-y^2}} \sin(x^2+y^2)dxdy = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^1 (\sin r^2) rdrd\theta = \tfrac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} [-\cos r^2]_0^1 d\theta .$$

$$= \tfrac{1}{2}(1-\cos 1) \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta = \tfrac{\pi}{4}(1-\cos 1)$$

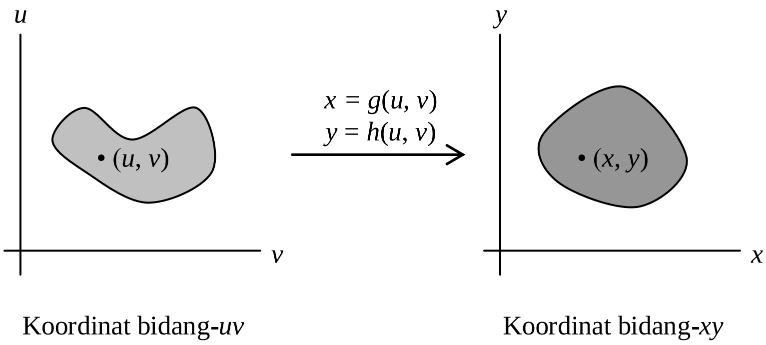
### 5.3.2 Mengganti Peubah Integral: Transformasi Jacobi

Misalnya daerah S dalam bidang *uv* ditransformasikan satu ke satu pada daerah D dalam bidang *xy* dengan persamaan berbentuk:

$$x = g(u,v), \quad y = h(u,v),$$

seperti diilustrasikan pada **Gambar 5.16**. Sebuah fungsi $f(x,y)$ yang didefinisikan pada D dapat dipandang sebagai fungsi $f(g(u,v),h(u,v))$ yang didefinisikan pada G. Jika *g, h,* dan *f* memiliki turunan parsial kontinu,

$$\boxed{\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_S f(g(u,v),h(u,v)) \,|\, J(u,v) \,|\, dudv}$$




**Gambar 5.16**

dengan $J(u,v)$ adalah **determinan Jacobi** yang didefinisikan sebagai berikut.

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}$$

*CONTOH 1* Hitung $\iint_D (2x^2 - xy - y^2)\,dA$ dengan D adalah daerah yang dibatasi oleh garis $y = -2x + 4$, $y = -2x + 7$, $y = x - 2$, dan $y = x + 1$.

**Penyelesaian**

Daerah pengintegralan D dalam koordinat bidang-*xy* diperlihatkan pada **Gambar 5.17**. Untuk mentranformasikan ke koordinat kurvilinear, kita tentukan dahulu daerah S pada bidang-*uv* yang terkait dan determinan Jacobi. Untuk itu, pilih $u = 2x + y$ dan $v = x - y$. Selanjutnya, nyatakan *x* dan *y* dalam *u* dan *v* dengan memecahkan sistem persamaan di atas sebagai berikut.

$$\begin{array}{ll} u = 2x + y & \qquad u = 2x + y \\ \underline{v = x - y} \; + & \qquad \underline{2v = 2x - 2y} \; - \\ u + v = 3x & \qquad u - 2v = 3y \end{array}$$

diperoleh

$$x = \frac{1}{3}(u+v) \text{ dan } y = \frac{1}{3}(u-2v)$$

Turunan parsial pertama *x* dan *y* masing-masing adalah

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{3};\; \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{3};\; \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{3};\; \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{2}{3}$$

maka

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$$

Batas-batas daerah S sebagai berikut.

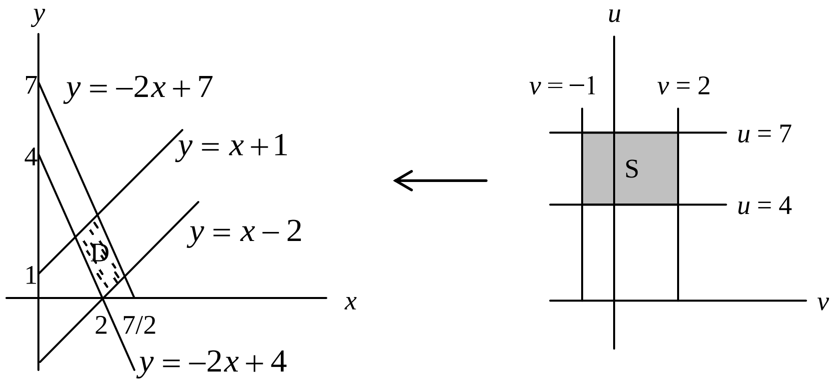
$$y = -2x + 4 \;\rightarrow\; 2x + y = 4 \;\rightarrow\; u = 4$$

