MODUL 1
DERET TAKHINGGA

Satuan Acara Perkuliahan Modul 1 (Deret Takhingga) sebagai berikut.

Petemuan ke-	Pokok/Sub PokokBahasan	TujuanPembelajaran
1	**Deret Takhingga** Barisan	Mahasiswa diharapkan mampu: ▪ memahami barisan, baik secara formal maupun intuitif, ▪ menentukan rumus rekursif dari barisan, ▪ memeriksa konvergensi suatu barisan dan menentukan limitnya, ▪ mengenal dan menyelesaikan masalah dengan barisan sebagai model matematikanya.
	Deret takhingga (Deret khusus dan konvergensinya)	▪ memahami arti deret takhingga dan membedakannya dari penjumlahan biasa, ▪ memahami konvergensi deret dan kaitannya dengan konvergensi barisan, ▪ menyusun dan menulis deret dengan menggunakan notasi $\sum$, ▪ mengenal beberapa deret khusus dan konvergensinya, seperti deret geometri, deret harmonik, dan deret-p. ▪ memeriksa konvergensi deret sederhana dengan definisi
	Uji Konvergensi Deret Positif	▪ memeriksa konvergensi deret positif dan menghitung jumlahnya bila konvergen dengan menggunakan uji integral,
2	**Deret Takhingga** Uji Konvergensi Deret Positif (lanjutan)	Mahasiswa diharapkan mampu: ▪ memeriksa konvergensi deret positif dan menghitung jumlahnya bila konvergen dengan menggunakan uji perbandingan dan uji limit perbandingan ▪ memeriksa konvergensi deret positif dan menghitung jumlahnya bila konvergen dengan menggunakan uji rasio ▪ memeriksa konvergensi deret positif dan memilihkan uji yang tepat, ▪ mengenal kekuatan dan kekurangan tiap uji serta menggunakannya untuk menentukan strategi penentuan konvergensi.
	Deret Berganti Tanda; Konvergensi Mutlak dan Konvergensi Bersyarat	▪ mengenal deret yang lebih umum yaitu deret berganti tanda, ▪ memahami perbedaan deret berganti tanda dengan deret positif, ▪ memahami konsep kedivergenan, konsep konvergensi mutlak, dan konvergensi bersyarat.

		▪ menguji kekovergenan deret berganti tanda dengan menggunakan (memilih dengan tepat) uji deret berganti tanda, uji konvergensi mutlak, uji rasio mutlak, serta mengenal kelebihan dan kekurangan tiap uji konvergensi.
	Deret Pangkat	▪ memahami pengertian deret pangkat sebagai deret, ▪ menentukan jari-jari konvergensi suatu deret pangkat dan interval konvergensinya. ▪ memahami fungsi yang dibangkitkan oleh sebuah deret pangkat dengan domain sama dengan interval konvergensinya.
3	**Deret Takhingga** Operasi Deret Pangkat	Mahasiswa diharapkan mampu: ▪ memahami representasi/penyajian berbagai fungsi dalam bentuk deret dan batasan domain penyajiannya. ▪ menentukan representasi/penyajian fungsi dalam bentuk deret dengan menggunakan teknik membangun deret pangkat yang baru berdasarkan yang telah ada, dengan operasi turunan, integral, operasi aljabar, subsitusi dan lainnya.
	Deret Taylor dan Maclaurin	▪ menentukan penyajian fungsi dalam bentuk deret pangkat deret Taylor dan deret Maclaurin. ▪ menghargai pentingnya deret Taylor untuk menghampiri nilai fungsi serta manfaatnya dalam perhitungan matematika yang digunakan dalam berbagai bidang. ▪ mengenal beberapa deret Maclaurin yang penting.

1.1 BarisanTakhingga

Barisan adalah susunan bilangan-bilangan riil secara berurutan. Perhatikancontohberikut.