$$y = -2x + 7 \;\rightarrow\; 2x + y = 7 \;\rightarrow\; u = 7$$

$$y = x - 2 \;\rightarrow x - y = 2 \;\rightarrow\; v = 2$$

$$y = x + 1 \;\rightarrow x - y = -1 \;\rightarrow v = -1$$

sehingga diperoleh $S = \{(u,v) \mid 4 \le u \le 7,\; -1 \le v \le 2\}$ (**Gambar 5.17**).




**Gambar 5.17**

Selanjutnya, integrannya ditransformasikan menjadi sebagai berikut.

$$2x^2 - xy - y^2 = (2x+y)(x-y) = uv$$

Dengan demikian,

$$\iint_D (2x^2 - xy - y^2)\,dA = \iint_S uv\,|\,J(u,v)\,|\,dudv$$

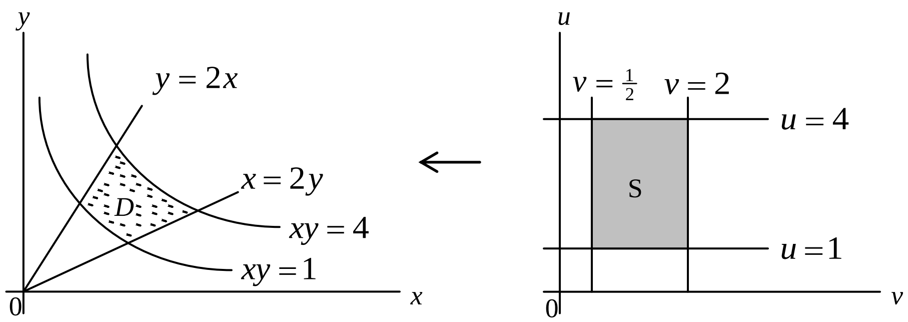
$$= \int_{-1}^{2}\int_{4}^{7} uv(-\tfrac{1}{3})\,dudv = -\frac{1}{3}\int_{-1}^{2} [\tfrac{1}{2}u^2 v]_4^7\,dv$$

$$= -\frac{1}{6}\int_{-1}^{2} 33v\,dv = -\frac{11}{2}[\tfrac{1}{2}v^2]_{-1}^{2} = \frac{33}{4}$$

*CONTOH 2* Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $xy=1$, $xy=4$, $y=2x$, dan $x=2y$.

**Penyelesaian**

Daerah yang dimaksud pada soal diperlihatkan pada **Gambar 5.18**. Daerah S yang berkaitan dengan daerah D dapat ditentukan sebagai berikut.




**Gambar 5.18**

Pilih $u = xy$ dan $v = y/x$. Kita juga dapat menentukan determinan Jacobi dengan terlebih dahulu menentukan turunan parsial *u* dan *v* masing-masing terhadap *x* dan *y* sebagai berikut.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y\,; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x\,; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}\,; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = y\left(\frac{1}{x}\right) - \left(-\frac{y}{x^2}\right)x = 2\frac{y}{x} = 2v$$

maka

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{2v}$$

Persamaan garis pada bidang-*uv* yang berkaitan dengan garis pada bidang-*xy* sebagai berikut.

$$xy = 1 \rightarrow u = 1$$

$$xy = 4 \rightarrow u = 4$$

$$y = 2x \rightarrow \frac{y}{x} = 2 \rightarrow v = 2$$

$$x = 2y \rightarrow \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \rightarrow v = \frac{1}{2}$$

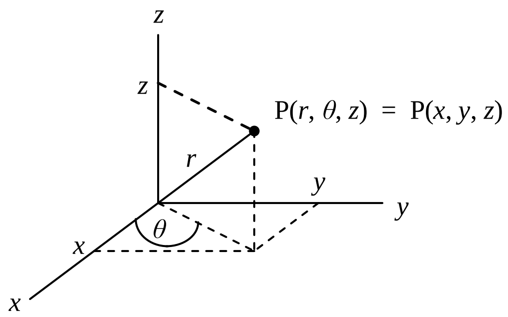
Keempat garis tersebut pada bidang-*uv* diperlihatkan pada **Gambar 5.18**. Dari gambar jelas bahwa daerah S yang bersesuaian dengan daerah D adalah $S = \{(u,v)\,|\,1 \le u \le 4,\ \tfrac{1}{2} \le v \le 2\}$. Dengan demikian, luas daerah D adalah

$$\iint_D dxdy = \iint_S |\,J(u,v)\,|\,dudv = \int_{1/2}^{2}\int_{1}^{4}\frac{1}{2v}\,dudv = \int_{1/2}^{2}\frac{3}{2v}\,dv = \frac{3}{2}[\ln v]_{1/2}^{2} = \frac{3}{2}\ln 4\,.$$