(a) 2, 4, 8, 16, …

(b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ...$

(c) 1, 4, 7, 10, 13, …

Secaraumum, barisandapatditulis

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a_1, a_2, a_3, ...$$

dengan a_n memenuhi persamaan tertentu. Pada contoh di atas, masing-masing dapat ditulis dalam rumus sebagai berikut.

(a) $a_n = 2^n \quad \rightarrow \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = 2,4,8,16,...$

(b) $a_n = (\frac{1}{2})^n \quad \rightarrow \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ...$

(c) $a_n = 3n - 2 \quad \rightarrow \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = 1,4,7,10,13$

Konvergensi Barisan

Barisan $\{a_n\}$ dikatakan konvergen menuju L (bilangan berhingga) jika memenuhi

$$\lim_{n\to\infty} \{a_n\} = L$$

Jika syarat di atas tidak dipenuhi, barisan dikatakan *divergen*.

Sifat-sifat Limit Barisan

Misalnya $\{a_n\}$ dan $\{b_n\}$ adalah barisan konvergen dan k adalah konstanta.

(1) $\lim_{n\to\infty} k = k$

(2) $\lim_{n\to\infty} k a_n = k \lim_{n\to\infty} a_n$

(3) $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$

(4) $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$

(5) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$

CONTOH 1 Cari $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{4n^2+5}$.

Penyelesaian

Bagi pembilang dan penyebut dengan pangkat terbesar dari n (dalam hal ini, n^2) maka diperoleh

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{4n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4+5/n^2}=\frac{1}{4+0}=\frac{1}{4}.$$

CONTOH 2 Diketahui sebuah barisan sebagai berikut.

$$\tfrac{1}{2},\tfrac{2}{3},\tfrac{3}{4},\tfrac{4}{5},\ldots$$

(a) Nyatakan barisan tersebut dalam rumus eksplisit.

(b) Apakah barisan di atas konvergen?

Penyelesaian

(a) Pada barisan di atas, penyebut selalu lebih besar 1 daripada pembilang. Jika pembilang diberi simbol *n*, penyebut menjadi *n* + 1. Dengan demikian, rumus eksplisit barisan di atas adalah

$$a_n=\frac{n}{n+1}.$$

(b) Ujikonvergensi

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+1/n}=\frac{1}{1+0}=1$$

Karena $\lim_{n\to\infty}a_n=1$ (bilangan berhingga), maka $\{a_n\}$ konvergen menuju 1.

CONTOH 3 Apakah $\{a_n\}$ dengan $a_n=\dfrac{e^{2n}}{n^2+3n-1}$ konvergen?

Penyelesaian

Untuk menguji konvergensi barisan di atas, cari limit $a_n$untuk $n\to\infty$. Jika kita masukkan n = ∞ pada soal ini, akan diperoleh bentuk taktentu ∞/∞. Kita gunakandalilL'Hopital:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{2n}}{n^2+3n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2e^{2n}}{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{4e^{2n}}{2}=\infty$$

Karena $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ (takhingga), maka $\{a_n\}$ divergen menuju ∞.

LATIHAN 1.1

Untuk Soal 1 – 5, tuliskan lima suku pertama barisan berikut. Tentukanapakahbarisantersebutkonvergenat audivergen.

1. $a_n=\dfrac{n+1}{3n-2}$

2. $a_n=\dfrac{3n^2+2}{2n-1}$

3. $a_n=(-1)^n\dfrac{n}{n+2}$

4. $a_n=\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$

5. $a_n=e^{-n}\sin n$

UntukSoal 6 – 10, carirumuseksplisit$a_n$untuksetiapbarisanberik ut.Tentukanapakahbarisantersebutkonvergen ataudivergen.

6. $\dfrac{1}{2^2},\dfrac{2}{2^3},\dfrac{3}{2^4},\dfrac{4}{2^5},\ldots$

7. $1, \frac{1}{1-\frac{1}{2}}, \frac{1}{1-\frac{2}{3}}, \frac{1}{1-\frac{3}{4}}, \ldots$
8. $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{81}, \frac{1}{256}, \ldots$
9. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \ldots$
10. $-\frac{1}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{9}{27}, \frac{16}{81}, \ldots$

1.2 Deret Takhingga: Deret Khusus dan Konvergensinya

Secara umum, deret takhingga ditulis sebagai berikut.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

KonvergensiDeret

Derettakhingga $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dikatakankonvergendanmemilikijumlah$S$jikabarisanjumlahparsialke-n $\{S_n\}$ konvergenmenuju$S$. Jika $\{S_n\}$ divergen, derettersebutdivergen. Deret divergen tidak memiliki jumlah.

CONTOH 1 Tentukan konvergensi jumlah deret berikut.

$$\frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \frac{4}{81} + \ldots$$

Penyelesaian

Jumlahparsialke-*n*derettersebutadalah

$$S_1 = \frac{4}{3}$$

$$S_2 = \frac{4}{3} + \frac{4}{9} = \frac{16}{9}$$

$$S_3 = \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} = \frac{52}{27}$$

$$\vdots$$

$$S_n = \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \ldots + \frac{4}{3^n} = 2 - \frac{2}{3^n}$$

Maka

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{2}{3^n}\right) = 2$$

Dengan demikian, jumlah deret $\frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \frac{4}{81} + \ldots$ konvergen menuju 2.

Deret Geometri

Deret geometri memiliki bentuk

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots$$

dengan $a \neq 0$, $r = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

Deretgeometrikonvergenuntuk -1 < r < 1 dandivergenuntuk r < –1 atau r > 1.
Untukderetgeometrikonvergen, jumlahnyamemenuhi

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}$$

dengan $S_n = \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1}$

CONTOH 2 Tentukanjumlahderetberikut.

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \ldots$$

Penyelesaian

Rasio deret $r = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}$ dan $a = \tfrac{1}{2}$ maka jumlahnya adalah

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

Deret Harmonik

Deret harmonik memiliki bentuk sebagai berikut.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

Deret harmonik merupakan deret divergen. Buktinya sebagai berikut.

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots + \frac{1}{n} \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \frac{8}{16} + \ldots + \frac{1}{n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Jelas bahwa $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ sehingga deret harmonik divergen menuju takhingga.

Deret-*p*

Deret-*p*memilikibentuksebagaiberikut.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\dots$$

dengan *p* konstanta. Deret-*p* konvergen jika $p > 1$ dan divergen jika $p \leq 1$ {Bukti konvergensi ini ditunda dulu hingga Anda selesai mempelajari beberapa metode uji konvergensi).

UjiSukuke-n untukKonvergensi: UjiPendahuluan

Jika $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ atau tidak ada, deret tersebut divergen. Jika $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ perlu diuji lagi dengan metode lain apakah ia konvergen atau divergen.

CONTOH 4 Tunjukkan bahwa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^2+n}$ divergen.

Penyelesaian

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2}.$$

Dengan demikian, sesuai dengan uji suku ke-*n*, deret tersebut divergen.

LATIHAN 1.2

Untuk Soal 1 – 6, tentukan apakah deret berikut konvergen atau divergen. Jika konvergen, cari jumlahnya. Petunjuk: untuk memudahkan, tulis beberapa suku awal deret tersebut.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\text{[illegible]}}{5}\right)^{n}$

2. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k}$

3. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k(k+2)}$

5. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-5}{k+2}$

6. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^{-k-2}$

Untuk Soal 7 – 10, gunakan uji pendahuluan (uji suku ke-n) untuk menyatakan bahwa deret tersebut divergen atau perlu uji lanjutan. Ingat, uji pendahuluan tidak dapat digunakan untuk menyimpulkan bahwa deret konvergen.