## 5.3.3 Transformasi Integral Lipat Tiga pada Koordinat Tabung

**Koordinat Tabung** Hubungan antara koordinat bidang (*x*, *y*, *z*) dan koordinat tabung (*r*, *θ*, *z*) sebagai berikut (**Gambar 5.18)**.

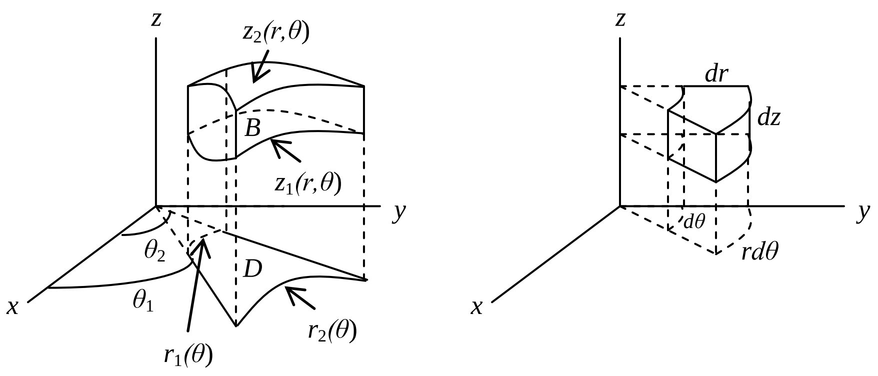
$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z \\ x^2 + y^2 &= r^2 \end{aligned}}$$




**Gambar 5.18**

**Transformasi Integral Lipat Tiga pada Koordinat Tabung** Tinjau benda pejal B pada **Gambar 5.19**. Pada **Gambar 5.19(a)**, proyeksi B pada bidang-*xy* adalah daerah D yang dapat dinyatakan oleh $D = \{(r,\theta) \mid \theta_1 \le \theta \le \theta_2,\ r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)\}$. Pada sumbu-z, benda B dibatasi oleh $z = z_1(r,\theta)$ dan $z = z_2(r,\theta)$. Dengan demikian, benda pejal B dapat dinyatakan oleh

$$B = \{(r,\theta,z) \mid \theta_1 \le \theta \le \theta_2,\ r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta),\ z_1(r,\theta) \le z \le z_2(r,\theta)\}.$$




(a) (b)

**Gambar 5.19**

**Gambar 5.19(b)** memperlihatkan elemen volume *dV*. Elemen volume ini dapat dinyatakan oleh

$$dV = r\,dz\,dr\,d\theta$$

Dengan menggunakan transformasi koordinat: (*x*, *y*, *z*) → (*r*, *θ*, *z*), diperoleh hubungan antara integral lipat tiga pada koordinat bidang dan koordinat tabung sebagai berikut.

$$\boxed{\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} \int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} F(r,\theta,z)\,r\,dz\,dr\,d\theta}$$

*CONTOH 1* Benda B dibatasi oleh tabung $x^2 + y^2 = 4$, bidang *xoy*, dan bidang $y + 2z = 2$. Tentukan volume benda B.

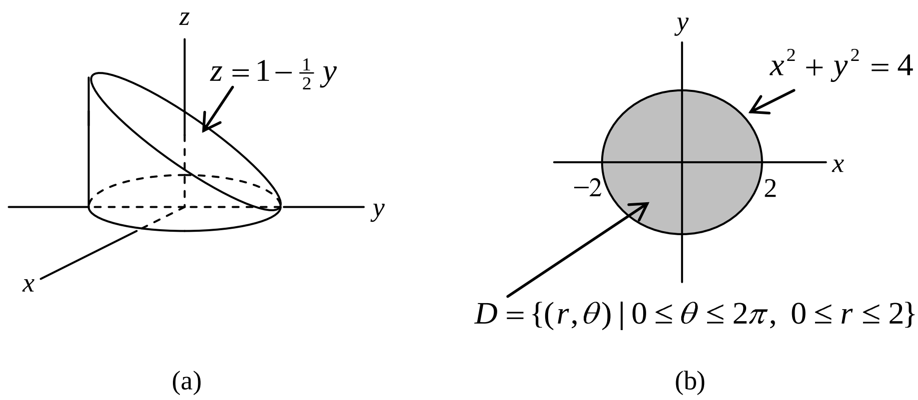
**Penyelesaian**

Benda B seperti diperlihatkan pada **Gambar 5.20(a)**. Daerah pengintegralan dalam koordinat tabung ditentukan sebagai berikut.