7. $\frac{1}{2}-\frac{4}{5}+\frac{9}{10}-\frac{16}{17}+\frac{25}{26}-\frac{36}{37}+\dots$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n^2+10n}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)!}$

10. $\sum\frac{(-1)^n n^2}{(n+1)^2}$

1.3 UjiKonvergensiDeretPositif

1.3.1 Uji Integral

Misalnya*f*merupakanfungsikontinu, positif, dantidaknaikpada interval [1, ∞) dananggap $a_n = f(n)$ untuksemuabilanganpositif*n*. Derettakhingga

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergen jika dan hanya jika integral improper } \int_1^{\infty} f(n)dn \text{ konvergen.}$$

CONTOH 6 Gunakan uji integral untuk menentukan apakah $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ konvergen atau divergen.

Penyelesaian

$$\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{n+1} dn = \lim_{t\to\infty} \left[\ln(n+1)\right]_1^t = \lim_{t\to\infty} \left[\ln(t+1) - \ln 2\right] = \infty$$

Dengandemikian, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ divergen.

CONTOH 7 Tunjukanbahwa*deret-p*(a)konvergenjika p > 1 dan (b) divergenjika p ≤ 1.

Penyelesaian

Sepertitelahdituliskanpadasubbab 1.2, deret-*p*berbentuk

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \ldots$$

dengan *p* konstanta. Untuk p > 0, fungsi $f(n) = \frac{1}{n^p}$ kontinu, positif, dan tidak naik pada [1, ∞).

(a) **Untuk *p*> 1**, $\int \frac{1}{n^p} dn = \int_1^t n^{-p} dn = \left[\frac{n^{1-p}}{1-p}\right]_1^t = \frac{t^{1-p} - 1}{1-p}$

Selanjutnya, $\lim_{t\to\infty} t^{1-p} = 0$. Dengan demikian $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergen untuk *p* > 1.

(b) **Untuk *p* = 1**: $\int \frac{1}{n^p} dn = \int_1^t n^{-1} dn = \left[\ln n\right]_1^t = \ln t$

Selanjutnya, $\lim_{t\to\infty} \ln t = \infty$ maka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ divergen.

Untuk 0 <*p*< 1: $\int \frac{1}{n^p} dn = \int_1^t n^{-p} dn = \left[\frac{n^{1-p}}{1-p}\right]_1^t = \frac{t^{1-p} - 1}{1-p}$

Karena 0 <p< 1 maka u = 1 – p > 0. Selanjutnya, $\lim_{t\to\infty} t^{1-p} = \lim_{t\to\infty} t^{u} = \infty$ maka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ divergen.

Untuk *p* < 0,: p< 0 maka $-p$ = u> 0 sehingga $a_n = \frac{1}{n^p} = n^{-p} = n^u$. Dengan uji pendahuluan (uji suku ke-n): $\lim_{n\to\infty} n^u = \infty$ maka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ divergen.

Dari ketiga kondisi di atas diperoleh simpulan bahwa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ divergen untuk p ≤ 1.

1.3.2 UjiPerbandingan

Misalnya$a_n \geq 0$dan $b_n \geq 0$. Untuk n ≥ N,

(1)$a_n \leq b_n$ dan $\sum b_n$ konvergen maka$\sum a_n$ konvergen.

(2)$a_n \geq b_n$ dan $\sum b_n$ divergen maka$\sum a_n$ divergen.

Untuk uji perbandingan, kita dapat melakukan perbandingan suatu deret dengan deret yang konvergensi atau divergensinya sudah kita ketahui. Dalam hal ini, telah diketahui konvergensi atau divergensi beberapa deret sebagai berikut.

(1) DeretGeometri

$\sum_{n=1}^{\infty} ar^n$ konvergenjika –1 <r< 1 dandivergenjika$r$< –1 atau$r$ > 1.

(2) Deret-p

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergen jika p > 1 dan divergen jika p ≤ 1.

(3) DeretHarmonik

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergen.

CONTOH 1 Apakah $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^2-1}$ konvergen atau divergen?

Penyelesaian

Untuk n besar, suku ke-n deret tersebut menyerupai $\frac{1}{3n}$. Kita coba pilih $b_n = \frac{1}{3n}$ dan bandingkan dengan $a_n = \frac{n}{3n^2-1}$ sebagai berikut

$$\frac{n}{3n^2-1} > \frac{n}{3n^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n} \rightarrow a_n > b_n$$

Karena $a_n > b_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$ divergen (sepertiga kali deret harmonik) maka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^2 - 1}$ divergen.

CONTOH 2 Tentukan konvergensi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{3n^3+2}$.

Penyelesaian

Untuk n besar, suku ke-$n$deret di atas menyerupai $\frac{1}{n^2}$. Pilih $b_n = \frac{1}{n^2}$. Selanjutnya,

$$\frac{3n-1}{3n^3+2} < \frac{1}{n^2} \to a_n < b_n$$

Karena $a_n < b_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergen (*deret-p* dengan $p = 2 > 1$) maka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{3n^3+2}$ konvergen.

1.3.3 UjiLimit Perbandingan

Misalnya $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$, dan $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$.

(1) $0 < L < \infty \to \sum a_n$ dan $\sum b_n$ sama-sama konvergen atau sama-sama divergen.

(2) $L = 0$ dan $\sum b_n$ divergen$\to \sum a_n$ konvergen.

CONTOH 3 Tentukan apakah $\sum_{1}^{\infty} \frac{n}{n^2+2n+3}$ konvergen atau divergen.

Penyelesaian

Untuk n besar, suku ke-n deret tersebut menyerupai $1/n$. Oleh karena itu, pilih

$b_n = \frac{1}{n}$ maka

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^2+2n+3} \div \frac{1}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+3} = 1$$

Karena $\sum_{1}^{\infty} b_n = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergen (deret harmonik), maka $\sum_{1}^{\infty} \frac{n}{n^2+2n+3}$ divergen.

CONTOH 4 Tentukan apakah $\sum_{1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3-2n^2+5}$ konvergen atau divergen.

Penyelesaian

Untuk *n* besar, suku ke-n deret tersebut mirip $1/n^2$. Oleh karena itu, pilih $b_n = \frac{1}{n^2}$ maka

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-1}{n^3-2n^2+5} \div \frac{1}{n^2} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-n^2}{n^3-2n^2+5} = 1$$

Karena $\sum_{1}^{\infty} b_n = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergen (deret-*p* dengan *p* = 2 > 1), maka $\sum_{1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3-2n^2+5}$ konvergen.

CONTOH 5 Tentukan konvergensi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$.

Penyelesaian

Mirip bentuk rumus eksplisit suku ke-*n* seperti apakah $\frac{\ln n}{n}$? Kita coba dengan membandingkannya dengan $\frac{1}{n}$. Karena itu, pilih $b_n = \frac{1}{n}$ maka

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln n}{n} \div \frac{1}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} \ln n = \infty$$

Ternyata uji di atas gagal karena tidak sesuai dengan syarat uji limitperbandingan. Kita cobalagidenganmemilih $b = \frac{1}{\sqrt{n}}$ maka

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln n}{n} \div \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/2\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$$

{Limit di atas diperoleh dengan dalil L'Hopital}

Karena $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ divergen (deret-*p* dengan *p* = ½ < 1) maka, sesuai syarat uji limitperbandingan, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ konvergen.

1.3.4 UjiRasio

Misalnya $\sum a_n$ merupakanderetsuku-sukupositifdan $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$.

(1) Jikaρ< 1, derettersebutkonvergen.

(2) Jikaρ> 1 atauρ= ∞, derettersebutdivergen.

(3) Jika ρ = 1, gunakan uji konvergensi lain.

CONTOH 8 Uji konvergensi deret berikut.

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+...+\frac{1}{n!}+...$$

Penyelesaian

Deret tersebut memiliki suku ke-n: $a_n=\frac{1}{n!}$ dan suku ke-(n+1): $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$ maka

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)!}\div\frac{1}{n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0\ .$$

Karena ρ< 1 maka deret tersebut konvergen.