Proyeksi benda B pada bidang *xoy* adalah daerah D yang diperlihatkan pada **Gambar 5.20(b)**. Jika ditransformasikan ke koordinat tabung, diperoleh

$$x^2 + y^2 = 4 \rightarrow r^2 = 4 \rightarrow r = 2$$

Dengan demikian, daerah D dapat dinyatakan oleh $D = \{(r,\theta) \mid 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le 2\}$.




**Gambar 5.20**

Batas-batas pada sumbu *z* adalah bidang *xoy* (*z* = 0) dan bidang $y + 2z = 2$. Dalam koordinat tabung,

$$y + 2z = 2 \rightarrow r\sin\theta + 2z = 2 \rightarrow z = 1 - \tfrac{1}{2}r\sin\theta$$

sehinga diperoleh batas-batas pada sumbu z adalah $0 \le z \le 1 - \frac{1}{2}r\sin\theta$. Jadi, secara keseluruhan daerah pengintegralannya adalah

$$B = \{(r,\theta,z) \mid 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le 2,\ 0 \le z \le 1 - \tfrac{1}{2}r\sin\theta\}$$

Selanjutnya, volume benda B ditentukan sebagai berikut.

$$V = \iiint_B dV = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{1-\frac{1}{2}r\sin\theta} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 [rz]_0^{1-\frac{1}{2}r\sin\theta}\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (r - \tfrac{1}{2}r^2\sin\theta)\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} [\tfrac{1}{2}r^2 - \tfrac{1}{6}r^3\sin\theta]_0^2\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (2 - \tfrac{8}{6}\sin\theta)\,d\theta = [2\theta + \tfrac{8}{6}\cos\theta]_0^{2\pi} = 4\pi$$

*CONTOH 2* Hitung $\iiint_B (x^2 + y^2)\,dV$ jika B dibatasi oleh permukaan $z = 4 - x^2 - y^2$ dan bidang $z = 0$.

**Penyelesaian**

Benda B diperlihatkan pada **Gambar 5.21**. Proyeksi benda B pada bidang xoy berupa lingkaran berpusat di (0, 0) dan berjari-jari 2. Daerah ini dapat dinyatakan oleh

$$D = \{(r,\theta) \mid 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le 2\}.$$

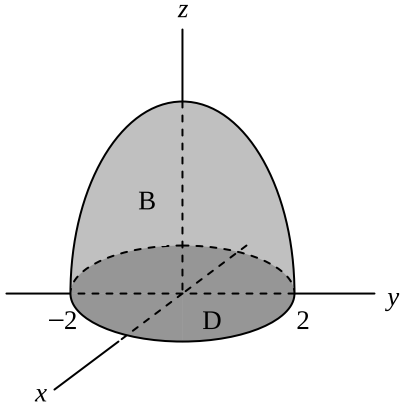
Dalam koordinat tabung,

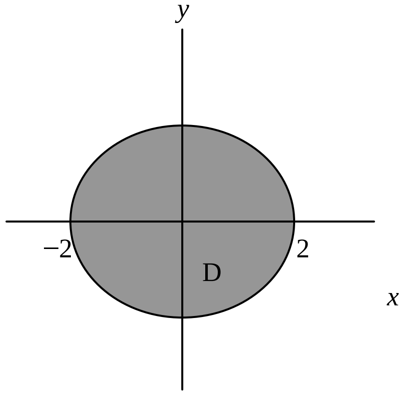
$$x^2 + y^2 = r^2; \quad dV = rdzdrd\theta$$

$$z = 4 - x^2 - y^2 = 4 - r^2$$

Maka batas-batas dalam sumbu-z adalah $0 \le z \le 4 - r^2$. Dengan demikian, benda B dapat dinyatakan oleh

$$B = \{(r, \theta, z) \mid 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le 2,\ 0 \le z \le 4 - r^2\}.$$