Catatan:

$$\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1}{(n+1)(n)(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1}=\frac{1}{n+1}\ .$$

CONTOH 9 Uji konvergensi deret berikut.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}\ .$$

Penyelesaian

Suku ke-n dan ke-(n+1) deret tersebut masing-masing $a_n=\frac{2^n}{n^2}$ dan $a_n=\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}$ maka, dengan uji rasio,

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}\div\frac{2^n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(1+\frac{1}{n})^2}=\frac{2}{(1+0)^2}=2\ .$$

ρ = 2 > 1 maka deret tersebut divergen.

LATIHAN 1.3

Untuk Soal 1 – 4, gunakan uji perbandingan atau perbandingan limit untuk menentukan konvergensi deret.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n^2+1}}{n^3}$

Gunakan uji integral untuk menentukan konvergensi deret pada Soal 5 – 8 berikut.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+1}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)^2}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$

Gunakan uji rasio untuk menentukan konvergensi deret pada Soal 8 – 12 berikut.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n!}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2}$

11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n}}{2^{3n}}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!}$

Tentukan konvergensi deret pada Soal 13 – 20 berikut. Tuliskanuji yang digunakan.

13. $\frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{4^2} + \frac{4}{5^2} + \dots$

14. $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \dots$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2+1}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{3^n}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3-4}$

1.4 Deret Berganti Tanda; Konvergensi Mutlak dan Konvergensi Bersyarat

Deret berganti tanda memiliki bentuk umum sebagai berikut.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

dengan $a_n > a_{n+1} > 0$.

Uji Deret Berganti Tanda:

Jika $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, deret tersebut konvergen.

CONTOH 1 Tunjukkan bahwa $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ konvergen.

Penyelesaian

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Jelas bahwa deret tersebut konvergen.

KonvergensiMutlak

Jika $\sum |a_n|$ konvergen, $\sum a_n$ konvergen. Uji konvergensi mutlak (*uji rasio mutlak*) sebagai berikut. Misalnya

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho$$

(1) Jika $\rho < 1$, deret tersebut konvergen mutlak.

(2) Jika$\rho > 1$ atau$\rho = \infty$, derettersebutdivergen.

(3) Jika $\rho = 1$, gunakan uji konvergensi lain.

CONTOH 2 Tentukankonvergensi $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n^2}$.

Penyelesaian

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} \div \frac{2^n}{n^2} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2n^2}{(n+1)^2} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2}{(1+\frac{1}{n})^2} \right| = \frac{2}{(1+0)^2} = 2$$

$\rho > 1$ maka, sesuai uji konvergensi mutlak, deret tersebut divergen.

Konvergensi Bersyarat

Deret $\sum a_n$ disebut konvergen bersyarat jika $\sum a_n$ konvergen tetapi $\sum |a_n|$ divergen.

CONTOH 3 Tunjukkan bahwa $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ konvergen bersyarat.

Penyelesaian

Pada CONTOH 1 telah dibuktikan bahwa deret tersebut konvergen. Akan tetapi,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergen (deret harmonik). Jadi, jelas bahwa $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ konvergen bersyarat

---

LATIHAN 1.4

Tunjukkan bahwa deret pada Soal 1 – 4 berikut konvergen mutlak.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^n$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n!}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{e^n}$

TentukanapakahderetpadaSoal 6 – 10 berikutkonvergenmutlak, konvergenbersyarat, ataudivergen.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3n}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{5n+1}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin n}{n\sqrt{n}}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^4}{2^n}$

1.5 DeretPangkat;HimpunanKonvergensi

Deret pangkat memiliki bentuk sebagai berikut.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ...$$

Konvergensi deret pangkat bergantung pada nilai x yang dipilih. Uji konvergensi yang digunakan adalah uji rasio mutlak. Himpunan konvergensi deret pangkat selalu berada dalam interval dari salah satu kemungkinan berikut.