**Gambar 5.21**

Dengan demikian,

$$\iiint_B (x^2 + y^2)\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{4-r^2} r^2 \cdot rdzdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 [r^3 z]_0^{4-r^2}\,drd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (4r^3 - r^5)\,drd\theta = \int_0^{2\pi} [r^4 - \tfrac{1}{6} r^6]_0^2\,d\theta = \frac{16}{3}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{32}{3}\pi$$

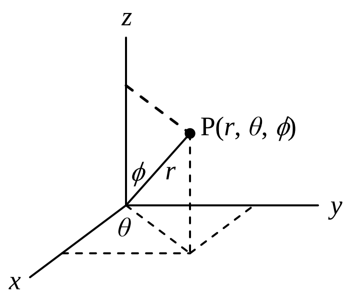
## 5.3.4 Transformasi Integral Lipat Tiga pada Koordinat Bola

Titik-titik pada koordinat bola dinyatakan oleh ($r$, $\theta$, $\phi$) dan hubungannya dengan koordinat bidang ($x$, $y$, $z$) seperti diperlihatkan pada **Gambar 5.22**. Dalam hal ini,

$$x = r\sin\phi\cos\theta; \qquad y = r\sin\phi\sin\theta$$

$$z = r\cos\phi; \qquad 0 \le \phi \le \pi$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$



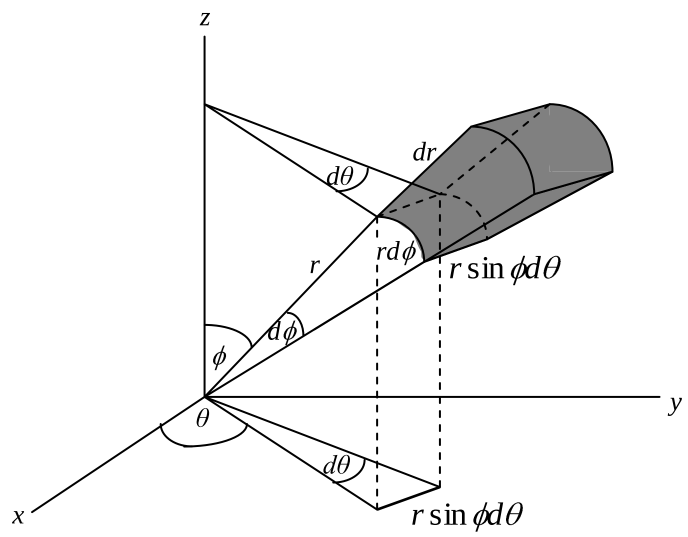

**Gambar 5.22**

Elemen volume *dV* dalam koordinat bola diperlihatkan pada **Gambar 5.23**. Besarnya adalah

$$dV = r^2 \sin\phi\, dr\, d\theta\, d\phi$$

Hubungan antara integral lipat tiga dalam koordinat bidang dan koordinat bola dinyatakan oleh

$$\boxed{\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \int_{\phi_1}^{\phi_2}\int_{\theta_1(\phi)}^{\theta_2(\phi)}\int_{r_1(\theta,\phi)}^{r_2(\theta,\phi)} r^2 \sin\phi\, dr\, d\theta\, d\phi}$$




**Gambar 5.23**

*CONTOH 1* Buktikan bahwa volume bola berjari-jari *R* adalah $\frac{4}{3}\pi R^3$.

**Penyelesaian**

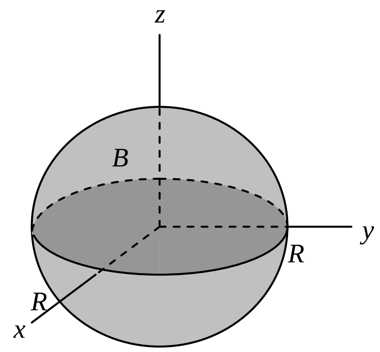
Daerah pengintegralan bola adalah $B = \{(r,\theta,\phi) \mid 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \phi \le \pi,\ 0 \le r \le R\}$ (**Gambar 5.24**). Volume bola adalah

$$V = \iiint_B dV = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} r^2 \sin\phi\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} [\tfrac{1}{3} r^3 \sin\phi]_0^R\, d\theta\, d\phi = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \tfrac{1}{3} R^3 \sin\phi\, d\theta\, d\phi$$

$$= \int_0^{\pi} \tfrac{1}{3} R^3 \sin\phi [\theta]_0^{2\pi}\, d\phi = \frac{2\pi}{3} R^3 \int_0^{\pi} \sin\phi\, d\phi$$

$$= \frac{2\pi}{3} R^3 [-\cos\phi]_0^{\pi} = \frac{4}{3}\pi R^3$$




**Gambar 5.24**

*CONTOH 2* Hitung $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{-\sqrt{9-x^2-z^2}}^{\sqrt{9-x^2-z^2}}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\,dydzdx$.