(1) Titiktunggal$x$ = 0.

(2) Interval (-R, R), ditambah salah satu atau kedua titik ujung.

(3) Semuabilanganriil.

Ketiga kemungkinan interval di atas disebut *radius konvergensi*.

CONTOH 1 Tentukan x sehingga $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ konvergen.

Penyelesaian

Uji rasio mutlak,

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\div\frac{x^n}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0\,.$$

Karena ρ = 0 < 1, deret tersebut konvergen untuk semua x.

CONTOH 2 Tentukan himpunan konvergensi $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{2^n}$.

Penyelesaian

Uji rasio mutlak,

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-x)^{n+1}}{2^{n+1}}\div\frac{(-x)^n}{2^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{2}\right| = \frac{|x|}{2}\,.$$

Deret tersebut konvergen untuk $\rho < 1$, yakni, $\frac{|x|}{2} < 1$ atau $|x| < 2$ dan, sebaliknya, divergen pada $|x| > 2$. Selanjutnya, cek titik-titik ujung, yakni $x = -2$ dan $x = 2$.

Pada $x = -2$

$$a_n = \frac{(2)^n}{2^n} = 1 \text{ dan } \lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

sehingga sesuai dengan uji pendahuluan (uji suku ke-n), $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ divergen.

Pada $x = 2$

$$a_n = \frac{(-2)^n}{2^n} = (-1)^n \text{ dan } \lim_{n\to\infty} a_n \text{ tidak ada}$$

sehingga sesuai denganteorema uji deret berganti tanda, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ divergen.

Dengan demikian, deret di atas konvergen pada interval: $-2 < x < 2$.

LATIHAN 1.5

Tentukan himpunan konvergensi deret pangkat pada Soal 1 – 5 berikut.

1. $\frac{x}{1\cdot 2} - \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^3}{3\cdot 4} - \frac{x^4}{4\cdot 5} + \ldots$
2. $1 + 2x + \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^3 x^3}{3!} + \frac{2^4 x^4}{4!} + \ldots$
3. $1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + \ldots$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\ln(n+1)}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{5^n (n^2+1)}$

1.6 Turunandan Integral DeretPangkat

Misalnya $S(x)$ adalah jumlah deret pangkat pada interval I,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

Jika x di dalam interval I,

(1) $S'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(a_n x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

(2) $\int_0^x S(t)\,dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x a_n t^n\,dt\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$

CONTOH 1 Pada deret geometri, untuk –1 <*x*< 1,

$$S(x)=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\dots$$

Tentukan dua fungsi baru melalui pendiferensialan dan pengintegralan.

Penyelesaian

(1) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{d}{dx}\left(1+x+x^2+x^3+x^4+\dots\right)$

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+\dots, \qquad -1<x<1$$

(2) $\int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt=\int_0^x \left(1+t+t^2+t^3+t^4+\dots\right)dt$

$$-\ln(1-x)=x+\frac{x}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\dots$$

Ganti *x* oleh –*x* dan kalikan kedua ruas dengan –1 maka diperoleh

$$\ln(1+x)=x-\frac{x}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots, \qquad -1<x<1$$

CONTOH 2 Tunjukkanbahwa

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\dots$$

Penyelesaian

Misalnya

$$S(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\dots$$

maka

$$S'(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$$

Dari keduafungsideret di atas, diperoleh $S(x)=S'(x)$, yang tidak lain adalahpersamaandiferensial. Solusi umum persamaan diferensial ini adaah $S(x) = Ae^x$, dengan A konstanta. Karena $S(0) = 1$ maka $A = 1$ sehingga solusi khususnya adalah $S(x) = e^x$. Jadi, jelasbahwa

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$$

LATIHAN 1.6

Tentukan ungkapan deret pangkat dari $f(x)$ dan radius konvergensinya. $f(x)$ berkaitan dengan dere geometri.

1. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

2. $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$

3. $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x^4}$

4. $f(x) = \ln[(1+x)/(1-x)]$

5. Gunakan hasil pada Contoh 2 untuk mendapatkan fungsi berikut.

   $f(x) = e^x + e^{-x}$

1.7 Deret Taylor danMaclaurin

Tinjaufungsideretberikut.

$$f(x) = k_o + k_1(x-a) + k_2(x-a)^2 + k_3(x-a)^3 + k_4(x-a)^4 + ...$$

pada interval sekitar a. Turunan ke-n fungsi tersebut adalah

$$f'(x) = k_1 + 2k_2(x-a) + 3k_3(x-a)^2 + 4k_4(x-a)^3 + ...$$

$$f''(x) = 2!k_2 + 3!k_2(x-a) + 4\cdot 3k_3(x-a)^2 + ...$$

$$f'''(x) = 3!k_3 + 4!k_4(x-a) + ...$$

$$\vdots$$

Masukkan $x = a$ maka akan diperoleh

$$k_0 = f(a)$$

$$k_1 = f'(a)$$

$$k_2 = \frac{f''(a)}{2!}$$

$$k_3 = \frac{f'''(x)}{3!}$$

atausecaraumum

$$k_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Jika konstanta k_n dimasukkan ke fungsi deret, diperoleh

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{f^{(4)}}{4!}(x-a)^4 + ...$$

Deret ini dikenal sebagai **deret Taylor**. Untuk $a = 0$, deret di atas disebut **deret Maclaurin**, yakni

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}}{4!}x^4 + ...$$

CONTOH 1 Ekspansikan $f(x) = \sin x$ kedalamderetMaclaurin.

Penyelesaian

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin x & &\rightarrow & f(0) &= 0 \\
f'(x) &= \cos x & &\rightarrow & f'(0) &= 1 \\
f''(x) &= -\sin x & &\rightarrow & f''(0) &= 0 \\
f'''(x) &= -\cos x & &\rightarrow & f'''(0) &= -1 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

SesuaidenganrumusderetMaclaurindiperoleh

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

CONTOH 2 Ekspansikan $f(x) = e^x$ kedalamderetMaclaurin.

Penyelesaian

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^x & &\rightarrow & f(0) &= 1 \\
f'(x) &= e^x & &\rightarrow & f'(0) &= 1 \\
f''(x) &= e^x & &\rightarrow & f''(0) &= 1 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

SesuaidenganrumusderetMaclaurindiperoleh

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

{Hasil ini sama dengan CONTOH 2 Subbab 1.6)

CONTOH 3 Nyatakan e^{-x^2} sebagai fungsi deret pangkat.

Penyelesaian

PadaContoh 2 telahdiperoleh

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

Ganti x oleh $-x^2$ maka diperoleh

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \ldots$$

Beberapa deret Maclaurin penting dan interval konvergensinya.

1. $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots,$ $\qquad -1 < x < 1$

2. $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dots,$ $\qquad -1 < x \le 1$

3. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dots,$ $\qquad$ semua x

4. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \dots,$ $\qquad$ semua x

5. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \dots,$ $\qquad$ semua x

6. $(1+x)^p = 1 + px + \dfrac{p(p-1)}{2!}x^2 + \dfrac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \dots,$ $\qquad -1 < x < 1$

   (Deret binomial, p bilangan riil).

LATIHAN 1.7

Nyatakan fungsi berikut ke dalam bentuk deret Maclaurin.

1. $f(x) = \cos x$

2. $\tan^{-1} x = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+u^2}\,du$

Gunakan substitusi pada deret yang sudah ada untuk mendapatkan representasi deret dari fungsi berikut.

3. $f(x) = \ln x,$ $\qquad 0 < x \le 1$

4. $f(x) = e^{x^2}$.

5. $f(x) = (1+x)^4,$ $\qquad -1 < x < 1.$