**Penyelesaian**

Kita selesaikan integral di atas dengan mengubahnya ke koordinat bola. Daerah pengintegralannya adalah

$$B=\{(x,y,z)\,|\,-3\le x\le 3,\ -\sqrt{9-x^2}\le z\le\sqrt{9-x^2},\ -\sqrt{9-x^2-z^2}\le y\le\sqrt{9-x^2-z^2}\}$$

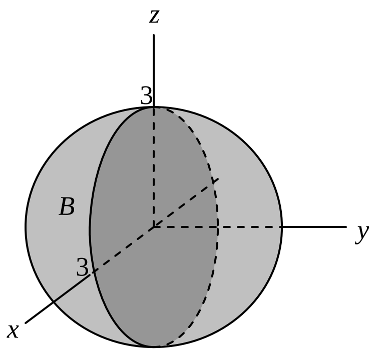
Daerah ini diperlihatkan pada **Gambar 5.25**. Dalam koordinat bola, daerah pengintegralannya dapat dinyatakan oleh

$$B^*=\{(r,\theta,\phi)\,|\,0\le r\le 3,\ 0\le\phi\le\pi,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$$

Integran dan elemen volumenya

$$(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}=(r^2)^{\frac{3}{2}}=r^3$$

$$dV=r^2\sin\phi\,drd\theta d\phi$$




**Gambar 5.25**

Dengan demikian diperoleh

$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{-\sqrt{9-x^2-z^2}}^{\sqrt{9-x^2-z^2}}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\,dydzdx=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{3}r^5\sin\phi\,drd\theta d\phi$$

$$=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[\tfrac{1}{6}r^6\sin\phi]_0^3\,d\theta d\phi=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\tfrac{243}{2}\sin\phi\,d\theta d\phi$$

$$=\frac{243}{2}\int_0^{\pi}\sin\phi[\theta]_0^{2\pi}\,d\phi=\frac{243}{2}\int_0^{\pi}2\pi\sin\phi\,d\phi$$

$$=243\pi[-\cos\phi]_0^{\pi}=486\pi$$

---

## SOAL-SOAL LATIHAN 5.3

1. Hitung integral berikut.

   (a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sin\theta}r\,drd\theta$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{1-\cos\theta}r\sin\theta\,drd\theta$

2. Hitung integral berikut dengan cara mentransformasikannya terlebih dahulu ke koordinat polar.

   (a) $\displaystyle\int_0^{1}\int_x^{\sqrt{1-x^2}}(x^2+y^2)\,dydx$ (b) $\displaystyle\int_0^{2}\int_0^{\sqrt{4-y^2}}e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$

3. Gunakan koordinat polar untuk menentukan volume benda padat di oktan pertama yang berada di dalam paraboloida $z = x^2 + y^2$ dan di dalam silinder $x^2 + y^2 = 9$.

4. Gunakan transformasi Jacobi untuk menentukan integral berikut: $\int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y}{2}+1} \frac{2x - y}{2}\, dxdy$

5. Jika D adalah daerah di kuadran pertama bidang-*xy* yang dibatasi oleh hiperbola $xy = 1$, $xy = 9$, dan garis $y = x$, $y = 4x$. Gunakan transformasi $x = u/v$ dan $y = uv$ dengan $u > 0$ dan $v > 0$ untuk mengubah integral:

$$\iint_D \left(\sqrt{\tfrac{y}{x}} + \sqrt{xy}\right) dxdy$$

sebagai integral di atas daerah *S* pada bidang-*uv*, kemudian tentukan hasilnya.

6. Hitung $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^2 \sqrt{x^2 + y^2}\, dzdydx$. (*Petunjuk*: Gunakan koordinat tabung!)

7. Tentukan volume benda padat yang dibatasi oleh paraboloid $z = 4 - x^2 - y^2$, bidang $z = 0$. (*Petunjuk*: Gunakan koordinat tabung!)

8. Tentukan volume volume benda padat di dalam bola $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, di luar kerucut $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, dan di atas bidang *xoy*. (*Petunjuk*: Gunakan koordinat bola!)

---

## 5.4 Penggunaan Integral Lipat